then:

$$x_1 = \frac{r}{\sqrt{1+\theta^2}}, \quad y_1 = \frac{r\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}, \tag{15}$$

$$x_2 = -\frac{r}{\sqrt{1+\theta^2}}, \quad y_2 = -\frac{r\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}.$$

These solutions correspond to two symmetric points with respect to the origin in the x, y-plane. Since we have two, in general, values of r, and θ depends on r, (15) give four points, then the singularities of the equation (1) are, in general, five, the origin included.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἐρευνῶνται ἐνταῦθα αἱ συνθῆκαι ὑπὸ τὰς ὁποίας ἀναπτύσσονται ὑποαρμονικαὶ ταλαντώσεις δευτέρας τάξεως εἰς μὴ γραμμικὸν σύστημα, ὅπου ἡ μὴ γραμμικότης εἰσέρχεται εἰς τὴν ἐλαστικὴν δύναμιν καὶ ἡ ἐξωτερικὴ δύναμις εἶναι ἡμιτονικοῦ τύπου. Οἱ συντελεσταὶ τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τοῦ συστήματος εἶναι οὐχὶ κατ' ἀνάγκην μικρῶν τιμῶν. Τὰ πλάτη καὶ αἱ συνιστῶσαι τῶν ὑποαρμονικῶν ταλαντώσεων καθὼς καὶ τὰ ὅρια μεταβολῆς τοῦ πλάτους τῆς ἐξωτερικῆς δυνάμεως εὑρίσκονται συναρτήσει τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως τοῦ συστήματος.

Δίδεται πρακτικὸν κριτήριον ἀναγνωρίσεως ὑπάρξεως τῶν ὑποαρμονικῶν.

REFERENCES

[1] MAGIROS D., Prakt. Athens Acad. Sci., 32 (1957) pp. 448-451.
[2] MAGIROS D., Information and Control, 1 (1958) pp. 198-227.

ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— Τὸ Παράδοξον ὡρολόγιον. «Συμπληρώσεις», *ὑπὸ* ***Θεοδ. Χ. Σιώκου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

I. ΓΕΝΙΚΑ.

Εἰς δύο προηγουμένας μελέτας μου [1,2] ἀπέδειξα ὅτι εἰς χῶρον X^1, X^4 τὸ «Παράδοξον Ὡρολόγιον» τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς σχετικότητος δὲν ὑφίσταται. Ταξιδιώτης ταξιδεύων ἀνὰ τὸ διάστημα καὶ ἐπιστρέφων εἰς τὴν Γῆν δὲν θὰ ἔχῃ ζήσει ὀλιγώτερον τοῦ παραμείναντος παρατηρητοῦ.

---

[1] Θ. Χ. ΣΙΩΚΟΥ, Συστολὴ μήκους καὶ διαστολὴ χρόνου εἰς τὴν γενικὴν θεωρίαν τῆς σχετικότητος. Πρακτ. Ἀκαδημ. Ἀθηνῶν 33 (1958) σ. 58 κ.ἑξ.

[2] Θ. Χ. ΣΙΩΚΟΥ, Τὸ Παράδοξον ὡρολόγιον τῆς ΓΘΣ. Πρακτ. Ἀκαδημ. Ἀθηνῶν 33 (1958) σ. 212 κ.ἑξ.

Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἐξετάζεται τὸ θέμα τοῦτο γενικώτερον καὶ ἐν ταὐτῷ παρατίθενται ὡρισμέναι ἐπεξηγήσεις καὶ τροποποιήσεις ἐπὶ τῶν προηγουμένων, ὡς ἄνω, μελετῶν μου.

II. ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΟΣ (ΕΘΣ).

1) Ὡς γνωστὸν δύο παρατηρηταὶ A καὶ B κινούμενοι μὲ σχετικὴν ταχύτητα U_o (ὡς πρὸς τὸν ἄξονα X^1) ἔχουσιν ὁ εἷς πρὸς τὸν ἄλλον τὴν γνωστὴν σχέσιν τῆς διαστολῆς τοῦ χρόνου (1), ἥτις σχέσις ὑφίσταται καὶ διὰ τὴν ἐνέργειαν W.

$$dt_A = \left(1 - \frac{U_o^2}{c^2}\right)^{-1/2} . \, dt_B \qquad W_A = W_B \left(1 - \frac{U_o^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{1}$$

