ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 9ΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 1977

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΠΕΤΡΟΥ ΧΑΡΗ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— **Sur trois types de congruences de droites, pourvues d'une même propriété,** *par Othon Pylarinos**.

RÉSUMÉ

Dans le présent article-consacré à la recherche des congruences de droites réelles, non isotropes, à surface moyenne courbe de l'espace euclidien habituel, E^3, les surfaces reglées engendrées par les droites de chacune desquelles à paramètre distributeur, p, constant —le même sur toutes ces surfaces— déterminent sur sa surface moyenne un réseau conjugué, quelle que soit la valeur constante de p, après un exposé préliminaire, il est démontré que : 1°. Les congruences de normales, dont chacune est à la fois une congruence de RIBAUCOUR ayant son enveloppée moyenne comme surface génératrice, jouissent de la propriété qui vient d'être signalée et en outre que le problème de la détermination des congruences de ce type peut se ramener au problème de la détermination des fonctions d'une seule variable satisfaisant à une équation differentielle du second ordre dont l'intégration se ramène à des quadratures.— 2°.—Les congruences hyperboliques, les droites de chacune desquelles établissent une représentation isométrique de ses nappes focales, l'une sur l'autre, jouissent également de la propriété signalée et en outre que les paramètres distributeurs principaux, p_1, p_2, d'une congruence de ce

* ΟΘ. ΠΥΛΑΡΙΝΟΥ, **Περὶ τριῶν τύπων εὐθειογενῶν σμηνῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα.**

type sont liés, si aucun d'eux n'est constant, par une relation qui n'est pas arbitraire, car l'un des paramètres p_1, p_2 d'une congruence de ce type considéré comme fonction de l'autre doit satisfaire à une équation différentielle du second ordre, qui par rapport aux dérivées de cette fonction est une équation algébrique dont les coefficients sont des polynômes en p_1, p_2, à coefficients numériques et 3°.—Une congruence parabolique jouit de la propriété signalée si — et seulement si — les lignes asymptotiques de sa nappe focale unique, auxquelles les droites qui engendrent la congruence sont tangentes, sont des courbes à torsion constante.

1. La congruence rectiligne C de E^3, à laquelle se rapportent les considérations suivantes, est, par hypothèse, une congruence de droites réelles *non isotrope* qui par rapport au système des coordonnées Oxyz, choisi comme système de référence fixe dans l'espace E^3, est définie par l'équation vectorielle :

$$\bar{R} = \bar{r}(u, v) + \theta \bar{l}(u, v), * \tag{1, 1}$$

où $\bar{l}(u, v)$ est le vecteur-unité qui détermine le sens positif sur la direction de la génératrice courante $g(u, v)$ de C, θ est le paramètre, aux valeurs duquel correspondent les points de la droite g et $\bar{r}(u, v)$ est le second membre de l'équation vectorielle

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \tag{1, 2}$$

par rapport au système Oxyz de la *surface directrice* S de la congruence, sur laquelle on a $\theta = 0$.

Les *paramètres distributeurs principaux*, p_1, p_2, de C (dont les valeurs sur sa génératrice courante g sont les extrema des valeurs du paramètre distributeur p sur g des surfaces engendrées par les droites de C issues de g), sont des fonctions des variables u, v, aux couples de valeurs des-

---

* On suppose que les fonctions $\bar{r}(u, v)$, $\bar{l}(u, v)$ ainsi que toute autre fonction vectorielle ou scalaire des u, v, qui figure dans cet article, soient pourvues des dérivées par rapport à u et à v jusqu'à l'ordre trois inclu finies et continues pour tous les couples de valeurs des u, v dans les intervalles considérés et, si f est une fonction des u, v, on désigne par $f_{u^i v^j}$ la dérivée de f de l'ordre i par rapport à u et de l'ordre j par rapport à v.

quelles dans des intervalles déterminés correspondent les droites de la congruence, qui sont distinctes, puisque C n'est pas isotrope et, cela étant, chaque droite de C est la génératrice commune à deux surfaces engendrées par des droites de C, les paramètres distributeurs desquelles sur elle sont respectivement égaux aux valeurs des fonctions $p_1(u, v)$, $p_2(u, v)$ pour les valeurs des u, v, auxquelles cette droite de C correspond.

Les surfaces reglées engendrées par les droites de la congruence (non isotrope) C ayant la propriété signalée constituent deux systèmes distincts de ∞^1 surfaces réelles dont les images, dans la représentation habituelle de la congruence sur la surface de la sphère - unité - ayant l'origine O du système Oxyz comme centre sont des courbes tracées sur l'image sphérique Σ de C (décrite par l'extrémité du vecteur $\boldsymbol{l}(u, v)$ mené du point O), qui forment un réseau orthogonal [**2**, p. 204] et, dans ce qui suit, on suppose que les variables u, v, aux couples de valeurs desquelles correspondent les droites de C, aient été choisies de manière que les surfaces $v = \mathrm{Cte}$, $u = \mathrm{Cte}$ engendrées par les droites de C soient les surfaces appartenant à ces deux systèmes, appelées *surfaces distributrices principales de la congruence.*