Ὁμοίως εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὰ συναλλοιωτικὰ μεγέθη ταυτίζονται πρὸς τὰ ἀντισυναλλοιωτικὰ καὶ ὅτι ἕκαστος παρατηρητὴς διὰ τὸν ἑαυτόν του ἔχει ὡς χρόνον ζωῆς τὸν ἀπόλυτον χρόνον τ.

$$\overset{2}{dx^1} + \overset{2}{dx^4} = - c^2 d\tau^2 = \overset{2}{dx^1} - c^2 dt^2 \qquad dx^4 = icdt \tag{2}$$

$$dt = d\tau \qquad \text{ἀφοῦ} \qquad dx^1 : dt = 0 \, (*) \tag{3}$$

2) Συνέπεια τοῦ προηγουμένου εἶναι:

α) Ὑφίσταται διαφορὰ χρόνου t μεταξὺ τῶν δύο παρατηρητῶν, ἐφ᾽ ὅσον ὑφίσταται διαφορὰ ἐνεργείας μεταξύ των. Ὅταν εἷς παρατηρητὴς ἔλθῃ εἰς τὸ σύστημα τοῦ ἄλλου, θὰ ἔχῃ ζήσει τὸν αὐτὸν χρόνον, ὡς καὶ ὁ ἄλλος παρατηρητής, ἐνῷ διὰ τὰς μετρήσεις τῆς σχετικῆς κινήσεώς των θὰ ἔχωσι τὰ αὐτὰ ἀμφότεροι ἀποτελέσματα τῆς ΕΘΣ.

β) Ἡ περίπτωσις καθ᾽ ἣν ὁ παρατηρητὴς π.χ. B ἐπανερχόμενος εἰς τὸ σύστημα τῶν συντεταγμένων τῶν A θὰ ἔχῃ μεγαλυτέραν αὐτοῦ ἐνέργειαν (ἥτις εἶναι ἡ ἐν ἠρεμίᾳ M_oc^2) πρέπει συνεπῶς νὰ ἀποκλεισθῇ. Ἐὰν ὅμως πρὸς στιγμὴν θεωρήσωμεν ὅτι τοῦτο συμβαίνει, ἐπειδὴ ἡ θεωρία τῆς σχετικότητος ἰσχύει διὰ δύο ὁμοίους παρατηρητὰς (τῆς αὐτῆς μάζης M_o), τότε θὰ πρέπῃ ἡ διαφορὰ αὐτὴ ἐνεργείας νὰ ὑφίσταται καὶ μεταξὺ τῶν ἐν ἠρεμίᾳ μαζῶν τῶν δύο παρατηρητῶν καὶ συνεπῶς πρέπει αὕτη νὰ μετατραπῇ εἰς «φωτόνιον» τῆς αὐτῆς ἐνεργείας, ὅπερ θὰ προσδώσῃ κίνησιν εἰς τὸν προμηθευτὴν B ἐν σχέσει πρὸς τὸν A. Μία τοιαύτη ἄποψις δικαιολογεῖται Κβαντικῶς**, δεδομένου ὅτι τὸ φωτόνιον (σωματίδιον συστροφῆς 1) ἔχει «μηδενικὴν κατάστασιν», ἐπιτρέπουσαν τὴν ἀπορρόφησιν ἢ ἐκπομπήν του ὑπὸ τοῦ ἠλεκτρονίου [1].

Σημειοῦται ἐνταῦθα ὅτι ἡ προηγουμένη περίπτωσις δὲν πρέπει νὰ συγχέεται

---

* Περίπτωσις TIME LIKE χώρου.

** Συμφώνως πρὸς τὸν μετασχηματισμόν:

$$\uparrow h\nu \rightleftarrows \uparrow Mc^2 + (h\nu_1 \uparrow + \downarrow h\nu_1.) - M_oc^2 = \uparrow MUc.$$

[1] L. D. Broglie, Mécanique Ondulatoire du Photon et théorie Quantique des Champs. p. 33. G. Villars 1949.

πρὸς τὴν κλασσικὴν περίπτωσιν παρατηρητῶν διαφόρου μάζης (ἡ ὁποία ὅμως μᾶζα δύναται ἀδιαφόρως νὰ μεταβληθῇ) καθ' ὅσον ἡ προηγουμένη περίπτωσις ἀφορᾷ Κβαντικὰς Γεωμετρίας [1] εἰς τὰς ὁποίας τὰ συζυγῆ μεγέθη τῆς ποσότητος κινήσεως ἐνεργείας $\left(X \frac{1}{c}\right)$ $D\mu$ καὶ τῶν συντεταγμένων X^{μ} ἀνάγονται πάντοτε εἰς τὸ αὐτὸ σωματίδιον μάζης M_o.

Σημειοῦται ὅτι τὸ φωτόνιον, ἐνῷ ἔχει χρόνον t, δὲν ἔχει χρόνον ζωῆς τ.

γ) Δοθέντος ὅτι τὰ ἠλεκτρομαγνητικὰ ἢ πυρηνικὰ φαινόμενα, εἰς ἃ εἶναι δυνατὸς ὁ προηγούμενος μετασχηματισμὸς μάζης εἰς φωτόνιον ἢ ἡ ἀπορρόφησις φωτονίου, δύνανται νὰ δικαιολογῶνται καὶ ὑπὸ Κβαντικῶν Γεωμετριῶν [2] Εὐκλειδείου τύπου ($g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} = g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$), ἕπεται ὅτι διὰ τὰ φαινόμενα ταῦτα θὰ ἰσχύωσι οἱ χωροχρονικοὶ μετασχηματισμοὶ τῆς ΕΘΣ.

Ἄλλαις λέξεσιν, ὅταν οἱ παρατηρηταὶ Α καὶ Β εὑρίσκωνται εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα (π.χ. τοῦ Α) καὶ ὁ Β εἶναι ἕτοιμος πρὸς κίνησιν, τότε ὁ παρατηρητὴς Β θεωρεῖται ἀπορροφῶν ἓν φωτόνιον (ἢ μᾶζαν μετατρεπομένην εἰς ἐνέργειαν), ὅπερ προσδίδει οὕτω τὴν κίνησιν τοῦ Β ὡς πρὸς τὸν Α μὲ ταχύτητα U. Ὅταν τοὐναντίον ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπορριφθὲν φωτόνιον, ὁ παρατηρητὴς θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ σύστημα τοῦ Α. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην πάλιν τὰς μετρήσεις τῆς ΕΘΣ.

Ἡ ἀπορρόφησις ἢ ἐκπομπὴ τῶν φωτονίων θεωρεῖται ὅτι ἐνεργεῖται σχεδὸν ἀκαριαίως, ἀφοῦ εἶναι Κβαντικῆς φύσεως. Ἐὰν δὲ ἡ ἀπορρόφησις τῶν φωτονίων γίνῃ συνεχῶς, τότε ἡ ταχύτης δύναται νὰ λάβῃ σταδιακῶς τὴν τιμὴν U_o τοῦ παραδείγματος τῆς ΕΘΣ. Συνεπῶς παράδοξον «Ὡρολόγιον» εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δὲν ὑφίσταται.

3) Ἐὰν ὑφίσταται καὶ τρίτος παρατηρητὴς Γ κινούμενος ὡς πρὸς τὸν Α μὲ ταχύτητα $-U_o$, τότε πάλιν θὰ ἰσχύωσι τὰ προηγούμενα, εἴτε ὅταν ὁ Γ ἔλθῃ εἰς τὸ σύστημα τοῦ Α ἢ ὁ Γ εἰς τὸ σύστημα τοῦ Β ἢ ὁ Β εἰς τὸ σύστημα τοῦ Α. Ἅπαντες θὰ ἔχωσι ζήσει τὸν αὐτὸν χρόνον τ, ἀλλὰ αἱ μετρήσεις ἑνὸς ἑκάστου διὰ τοὺς ἄλλους θὰ ἔχωσι τὰς γνωστὰς χωροχρονικὰς σχέσεις τῆς ΕΘΣ.

Σύγκρισις ἐξ ἄλλου τοῦ ἑνὸς παρατηρητοῦ πρὸς τοὺς δύο ἄλλους, λαμβανομένους ὡς σύνολον, δὲν δύναται νὰ γίνῃ, ἀφοῦ εἶναι ἀδύνατος ὁ συγχρονισμὸς τῶν δύο τελευταίων παρατηρητῶν, λόγῳ τῆς σχετικῆς πρὸς ἀλλήλους κινήσεώς των. Ἡ ΕΘΣ ἰσχύει, ὡς γνωστόν, μόνον διὰ *δύο* παρατηρητάς.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι οἱ δύο παρατηρηταὶ Α, Β δὲν δύνανται νὰ γίνωσι τρεῖς, ἀνήκοντες εἰς τρία διάφορα συστήματα τῆς ΕΘΣ.