S'il en est ainsi et que l'on désigne par $\bar{t}(u, v)$, $\bar{g}(u, v)$ les vecteurs - unités qui au point courant de l'image sphérique Σ de C déterminent les sens positifs sur les directions des tangentes aux courbes $v = \mathrm{Cte}$, $u = \mathrm{Cte}$ tracées sur la surface Σ et issues de ce point, d'après les suppositions faites, on aura

$$(1, 3) \qquad \bar{t}^2 = \bar{g}^2 = \boldsymbol{l}^2 = 1, \quad \bar{t} \times \bar{g} = \bar{g} \times \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l} \times \bar{t} = 0, \quad \bar{t} \wedge \bar{g} = \varepsilon \boldsymbol{l},^*$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 et on peut toujours choisir les sens positifs sur les directions de ces tangentes de manière que l'on ait

$$(1, 4) \qquad \bar{t} \wedge \bar{g} = \boldsymbol{l}.$$

En outre en tenant compte du fait que les dérivées $\boldsymbol{l}_u$, $\boldsymbol{l}_v$ du vecteur $\boldsymbol{l}(u, v)$ pour les valeurs des u, v, auxquelles correspond le point courant de l'image sphérique Σ de C, sont respectivement parallèlles aux tan-

---

* Les notations $\bar{t} \times \bar{g}$, $\bar{t} \wedge \bar{g}$ désignent les produits, scalaire et vectoriel, des vecteurs $\bar{t}$, $\bar{g}$ respectivement.

gentes aux courbes $v = Cte$, $u = Cte$ issues de ce point, on peut poser

$$(1, 5) \qquad \bar{l}_u = a\bar{t}, \quad \bar{l}_v = b\bar{g}$$

les scalaires a, b, que ces formules renferment, étant des fonctions des u, v satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$(1, 6) \qquad \left[\frac{b_u}{a}\right]_u + \left[\frac{a_v}{b}\right]_v + ab = 0$$

qui exprime que la surface (sphérique) Σ, le carré de l'élément linéaire de laquelle, en vertu des (1, 3) et (1, 5), est de la forme

$$(1, 7) \qquad d\sigma^2 = a^2du^2 + b^2dv^2,$$

est une surface à courbure totale constante $= +1$.

Les vecteurs $\bar{t}$, $\bar{g}$, $\bar{l}$ sont des fonctions des u, v, qui vérifient en plus avec les fonctions scalaires a, b des u, v, comme on le constate aisément en ayant égard aux (1, 3), (1, 4) et (1, 5), les équations

$$(1, 8) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{t}_u = -\dfrac{a_u}{b}\bar{g} - a\bar{l}, & \bar{t}_v = \dfrac{b_u}{a}\bar{g}, \\ \bar{g}_u = \dfrac{a_v}{b}\bar{t}, & \bar{g}_v = -\dfrac{b_u}{a}\bar{t} - b\bar{l} \end{array} \right.$$

et la vérification par les fonctions a, b des u, v de l'équation (1, 7) exprime en outre la condition de compatibilité des deux premières ainsi que des deux dernières équations (1,8) [**3**, p. 7].

Par ailleurs, d'après la supposition faite concernant les variables u, v, les vecteurs, $\bar{t}$, $\bar{g}$, $\bar{l}$ forment un système trisorthogonal pour chaque couple de valeurs des u, v dans les intervalles considérés; cela étant, les dérivés $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (1, 2) de la surface directrice S de C peuvent s'écrire sous la forme

$$(1, 9) \qquad \bar{r}_u = t_1\bar{t} + g_1\bar{g} + l_1\bar{l}, \quad \bar{r}_v = t_2\bar{t} + g_2\bar{g} + l_2\bar{l}$$

et, comme ces deux équations, à condition qu'elles soient compatibles, déterminent la surface S à une translation près par rapport au système de référence Oxyz, on peut admettre, dans l'étude qui suit — consacrée à la recherche des propriétés intrinsèques à la congruence considérée — que sa surface directrice S est définie par rapport au système Oxyz soit par l'équation (1, 2) soit par deux équations compatibles de la forme (1, 9) indifférement.

2. Si en particulier la surface S qui a été choisie comme directrice de la congruence considérée C, est sa *surface moyenne* et que les surfaces $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ engendrées par les droites de C — qui, par hypothèse, n'est pas isotrope — soient ses surfaces distributrices principales, les équations (1, 9) qui, à condition qu'elles soient compatibles, déterminent S à une translation près par rapport au système Oxyz, acquièrent la forme

$$(2, 1) \qquad \bar{r}_u = ap_1\bar{g} + l_1\boldsymbol{l}, \qquad \bar{r}_v = -bp_2\bar{t} + l_2\boldsymbol{l}$$

et, pour que ces deux équations soient compatibles, il faut et il suffit, comme on le constate aisément en ayant égard aux (1, 5) et (1, 6) [**4**, p. 165], que les scalaires l_1, l_2, qui y figurent, soient des fonctions des u, v vérifiant avec a (u, v), b (u, v) et les paramètres distributeurs principaux $p_1(u, v)$, $p_2(u, v)$ de C les trois équations aux dérivées partielles :

$$(2, 2) \qquad \begin{gathered} p_{1v} = -(p_1 - p_2)\frac{a_v}{a} - l_1\frac{b}{a}, \qquad p_{2u} = (p_1 - p_2)\frac{b_u}{b} + l_2\frac{a}{b}, \\ l_{1v} - l_{2u} = ab\,(p_1 + p_2). \end{gathered}$$