---

[1] Θ. Χ. ΣΙΩΚΟΥ, Γεωμετρία καὶ Ἠλεκτρόνιον Τεχν. Χρον. Ἑλλ. τ. 391 - 392.

[2] Θ. Χ. ΣΙΩΚΟΥ, Ἡ ροπὴ ὡς συναλλοιωτικὴ παράγωγος. Τ.Χ.Ε. τ. 413 - 414.

4) Ἐκ τῶν προηγουμένων εἶναι φανερὸν ὅτι ὅταν τὸ κινοῦν πεδίον δὲν εἶναι πεδίον βαρύτητος (ἢ ἐλαστικῶν μέσων), τότε ἐφαρμόζονται τὰ προηγούμενα τῆς ΕΘΣ καὶ συνεπῶς δὲν ὑφίσταται «Παράδοξον Ὡρολόγιον».

III. ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΟΣ (ΓΘΖ).

1) Ὡς γνωστὸν τὸ πεδίον βαρύτητος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Riemann.

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx^{\mu} dx^{\nu} = -c^2 d\tau^2 \quad , \quad \mu,\nu = 1, 2, 3, 4$$

$$\sum_{\mu\nu} g^{\mu\nu}\, D_{\mu} D_{\nu} = -m_o^2 c^2 \qquad D_4 = \frac{iw}{c}, x^4 = icdt$$

$$D_{\mu} = \sum_{\lambda} g_{\lambda\mu} D^{\lambda} = \sum_{\lambda} g_{\lambda\mu} M_o \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \equiv \text{ποσότης κινήσεως} \tag{4}$$

Εἰς προηγουμένην μελέτην μου [1] ἐξητάσθη ἡ περίπτωσις τῆς (4) εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν τοῦ χώρου X^1, X^4 καὶ τῆς (5) περιπτώσεως (δυναμένης νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν ὁμογενοῦς πεδίου βαρύτητος).

$$g_{11}\, g_{44} = 1 \quad , \quad g_{14} = 0 \tag{5}$$

2) Εἰς τὴν ΓΘΣ ὑφίσταται ἡ Ἀρχὴ τοῦ Ἰσοδυνάμου: ὁ πίπτων «παρατηρητὴς» ὑπὸ τὴν ἐπήρειαν τοῦ πεδίου βαρύτητος θεωρεῖ τὸν ἑαυτόν του ὡς ἀνήκοντα εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ (Β) σύστημα συντεταγμένων τῆς ΕΘΣ· Μία δικαιολογία τῆς Ἀρχῆς τοῦ Ἰσοδυνάμου δύναται νὰ δοθῇ, ἐὰν θεωρήσωμεν ὅτι εἰς τὸ πεδίον βαρύτητος παρεμβάλλεται τὸ πεδίον δυνάμεων D. Alembert (6), ὅπερ ἐξουδετερώνει τὸ πεδίον βαρύτητος.

$$\frac{dDi}{d\tau} = -\sum_{\lambda\nu} \Gamma^{\nu}_{\lambda}\, D_{\nu} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau}, \; i, \lambda,\nu = 1, 2, 3, 4. \tag{6}$$

3) Ὁμοίως εἶναι γνωστὸν ὅτι εἰς τὴν Μηχανικὴν ὑφίσταται ἡ *Ἀρχὴ τῆς δράσεως καὶ ἀντιδράσεως*. Συνεπῶς θὰ πρέπῃ διάφοροι παρατηρηταί, ἐν σχετικῇ ἀκινησίᾳ καὶ εἰς σημεῖα ἀδιαφόρου στάθμης εὑρισκόμενοι πρὸς ἀλλήλους μέσῳ τῶν δυνάμεων τῶν προερχομένων ἐκ τῶν σημείων ἑδράσεώς των, νὰ θεωροῦνται ὡς παρατηρηταὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ συστήματος (Α) τῆς ΕΘΣ, δηλαδὴ ἡ περίπτωσις ὁμοιάζει πρὸς τὴν προηγουμένην τῆς Ἀρχῆς τοῦ ἰσοδυνάμου, ἐὰν ἀντικατασταθῇ τὸ πεδίον τῶν δυνάμεων D Alemberd διὰ τοῦ πεδίου τῶν δυνάμεων Ἀντιδράσεως (τῶν σημείων ἑδράσεως).

4) Συνεπῶς οἱ παρατηρηταὶ Α καὶ Β θὰ ζῶσι τὸν αὐτὸν χρόνον Τ, ὅστις θὰ ταυτίζεται δι' ἕκαστον μὲν ἐξ αὐτῶν πρὸς τὸν συναλλοιωτικὸν καὶ ἀντισυναλλοιωτι-

---

[1] Θ. Χ. ΣΙΩΚΟΥ, Ἡ ῥοπὴ ὡς συναλλοιωτικὴ παράγωγος. Ἔνθ' ἀν.

κὸν πραγματικὸν χρόνον Τ, τῆς ΕΘΣ θὰ βλέπῃ δὲ ὁ εἷς παρατηρητὴς τὸν ἄλλον μετὰ τὰς αὐτὰς χωροχρονικὰς σχέσεις τῆς ΓΘΣ, αἱ ὁποῖαι ὅμως ἐνταῦθα εἶναι διάφοροι διὰ τὰ συναλλοιωτικὰ καὶ ἀντισυναλλοιωτικὰ μεγέθη. Τοῦτο δέ, διότι δι' ἀλλαγῆς τῶν πεδίων (ἐξουδετερώσεως τοῦ πεδίου βαρύτητος) ἐναλλάσσονται αἱ κινηματικαὶ θέσεις τῶν παρατηρητῶν.

Εἰς προηγουμένας μελέτας μου[1] ἐδείχθησαν αἱ χωροχρονικαὶ σχέσεις τῆς ΓΘΣ διὰ τὴν ἀνωτέρω ἀναφερθεῖσαν εἰδικὴν περίπτωσιν.

5) Συνεπῶς ὅταν εἷς παρατηρητὴς ἔλθῃ εἰς τὸ σύστημα συντεταγμένων τοῦ ἑτέρου παρατηρητοῦ, τότε θὰ διαπιστωθῇ ὅτι ἔχουν ζήσει τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα καὶ ὅτι θὰ λέγωσι τοὺς αὐτοὺς χωροχρονικοὺς μετασχηματισμοὺς ὁ εἷς διὰ τὸν ἄλλον διὰ τὴν περίοδον τῆς κινήσεώς των. Οὕτω Παράδοξον Ὡρολόγιον καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τῆς ΓΘΣ δὲν ὑφίσταται.

IV. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ - ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ.

1) Συμπέρασμα ἐκ τῶν προηγουμένων εἶναι ὅτι «παράδοξον ὡρολόγιον» δὲν ὑφίσταται τόσον εἰς τὸ πεδίον βαρύτητος ὅσον καὶ εἰς τὰ λοιπὰ πεδία τὰ προκαλοῦντα τὴν κίνησιν τῶν παρατηρητῶν. Οὗτοι θὰ ἔχωσι ζήσει τὸν αὐτὸν χρόνον (Τ), ἐρχόμενοι εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σύστημα συντεταγμένων, ἔχοντες ἐν ταὐτῷ ὁ εἷς διὰ τὸν ἄλλον τὰς αὐτὰς χωροχρονικὰς σχέσεις διὰ τὴν χρονικὴν περίοδον τῆς σχετικῆς κινήσεώς των.

2) Ἡ διαφορὰ τοῦ πεδίου βαρύτητος πρὸς τὰ λοιπὰ εἴδη κινήσεως συνίσταται εἰς τὸ ὅτι:

α) ὑπάρχει διαφορὰ συναλλοιωτικῶν καὶ ἀντισυναλλοιωτικῶν μετρήσεων τοῦ ἑνὸς παρατηρητοῦ ὡς πρὸς τὸν ἄλλον κατὰ τὴν σχετικὴν κίνησίν των, εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ πεδίου βαρύτητος.

β) ἡ ἐνέργεια τοῦ ἑνὸς παρατηρητοῦ ὁρωμένη ὑπὸ τοῦ ἄλλου εἶναι σταθερὰ διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ Στατικοῦ πεδίου βαρύτητος καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς διαδρομῆς, ἐνῷ εἰς τὰ λοιπὰ πεδία ἡ μεταβολὴ τῆς κινήσεως γίνεται διὰ μεταβολῆς τῆς ἐνεργείας βάσει τῶν Κβαντικῶν Ἀντιλήψεων.