Dans ce cas particulier les valeurs θ_1, θ_2 du paramètre θ, que l'équation (1, 1) de C renferme, auxquelles correspondent les points focaux de la génératrice courante g de C, sont les racines du polynôme en θ, $\theta^2 + p_1p_2$, auquel se ramène le polynôme $ab\theta^2 + \{at_1 + bg_2\}\theta + t_1g_2 - t_2g_1$, aux racines duquel correspondent ces deux points de g dans le cas plus général où la surface directrice S est définie par les équations (1, 9) [**3**, p. 9] : par conséquent ces deux valeurs de θ sont :

$$(2, 3) \qquad \theta_{1,2} = \pm\sqrt{-p_1p_2}\,.$$

De là résulte, eu égard au fait que la nappe focale unique d'une congruence parabolique non isotrope est à la fois sa surface moyenne, que la congruence non isotrope C, sur la surface moyenne de laquelle, dans le cas envisagé, on a $\theta = 0$, n'est parabolique que si — et seulement si — un seul de ses paramètres distributeurs principaux, p_1, p_2, est $\equiv 0$. Donc, si la congruence C n'est pas parabolique, p_1, p_2 sont nécessairement tous les deux $\not\equiv 0$:

$$(2, 4) \qquad p_1 \not\equiv 0\,, \qquad p_2 \not\equiv 0\,.$$

Par ailleurs, dans ce même cas, l'équation vectorielle par rapport au système Oxyz de l'enveloppée moyenne S′ de C (enveloppe des plans médiateurs des segments focaux des droites de C) peut s'écrire sous la forme

$$(2,5) \qquad \bar{r}' = \bar{r}(u,v) + \frac{l_1}{a}\bar{t} + \frac{l_2}{b}\bar{g},$$

où $\bar{r}(u,v)$ est le second membre de l'équation (1,2) de la surface directrice S de C, qui, par hypothèse, est sa surface moyenne et l_1, l_2, a, b sont les fonctions scalaires des u, v, qui figurent dans les équations (2,1) [**4**, p. 181].

Les surfaces S′, S, si l_1, l_2 ne sont pas tous les deux $\equiv 0$, sont distinctes et, d'après la définition de l'enveloppée moyenne S′, elles sont représentées, l'une sur l'autre, de manière que le point de S′ homologue du point courant de S soit le point de contact de S′ avec le plan perpedinculaire en ce point de S à la droite de C issue de ce même point; par suite, dans cette représentation, dans laquelle, dans le cas envisagé, deux points homologues des surfaces S, S′ correspondent au même couple de valeurs des u, v, la droite de C issue de chaque point de S est parallèle à la normale à S′ en son point homologue de ce point de S.

En outre, d'après la troisième équation (2,2), compte tenu du fait que la nullité du premier membre, $l_{1v} - l_{2u}$, de cette équation est une condition nécessaire et suffisante, afin que la congruence C dont la surface directrice S est définie à une translation près par deux équation de la forme (1,9), soit une congruence de normales, [**3**, p. 8], la congruence non isotrope C n'est une congruence de normales que si- et seulement si- l'on a :

$$(2,6) \qquad p_1 + p_2 = 0.$$

Or, si la congruence non isotrope C est une congruence de normales, ses paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 (étant tous les deux $\neq 0$) seront liés par la relation (2,6) et, si l'on pose

$$(2,7) \qquad p_1 = -p_2 \equiv p(u,v),$$

les équations (2,1) deviennent

$$(2,8) \qquad \bar{r}_u = ap\bar{g} + l_1\bar{l}, \qquad \bar{r}_v = bp\bar{t} + l_2\bar{l},$$

tandis que les équations (2, 2) peuvent s'écrire sous la forme

$$(2,9)\qquad \frac{p_v}{p} = -2\frac{a_v}{a} - \frac{l_1 b}{pa}, \quad \frac{p_u}{p} = -2\frac{b_u}{b} - \frac{l_2 a}{pb}, \quad l_{1v} - l_{2u} = 0.$$

Enfin, si la congruence non isotrope C dont la surface moyenne S est définie à une translation près par les équations (2, 1) n'est pas parabolique, une condition nécessaire et suffisante, afin que C soit une congruence de RIBAUCOUR, est que l'équation

$$(2,10)\qquad \left[\frac{l_1 b}{p_1 a}\right]_u + \left[\frac{l_2 a}{p_2 b}\right]_v = 0$$

soit verifiée par les fonctions scalaires a, b, p_1, p_2, l_1, l_2 des u, v, qui figurent dans les équations (2,1) et vérifient les équations (2, 2) [4, p. 168].

Si la condition (2, 10) est remplie, pour toute fonction $\varrho(u, v)$ satisfaisant aux deux équations

$$(2,11)\qquad \frac{\varrho_u}{\varrho} = \frac{l_2 a}{p_2 b}, \quad \frac{\varrho_v}{\varrho} = -\frac{l_1 b}{p_1 a}$$

qui, en vertu de (2, 10) sont compatibles, les deux équations

$$(2,12)\qquad \bar{r}'_u = \varrho a p_1 \bar{t}, \quad \bar{r}'_v = \varrho b p_2 \bar{g}$$

sont également compatibles et déterminent à une translation près par rapport au système de référence Oxyz une *surface génératrice* de la congruence [4, p. 168].

La condition (2, 10), en cas que la congruence non isotrope C soit une congruence de normales, en vertu des (2, 7) devient

$$(2,13)\qquad \left[\frac{l_1 b}{pa}\right]_u = \left[\frac{l_2 a}{pb}\right]_v$$

et, d'après les deux premières équations (2, 9), pour que la condition (2, 13) soit remplie, il faut et il suffit que les fonctions scalaires a, b des u, v, qui figurent dans les formules (1, 3) et dans l'expression (1, 7) du carré de l'élément linéaire de l'image sphérique Σ de C, vérifie l'équation

$$(2,14)\qquad \frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \frac{a}{b} = 0.$$

Mais la condition (2, 14) n'est remplie que dans le seul cas où le réseau formé par les courbes $v = Cte$, $u = Cte$ tracées sur la surface de la sphère - unité, qui, dans la représentation de la congruence sur cette surface, sont les images de ses surfaces distributrices principales, est un réseau isotherme.

Donc, afin qu'une congruence de normales non isotrope soit une congruence normale de RIBAUCOUR, il faut et il suffit que les images sur la surface de la sphère - unité des surfaces distributrices principales de la congruence, dans sa représentation sphérique, forment un réseau isotherme.

Il en résulte que, dans le cas où la congruence non isotrope C est une congruence normale de RIBAUCOUR, les variables u, v, aux couples de valeurs desquelles correspondent ses droites, peuvent être choisies de manière que, les surfaces $v = Cte$, $u = Cte$ étant ses surfaces distributrices principales, dans les formules (1, 3) on ait

$$a = b = \lambda, \tag{2, 15}$$

le scalaire λ étant une fonction des u, v, qui doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u + \left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v + \lambda^2 = 0, \tag{2, 16}$$

à laquelle, grâce aux (2, 15), se ramène l'équation (1, 6).

Cela étant, les équations (2, 8), (2, 9) acquièrent la forme

$$\bar{r}_u = \lambda p \bar{g} + l_1 \bar{l}, \qquad \bar{r}_v = \lambda p \bar{t} + l_2 \bar{l}, \tag{2, 17}$$

$$\frac{p_u}{p} = -2\frac{\lambda_u}{\lambda} - \frac{l_2}{p}, \qquad \frac{p_v}{p} = -2\frac{\lambda_v}{\lambda} - \frac{l_1}{p}, \qquad l_{1v} - l_{2u} = 0 \tag{2, 18}$$

respectivement et la condition (2, 13), qui est nécessairement remplie et, grâce aux (2, 15), devient

$$\left(\frac{l_1}{p}\right)_u = \left(\frac{l_2}{p}\right)_v, \tag{2, 19}$$

montre que $\frac{l_1}{p}$, $\frac{l_2}{p}$ sont les dérivées par rapport à v et à u respectivement d'une même fonction des u, v, $f(u, v)$:

$$l_1 = p f_v, \qquad l_2 = p f_u. \tag{2, 20}$$

La fonction $f(u, v)$, d'après les deux premières équations (2, 18), est liée avec les fonctions λ et p des u, v par une relation de la forme

$$p\lambda^2 = c' e^{-f}, \tag{2, 21}$$

où c' est une constante $\neq 0$.

En outre, grâce aux (2, 7), (2, 15) et (2, 21), les équations (2, 12) qui déterminent à une translation près une surface génératrice de la congruence, lorsque la fonction $\varrho(u, v)$, qui y figure, vérifie les deux équations (2, 11), prennent la forme

$$\bar{r}'_u = c' \frac{e^{-f}}{\lambda} \varrho \bar{t}, \qquad \bar{r}'_v = - c' \frac{e^{-f}}{\lambda} \varrho \bar{g}, \tag{2, 22}$$

tandis que des deux équations :

$$\frac{\varrho_u}{\varrho} = f_u, \qquad \frac{\varrho_v}{\varrho} = f_v, \tag{2, 23}$$

auxquelles, dans le cas envisagé, les équations (2, 11) se ramènent, résulte que les fonctions ϱ, f des u, v sont liées par une relation de la forme

$$\varrho = c'' e^{f} \tag{2, 24}$$

où c'' est une constante $\neq 0$.

D'après les considérations précédentes, *si la congruence non isotrope C est une congruence normale de RIBAUCOUR, le carré de l'élément linéaire de son image sphérique Σ par un choix convenable des variables u, v affecte la forme*

$$d\sigma^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2), \tag{2, 25}$$

les surfaces $v = Cte$, $u = Cte$ engendrées par les droites de G étant ses surfaces distributrices principales. Cela étant, les équations (2, 12) qui, pour toute fonction $\varrho(u, v)$ vérifiant les équations (2, 11), déterminent à une translation près une surface génératrice de la congruence, prennent nécessairement la forme

$$\bar{r}'_u = \frac{c'c''}{\lambda} \bar{t}, \qquad \bar{r}'_v = - \frac{c'c''}{\lambda} \bar{g} \tag{2, 26}$$

où λ est le coefficient unique qui figure dans le formule (2, 25), $\bar{t}$, $\bar{g}$ sont les vecteurs - unités que les formules (1, 5) renferment et c', c'' sont deux constantes

$\neq 0$. Les surfaces génératrices de la congruence correspondent aux diverses valeurs $\neq 0$ de c''.

3. Le paramètre distributeur p sur la génératrice courante g de la congruence considérée C — qui, n'étant pas isotrope, admet comme surfaces distributrices principales les surfaces $v = Cte$, $u = Cte$ engendrées par ses droites et comme surface moyenne la surface S définie par l'équation (1, 2) — de la surface reglée engendrée par des droites de C correspondant à une relation, $v = v(u)$, entre u, v et issue de g, est donné par la formule

$$p = \frac{a^2 p_1 + b^2 p_2 \mu^2}{a^2 + b^2 \mu^2}, \tag{3, 1}$$

où $\mu = \dfrac{dv}{du}$.