γ) εἰς τὴν περίπτωσιν ὑπάρξεως «Παραδόξου ὡρολογίου» θὰ ἔπρεπεν, ὡς δεικνύει ἡ προηγουμένη ἀνάλυσις, ἀμφότεραι αἱ ἀρχαὶ τῆς Δράσεως - Ἀντιδράσεως καὶ Ἰσοδυνάμου νὰ μὴ ἰσχύουν, ὁπότε καὶ θὰ ἦτο ἀδύνατος ὁ προσδιορισμὸς τῶν χωροχρονικῶν διαστάσεων εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σύστημα Συντεταγμένων.

3) Ὡς ἀνεφέρθη προηγουμένως τὸ φωτόνιον (καὶ ἐν γένει σωματίδιον συστροφῆς 1) ἔχει «μηδενικὴν κατάστασιν», ἥτις ἐπιτρέπει νὰ προσδίδῃ (ἢ νὰ ἀφαιρῇ) τὴν ἐνέργειαν καὶ τὴν ποσότητα κινήσεώς του. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ παρατηρητὴς Β, ἐὰν

[1] Βλέπ. ἀνωτ. εἰς σελ. 242 ὑποσημ. ὑπ' ἀρ. 1 καὶ 2.

ἀποδειχθῇ ὅτι ἔχει οὗτος ἀπορροφήσει τὸ φωτόνιον, θὰ κινηθῇ μὲ ταχύτητα U ὡς πρὸς τὸν A, ὑφιστάμενος μίαν Κβαντικὴν παραμόρφωσιν.

Ἡ παραμόρφωσις ὅμως αὕτη εἶναι τοιαύτης φύσεως, ὥστε αἱ μετρήσεις τῶν δύο παρατηρητῶν πρὸς ἀλλήλους νὰ ἀκολουθοῦν τοὺς χωροχρονικοὺς μετασχηματισμοὺς τῆς ΕΘΣ, ἥτις ἀπαιτεῖ δι' ὅλους τοὺς παρατηρητὰς τὴν αὐτὴν ταχύτητα C διὰ τὰ φωτόνια.

Ἄλλαις λέξεσι μακροσκοπικῶς τὰ ὄργανα μετρήσεων τῶν παρατηρητῶν A καὶ B παραμένουσι τὰ αὐτά.

Διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς ΓΘΣ, ἥτις ἀκολουθεῖ τὴν Γεωμετρίαν Riemann, αἱ παραμορφώσεις τῶν παρατηρητῶν A καὶ B, λόγῳ τῆς ἐπιδράσεως τῶν πεδίων Δράσεως-Ἀντιδράσεως καὶ D Alembert εἶναι τοιαῦται, ὥστε τὰ ὄργανα μετρήσεώς των νὰ μένωσι τὰ αὐτά, ἀλλ' αἱ παρατηρήσεις τῶν A, B πρὸς τοὺς B, A νὰ ἀκολουθῶσι τοὺς αὐτοὺς χωροχρονικοὺς μετασχηματισμοὺς τῆς ΓΘΣ.

4) Ἐνταῦθα δυνάμεθα νὰ κάμωμεν τὴν κάτωθι *σπουδαίαν παρατήρησιν*. Προηγουμένως[1] ἀνεφέρθη ὅτι παρατηρηταὶ A', A'' ἑδραζόμενοι εἰς διαφόρους στάθμας ἀνήκουσιν εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ σύστημα συντεταγμένων A τῆς ΕΘΣ καὶ μηδενικῆς Στάθμης καθοριζομένης ἀναλόγως τοῦ πειράματος.

Ἡ παραδοχὴ αὕτη προϋποθέτει ὅτι αἱ ἐνέργειαι τῶν παρατηρητῶν A', A'', αἵτινες κατεβλήθησαν, ἵνα οὗτοι λάβωσι τὰς θέσεις A' A' ἀπεταμιεύθησαν εἰς τὸ σύστημα ἑδράσεως, τῶν παρατηρητῶν θεωρουμένων πλέον ἄνευ αὐτῆς τῆς ἐνεργείας. Δηλαδὴ ἡ ἐνέργεια αὕτη θεωρεῖται ἔχουσα τὴν ἰδιότητα «Μηδενισμοῦ καταστάσεων» τῶν Φωτονίων καὶ ἀποδίδεται κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ σημείου ἑδράσεως εἰς τὸν πίπτοντα παρατηρητήν.

Δὲν πρέπει νὰ μᾶς διαφεύγῃ ὅτι ἡ ΓΘΣ ἰσχύει διὰ δύο παρατηρητὰς τῆς αὐτῆς μάζης ἐν ἠρεμίᾳ καὶ τοῦτο δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ διὰ τῆς ἄνω παραδοχῆς. Ἡ παραδοχὴ αὕτη ἐξ ἄλλου ἐπιβάλλεται καὶ ἐκ τῆς ἀρχῆς τῆς Δράσεως καὶ Ἀντιδράσεως, ἥτις ἐπιβάλλει οἱ παρατηρηταὶ οἱ ἑδραζόμενοι, νὰ μὴ ἔχωσι διαφόρους μετρήσεις πρὸς ἀλλήλους. Ὅπως δὲ εἰς τὴν ΕΘΣ ἡ ταχύτης C τῶν φωτονίων δι' ὅλους τοὺς παρατηρητὰς ἐπιβάλλει τὴν «κατάστασιν μηδενισμοῦ», οὕτω καὶ ἐνταῦθα ἡ Γεωμετρία τοῦ φωτονίου (7), εὑρισκομένου εἰς διαφορὰν στάθμης h ἀπὸ τὸν ἑδραζόμενον (h ἐντὸς ὁμογενοῦς πεδίου).

$$g_{11}\, dx_A^{1^2} + g_{44}\, dx_A^{4^2} = 0 \qquad g_{44} = 1 + \frac{2gh}{C^2} \qquad (7)$$

$$g_{11}\, g_{44} = 1 \qquad dx^4 = icdt$$

[1] Βλ. ἀνωτ. σ. 242 σημ. 2.

παρατηρητὴν Α ἐπιβάλλει τὴν παρομοίαν «κατάστασιν Μηδενισμοῦ» κατὰ τὴν ἕδρασιν τοῦ παρατηρητοῦ Α.

Οὕτω τὰ ὄργανα μετρήσεως δι' ὅλους τοὺς ἑδραζομένους παρατηρητὰς εἶναι τὰ αὐτά, ἀφοῦ διὰ τὸ ἴδιόν των σύστημα ἡ ταχύτης τῶν φωτονίων εἶναι C καὶ συνεπῶς «Παράδοξον Ὡρολόγιον» δὲν ὑφίσταται. Ὑφίστανται «Παράδοξοι μετρήσεις» παρατηρητῶν διαφόρου *κινηματικῆς* καταστάσεως, λόγῳ τῆς ἰδιότητος τῶν φωτονίων νὰ ἔχωσι μηδενικὰς καταστάσεις καὶ Γεωμετρίαν ὡς ἡ (6).,

5) Κατόπιν τῶν προηγουμένων, ἕπεται ὅτι φυσικώτερον καὶ μᾶλλον σύμφωνον πρὸς τὴν Γενικὴν ἰδέαν τῆς Σχετικότητος, εἶναι νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι αἱ δυναμικαὶ ἐνέργειαι τῶν παρατηρητῶν Α΄, Α″ αἱ καταβληθεῖσαι διὰ τὴν κατάληψιν τῆς θέσεώς των, οὖσαι ἐν μηδενικῇ καταστάσει, συνιστῶσι μίαν μόνην «μηδενικὴν κατάστασιν» τοῦ συνόλου τῶν Α′ Α″ μετὰ τῶν ἀντιθέτων ἐνεργειῶν τοῦ πεδίου ἀντιδράσεως, μὲ τὴν ἰδιότητα:

α) Οἱ παρατηρηταὶ Α′, Α″ νὰ ἀνήκωσιν εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα συντεταγμένων. Τοῦτο δύναται νὰ δικαιολογηθῇ ἐκ τοῦ ὅτι, λόγῳ τοῦ πεδίου ἀντιδράσεως ἔχομεν $g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$ (ἀφοῦ ἀπαγορεύεται πᾶσα σχετικὴ μεταξύ των κίνησις) δι' ἅπαντας τοὺς Α΄, Α″ καὶ ἡ ἐνέργεια ὅλων ἔχει μόνον «μίαν μηδενικὴν κατάστασιν».

β) Κατὰ τὴν πτῶσιν ἑνὸς Α, ἀποδίδεται εἰς αὐτὸν ἡ ἰδία του «μηδενικῆς καταστάσεως» ἐνέργεια (ἐν σχέσει πρὸς τοὺς λοιποὺς) μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς ἴσης καὶ ἀντιθέτου ἐνεργείας ἀντιδράσεως.