De cette expression de p, à laquelle on parvient en appliquant la formule connue [5, p. 192] et en tenant compte que les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (1, 2) de la surface S peuvent s'écrire sous la forme (2, 1), résulte que l'équation

$$du^2 a^2 (p_1 - p) + dv^2 b^2 (p_2 - p) = 0$$

pour chaque valeur de p est l'équation différentielle des deux systèmes de ∞^1 courbes tracées sur la surface S, que les surfaces reglées à paramètre distributeur constant égal à la valeur considerée de p engendrées par les droites de C déterminent sur elle. Ces deux systèmes de ∞^1 courbes tracées sur la surface S, qui, d'après (3, 2), ne se confondent que seulement si un des paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 de C est constant et que la valeur de p soit égale à cette constante, en cas qu'ils soient distincts forment un réseau, que l'on peut associer à la valeur considérée de p. De tous ces réseaux de courbes tracées sur la surface moyenne S de la congruence non isotrope C, qui, dans ce qui suit, sont appelés, pour abréger, *réseaux R_p*, chacun desquels est associé à une — et une seule — valeur de p de la manière qui vient d'être indiquée, lorsque C est une congruence non isotrope choisie au hasard, aucun en général n'est conjugué.

Afin que sur la surface moyenne de la congruence non isotrope C le réseau R_p associé à la valeur p_0 de p soit conjugué, il faut et il suffit que les valeurs μ_1, μ_2 de $\mu = \frac{dv}{du}$, auxquelles correspondent les tangentes aux courbes de ce réseau issues du point courant de S et qui, d'après (3, 2), sont:

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{a}{b}\sqrt{\frac{p_1 - p_0}{p_0 - p_2}}, \tag{3, 3}$$

vérifient avec les coefficients L, M, N de la seconde forme différentielle fondamentale de S l'équation $L + M(\mu_1 + \mu_2) + N\mu_1\mu_2 = 0$; il faut et il suffit donc que l'on ait

$$Lb^2(p_2 - p_0) + Na^2(p_1 - p_0) = 0. \tag{3, 4}$$

De là on déduit aussitôt, en tenant compte que la congruence C n'est pas isotrope et en outre que chaque réseau R_p est associé à une seule valeur de p, que deux réseaux R_p sur la surface moyenne S de C ne sont conjugués que seulement si $L = N \equiv 0$. Mais la nullité des coefficients L, N, qui est une condition nécessaire et suffisante afin que les courbes $v = Cte$, $u = Cte$ tracées sur S — que les surfaces distributrices principales de la congruence déterminent sur elle — soient ses lignes asymptotiques, est évidemment la condition nécessaire et suffisante, afin que la condition (3, 4) soit remplie, quelle que soit la valeur p_0 de p.

Donc, *si deux réseaux R_p sur la surface moyenne d'une congruence non isotrope sont conjugués, il en est de même de tous les autres et une condition nécessaire et suffisante, afin que les réseaux R_p sur la surface moyenne de cette congruence soient tous conjugués, est que les courbes, que les surfaces distributrices principales de la congruence déterminent sur cette surface, soient ses lignes asymptotiques.*

Dans le cas envisagé où, d'après les suppositions faites, la surface moyenne de la congruence non isotrope C est définie par l'équation (1, 2) et les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre de cette équation peuvent s'écrire sous la forme (2, 1), pour que les réseaux R_p sur elle soient tous conjugués, il faut et il suffit que les fonctions scalaires a, b, p_1, p_2, l_1, l_2 des u, v, qui figurent dans les équations (2, 1) et vérifient les équations (2, 2), vérifient en plus les équations

$$\left\{\begin{aligned} & a^2 p_1^2 l_2 a_v + a^2 b\, l_1 l_2 p_1 - b^2 p_2 l_1 (ap_1)_u + ab^2 p_1 p_2 l_{1u} = 0 \\ & b^2 p_2^2 l_1 b_u - ab^2 l_1 l_2 p_2 - a^2 p_1 l_2 (bp_2)_v + a^2 b\, p_1 p_2 l_{2v} = 0, \end{aligned}\right. \tag{3, 4}$$

car cette condition est, dans ce cas, nécessaire et suffisante afin que les courbes $v = \text{Cte}$, $u = \text{Cte}$ tracées sur la surface moyenne de la congruence soient ses lignes asymptotiques [4, p. 171].

Il est à remarquer qu'une congruence ni parabolique ni isotrope, sur la surface moyenne de laquelle tous les réseaux R_p sont conjugués, est nécessairement une congruence de RIBAUCOUR, car, dans ce cas, le réseau des courbes, que les deux systèmes de surfaces développables de la congruence déterminent sur elle, qui est un réseau R_p, puisque sur chacune de ces surfaces on a $p = 0$, est conjugué et cette propriété caractérise — comme on sait [1, p. 309] — les congruence de RIBAUCOUR.

Si en particulier la congruence non isotrope C sur la surface moyenne S de laquelle tous les réseaux R_p sont conjugués, est engendrée par les normales à une même surface, d'après ce qui exposé dans le paragraphe 2, par un choix convenable des variables u, v on peut donner aux équations (2, 1), qui déterminent à une translation près la surface S, la forme (2, 17), car C, d'après la remarque précédente, est, dans ce cas, une congruence normale de RIBAUCOUR.

Cela étant, des deux équations (3, 5) qui, d'après la supposition faite, sont nécessairement remplies et, grâce aux (2, 17), se ramènent aux équations

$$(3,6) \qquad l_2 \lambda_v - l_1 \lambda_u - \lambda\, l_{1u} = 0, \qquad l_1 \lambda_u - l_2 \lambda_v - \lambda\, l_{2v} = 0,$$

on déduit aussitôt que l_1, l_2, doivent être des fonctions des u, v satisfaisant à l'équation

$$(3,7) \qquad l_{1u} + l_{2v} = 0.$$

D'autre part, si la congruence C est une congruence normale de RIBAUCOUR dont la surface moyenne S est définie à une translation près par les équations (2, 17) et que les scalaires l_1, l_2, que ces équations renferment, soient des fonctions des u, v vérifiant l'équation (3, 7), de cette équation jointe à l'équation (2, 19) qui, dans ce cas, est nécessairement vérifiée et, grâce aux (2, 18), acquiert la forme

$$l_2 \lambda_v - l_1 \lambda_u - \lambda \frac{l_{1u} - l_{2v}}{2} = 0,$$

résulte que les conditions (3, 6) qui sont suffisantes, dans le cas envisagé, afin que les réseaux R_p sur la surface moyenne de la congruence soient tous conjugués, sont remplies.

Donc, *si les variables u, v, aux couples de valeurs desquelles correspondent les droites d'une congruence normale de RIBAUCOUR, sont telles que, les surfaces $v = Cte$, $u = Cte$ engendrées par ses droites étant ses surfaces distributrices principales, la surface moyenne de la congruence soit définie à une translation près par deux équations de la forme (2, 17), une condition nécessaire et suffisante, afin que sur cette surface tous les réseaux R_p soient conjugués, est que les scalaires l_1, l_2, que ces équations renferment, soient des fonctions des u, v vérifiant l'équation (3, 7).*

4. Supposons maintenant en premier lieu que la congruence non isotrope C qui, étant définie par l'équation (1, 1), admet comme surface moyenne sa surface directrice S et comme surfaces distributrices principales les surfaces $v = Cte$, $u = Cte$ engendrées par ses droites soit une congruence normale de RIBAUÇOUR.

Les suppositions faites permettent d'admettre, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 2, que les variables u, v, aux couples de valeurs desquelles correspondent les droites de C, sont telles que les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (1, 2) de la surface S puissent s'écrire sous la forme (2, 17).

Cela étant, la différentiation par rapport à u et à v de l'équation

$$\bar{r}' = \bar{r}(u, v) + \frac{l_1}{\lambda}\bar{t} + \frac{l_2}{\lambda}\bar{g}, \tag{4, 1}$$

où $\bar{r}(u, v)$ est le second membre de l'équation (1, 2) de la surface moyenne S de C et l_1, l_2, λ sont les fonctions scalaires des u, v, qui figurent dans les équations (2, 17) et vérifient les équations (2, 18), à laquelle, grâce aux (2, 17) se ramène l'équation (2, 5) de l'enveloppée moyenne S′ de C, conduit aux équations

$$\begin{aligned} \bar{r}'_u &= \left[\left(\frac{l_1}{\lambda}\right)_u + \frac{l_2\lambda_v}{\lambda^2}\right]\bar{t} + \left[\lambda p - l_1\frac{\lambda_v}{\lambda^2} + \left(\frac{l_2}{\lambda}\right)_u\right]\bar{g} \\ \bar{r}'_v &= \left[\lambda p - l_2\frac{\lambda_u}{\lambda^2} + \left(\frac{l_1}{\lambda}\right)_v\right]\bar{t} + \left[\left(\frac{l_2}{\lambda}\right)_v + l_1\frac{\lambda_u}{\lambda^2}\right]\bar{g}. \end{aligned} \tag{4, 2}$$

Si l_1, l_2 ne sont pas tous les deux $\equiv 0$, les surfaces S′, S sont distinctes et, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 2, dans la représentation de ces surfaces, l'une sur l'autre, dans laquelle à chaque couple de valeurs des u, v correspondant à une droite de C correspondent deux points homologues des deux surfaces, la droite de C issue du point courant de la surface S est parallèle à la normale à la surface S′ en son point homologue de ce point de S.

Or, pour que la congruence C admette comme surface génératrice son enveloppée moyenne S′, il faut et il suffit, d'après la définition des surfaces génératrices d'une congruence de RIBAUCOUR [1, p. 308], que dans la représentation considérée des surfaces S′, S l'une sur l'autre, les éléments linéaires homologues des deux surfaces soient orthogonaux, ou bien, d'après la proposition finale du paragraphe 2, que les équations (4, 2) soient de la forme (2, 26). Donc, afin qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les fonctions scalaires l_1, l_2, λ, p des u, v, qui figurent dans les équations (2, 17) et vérifient les équations (2, 18), vérifient en plus les équations

$$\lambda p - l_1 \frac{\lambda_v}{\lambda^2} + \left(\frac{l_2}{\lambda}\right)_u = 0, \qquad \lambda p - l_2 \frac{\lambda_u}{\lambda^2} + \left(\frac{l_1}{\lambda}\right)_v = 0$$

et deux équations de la forme

$$\left(\frac{l_1}{\lambda}\right)_u + l_2 \frac{\lambda_v}{\lambda^2} = \frac{c'c''}{\lambda}, \qquad \left(\frac{l_2}{\lambda}\right)_v + l_1 \frac{\lambda_u}{\lambda^2} = -\frac{c'c''}{\lambda},$$

ou finalement les équations

$$(4,3)\quad \begin{cases} \lambda l_{2u} - l_1 \lambda_v - l_2 \lambda_u = -\lambda^3 p, & \lambda l_{1v} - l_1 \lambda_v - l_2 \lambda_u = -\lambda^3 p \\ \lambda l_{1u} - l_1 \lambda_u + l_2 \lambda_v = \lambda c'c'', & \lambda l_{2v} + l_1 \lambda_u - l_2 \lambda_v = -c'c''\lambda, \end{cases}$$

où c′, c″ sont deux constantes $\neq 0$.

Si les conditions (4, 3) sont remplies, d'après les deux dernières, il en est de même de la contition (3, 7), qui, d'après la proposition finale du paragraphe 3, est suffisante, dans le cas envisagé, afin que les réseaux R_p sur la surface moyenne S de la congruence soient tous conjugués.