γ) Αἱ παρατηρήσεις μεταξὺ τῶν Α καὶ Β δίδονται διὰ τὸ ὁμογενὲς στατικὸν πεδίον λόγῳ τῆς Γεωμετρίας (7) τοῦ Φωτονίου, ὑπὸ τῆς (8), κατὰ τὴν ἐλευθέραν πτῶσιν τοῦ Β.

$$dx^6_A = \left(1 - \frac{gh_o}{c^2}\right) dx_B \qquad dt^6_A = \left(1 + \frac{gh_o}{c^2}\right) dt_B \;,\; g^2h^2 : c^4 \triangleq 0 \qquad (8)$$

$$dx^1_A = g^{11} dx^6_A = \left(1 + \frac{2gh}{c^2}\right) dx^6_A \;,\; dt_A = g^{44}\, dt^6_A = \left(1 - \frac{2gh}{c^2}\right) dt^6_A \quad (8)$$

σ = συναλλοιωτικὸν μέγεθος· h_o μεγίστη διαφορὰ στάθμης τῶν Α, Β. Εἶναι προφανὲς ὅτι ὅταν οἱ Α Β πλησιάζωσιν, ἔχομεν $+h$ καὶ ὅταν ἀπομακρύνωνται ἀλλήλων $-h$, Τοὺς αὐτοὺς τύπους ἔχομεν καὶ διὰ τὰς παρατηρήσεις τοῦ Β ἐπὶ τῶν παρατηρήσεων τοῦ Α, μὲ ἐναλλαγὴν τῶν γραμμάτων Α, Β λόγῳ τῆς ἐναλλαγῆς τῶν πεδίων Δράσεως - Ἀντιδράσεως καὶ D' Almbert.

6) Λόγῳ τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν πειραμάτων μεταξὺ Α, Β ἔχομεν τὴν ψευδῆ ἐντύπωσιν ὅτι ὑφίσταται διαφορὰ μετρήσεων μεταξὺ Α΄, Α″ καὶ οὕτω παρουσιάζεται τὸ «Παράδοξον Ὡρολόγιον».

7) Ἡ προηγουμένη θεωρία δύναται νὰ δικαιωθῇ καὶ ἐκ τοῦ ὅτι: ἀφοῦ ἡ ΕΘΣ

εἶναι ὁριακὴ περίπτωσις τῆς ΓΘΣ, ἕπεται ὅτι ὅταν ὑφίσταται «Παράδοξον Φαινόμενον» ἐν τῇ ΓΘΣ, θὰ ὑφίσταται παρομοίως καὶ εἰς τὴν ὁριακὴν περίπτωσιν, δοθέντος ὅτι κατὰ βάσιν τὰ φαινόμενα τοῦ κόσμου ἀκολουθοῦσι Κβαντικὰς Γεωμετρίας, δυναμένας νὰ ἰσχύωσι καὶ εἰς τὴν ΕΘΣ [1], ἐφ' ὅσον δὲ δὲν ὑφίσταται ἐν τῇ ΕΘΣ, ὡς προηγουμένως ἐξηγήθη, δὲν ὑφίσταται παρομοίως καὶ ἐν τῇ ΓΘΣ «Παράδοξον Ὡρολόγιον».

Σημειωτέον ἐνταῦθα ὅτι: ἡ ἰδιότης τοῦ Φωτονίου καὶ τοῦ Ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου, τοῦ νὰ ἔχωσιν ἀμεταβλήτους τὰς ἐξισώσεις των εἰς τοὺς μεταχηματισμοὺς τῆς ΕΘΣ (Lorenz), δηλαδὴ ἡ ἰδιότης Κβαντικῶν Σωματιδίων εἶναι ἡ προκαλέσασα τὴν ΕΘΣ καὶ κατ' ἐπέκτασιν τὴν ΓΘΣ.

8) Οὕτω ἐν συμπεράσματι οἱ τύποι (1), (8) ἰσχύουσι μόνον διὰ παρατηρητάς, ὧν μεταβάλλεται ἡ μεταξύ των ἀπόστασις ἢ γενικῶς ὅταν μεταβάλλεται ἡ κινηματικὴ αὐτῶν κατάστασις.

[1] Θ. Χ. ΣΙΩΚΟΥ, Ἡ ῥοπὴ ὡς συναλλοιωτικὴ παράγωγος. Ἔνθ' ἀν.