On peut donc énoncer le

Théorème I. Les réseaux R_p sur la surface moyenne d'une congruence normale de RIBAUCOUR, qui admet son enveloppée moyenne comme surface génératrice, sont tous conjugués.

Par ailleurs, si les conditions (4, 3) sont remplies, des deux dernières de ces équations, jointes aux deux équations (3, 6) qui d'après le theorème I, sont nécessairement vérifiées, résulte que les dérivées l_{1u}, l_{v2} des $l_1(u, v)$, $l_2(u, v)$ sont nécessairement deux constantes $\neq 0$ réelles et opposées :

$$l_{1u} = \frac{c}{2}, \qquad l_{2v} = -\frac{c}{2}, \tag{4, 4}$$

où $c = c'c'' \neq 0$.

De là, eu égard au fait que $l_1(u, v)$, $l_2(u, v)$ doivent satisfaire en plus à la troisième équation (2, 18): $l_{1v} - l_{2u} = 0$, on déduit que l_1, l_2 doivent être des fonctions linéaires des u, v de la forme :

$$l_1 = \frac{cu + 2c_1v + c_1'}{2}, \qquad l_2 = \frac{2c_1u - cv + c_2'}{2}, \tag{4, 5}$$

où c, c_1, c_1', c_2' sont des constantes réelles dont la première au moins doit être $\neq 0$ et, comme les fonctions (4, 5) des u, v, si l'on y pose $u = u' + u_0$, $v = v' + v_0$ et que l'on choisisse convenablement les constantes u_0, v_0, deviennent des fonctions linéaires et homogènes des u', v', on peut admettre que les variables u, v sont choisies de manière que l_1, l_2 soient des fonctions des u, v de la forme :

$$l_1 = \frac{cu + 2c_1v}{2}, \qquad l_2 = \frac{2c_1u - cv}{2}. \tag{4, 6}$$

Cela étant la fonction $f(u, v)$ qui est liée avec les fonctions $\lambda(u, v)$, $p(u, v)$ par la relations (2, 20), doit satisfaire, en vertu des (2, 21), à l'équation aux dérivées partielles

$$(2c_1u - cv)\frac{\partial f}{\partial v} - (cu + 2c_1v)\frac{\partial f}{\partial u} = 0. \tag{4, 7}$$

Il en résulte, eu égard que l'intégration de l'équation (4, 7) se ramène à l'intégration de l'équation différentielle ordinaire :

$$(2c_1u - cv)\,du + (cu + 2c_1v)\,dv = 0,$$

que f est une fonction de

$$\omega(u, v) = c \cdot \operatorname{arctg}\frac{v}{u} + c_1 \log(u^2 + v^2). \tag{4, 8}$$

On aura donc, grâce à (4, 8) et au fait que

$$(4,9)\qquad f_u = \dot{f}\omega_u\,, \qquad f_v = \dot{f}\omega_v\,^{*},$$

$$(4,10)\qquad \omega_u = \frac{-cv + 2c_1u}{u^2+v^2}\,, \qquad \omega_v = \frac{2c_1v + cu}{u^2+v^2}\,,$$

$$(4,11)\qquad \omega_{u^2} = \frac{2c_1(v^2-u^2)+2cuv}{(u^2+v^2)^2}\,, \qquad \omega_{v^2} = \frac{2c_1(u^2-u^2)-2cuv}{(u^2+v^2)^2}$$

et de là

$$(4,12)\qquad \omega_u^2 + \omega_v^2 = \frac{c^2+4c_1^2}{u^2+v^2}\,, \qquad \omega_{u^2} + \omega_{v^2} = 0.$$

En outre, en vertu des (2, 20), (2, 21), (4, 6), (4, 9) et (4, 10), on a

$$(4,13)\qquad p\dot{f} = \frac{u^2+v^2}{2}\,, \qquad \lambda^2 = \frac{2c'}{u^2+v^2}\,e^{-f}\dot{f}$$

et, si l'on remplace $\lambda(u, v)$ dans l'équation (2, 16), à laquelle $\lambda(u, v)$ doit satisfaire, par sa valeur tirée de la seconde relation (4, 13), on reconnaît, en ayant égard aux (4, 12), que f considérée comme fonction de ω doit satisfaire à l'équation différentielle ordinaire

$$(4,14)\qquad \left[\frac{\ddot{f}}{\dot{f}} - \dot{f}\right] + \frac{4c'}{c^2+4c_1^2}\,e^{-f}\dot{f} = 0.$$

Par ailleurs, si l'on remplace les fonctions λ, p, l_1, l_2 des u, v dans les deux premières équations (4, 3), qui sont nécessairement vérifiées, par leurs valeurs tirées des (4, 6) et (4, 13), on constate, en ayant égard aux (4, 12), que $f(\omega)$ doit vérifier en plus l'équation

$$(4,15)\qquad \frac{\ddot{f}}{\dot{f}} - \dot{f} = \frac{4c'}{c^2+4c_1^2}\,e^{-f} + \frac{12c_1}{c^2+4c_1^2}\,,$$

à laquelle chacune de ces équations se ramène.

Mais toute fonction $f(\omega)$ vérifiant l'équation (4, 15) vérifie necessairement l'équation (4, 14).

Cela étant, si l'on considère trois valeurs réelles des constantes c, c′, c_1, dont celles des deux premières au moins sont $\neq 0$, à chaque fonction $f(\omega)$ vérifiant l'équation différentielle (4, 15), où ω est la fonction

---

* Les points désignent les dérivées par rapport à la variable ω.

(4, 8) des u, v pour les valeurs considérées des c, c′, c_1, on peut associer, à l'aide des (4, 6) et (4, 13), un système de quatre fonctions λ, p, l_1, l_2 des u, v vérifiant les équations (2, 16), (3, 6), (2, 18) et (4, 3).

Or, si l'on fait correspondre les points de la surface de la sphère-unité ou d'une partie Σ de cette surface aux couples de valeurs des deux variables u, v choisies de manière que le carré de l'élément linéaire de cette surface soit de la forme (2, 25), le coefficient unique λ, qui y figure, étant la première des fonctions λ, p, l_1, l_2 des u, v du système considéré, à ce système de fonctions et au réseau (u, v) sur la surface sphérique Σ, qui est isotherme, on peut attacher une congruence normale de RIBAUCOUR ayant son enveloppée moyenne comme surface génératrice. La surface moyenne de cette congruence est la surface S définie à une translation près par rapport au système de référence Oxyz par les équations compatibles, que l'on obtient des deux équations (2, 17) en y remplaçant les scalaires, qui y figurent, par les fonctions λ, p, l_1, l_2 des u, v du système considéré, les vecteurs $\bar{t}$, $\bar{g}$, $\bar{l}$, que ces équations renferment, étant les vecteurs-unités qui au point courant de la surface sphérique Σ déterminent les sens positifs sur les directions des tangentes aux courbes v = Cte, u = Cte issues de ce point et de la normale à Σ en ce même point respectivement. La droite de la congruence issue du point courant de sa surface moyenne S est parallère à la normale à la surface Σ en son point correspondant au couple de valeurs des u, v, auquel ce point de la surface S correspond.

Il est à remarquer que l'équation différentielle du second ordre (4, 15) à laquelle doit satisfaire la fonction f (ω), si l'on y pose $e^{-f(\omega)} = \sigma(\omega)$, se ramène — comme on le voit aisèment — à l'équation

$$\left\{c^2 + 4\,c_1^2\right\} \frac{d^2\sigma}{d\omega^2} = 4\,c'\sigma \frac{d\sigma}{d\omega} + 12\,c_1 \frac{d\sigma}{d\omega} \tag{4, 16}$$

dont l'intégration se ramène à des quadratures.

5. Supposons en second lieu que la congruence non isotrope C — définie par l'équation (1, 1) — soit une congruence hyperbolique dont les nappes focales ne dégenèrent pas en courbes.

Si la surface directrice S de C est sa surface moyenne et que les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par ses droites soient ses surfaces distributrices principales, les nappes forales S_1, S_2 de C seront définies par rapport au système de référence Oxyz par les équations

$$(5,1) \qquad \bar{r}_1 = \bar{r}(u,v) + \theta \bar{l}(u,v), \qquad \bar{r}_2 = \bar{r}(u,v) - \theta \bar{l}(u,v),$$

où $\bar{r}(u,v)$ est le second membre de l'équation (1,2) de la surface moyenne S de C et, d'après (2,3) :

$$(5,2) \qquad \theta = \sqrt{-p_1 p_2} \equiv \theta(u,v).$$

Les seconds membres des équations (5,1) sont des fonctions des u, v, qui sont définies pour tous les couples de valeurs des u, v, auxquels les droites de la congruence C correspondent et la représentation des surfaces S_1, S_2 définies par les équations (5,1) l'une sur l'autre, dans laquelle à chaque couple de valeurs des u, v correspondant à une droite de C correspondant deux points homologues des deux surfaces, est la correspondance que les droites de la congruence établissent entre les points de ces deux surfaces.

Or, si l'on tient compte que, d'après les suppositions faites concernant la surface directrice S de C et les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par ses droites, les coefficients E_1, F_1, G_1 et E_2, F_2, G_2 des premières formes fondamentales des surfaces S_1, S_2 définies par les équations (5,1), grâce aux (1,6) et (2,1), acquièrent la forme

$$(5,3) \qquad \begin{cases} E_1 = a^2(p_1^2+\theta^2) + (l_1+\theta_u)^2, & E_2 = a^2(p_1^2+\theta^2) + (l_1-\theta_u)^2, \\ F_1 = ab\theta(p_1-p_2) + (l_1+\theta_u)(l_2+\theta_v), & F_2 = ab\theta(p_2-p_1) + (l_1-\theta_u)(l_2-\theta_v), \\ G_1 = b^2(p_2^2+\theta^2) + (l_2+\theta_v)^2, & G_2 = b^2(p_2^2+\theta^2) + (l_2-\theta_u)^2, \end{cases}$$

on reconnait aussitôt que, pour que la représentation qui vient d'être signalée des surfaces S_1, S_2 l'une sur l'autre, soit isométrique, il faut et il suffit que l'on ait

$$(5,4) \qquad l_1\theta_u = 0, \quad l_2\theta_v = 0, \quad ab\theta(p_1-p_2) + l_1\theta_v + l_2\theta_u = 0,$$

où θ est la fonction (5,2) des p_1, p_2.

Donc, si la correspondance que les droites de la congruence hyperbolique C établissent entre les points de ses nappes focales, S_1, S_2, est une isométrie et que, par suite, les conditions (5, 4) soient remplies, on aura ou bien

$$(5,5) \qquad l_1 = 0, \quad l_2 \neq 0, \quad \theta = \theta(u), \quad \frac{ab(p_2 - p_1)}{l_2} = \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{du} \equiv f(u),$$

ou bien

$$(5,6) \qquad l_1 \neq 0, \quad l_2 = 0, \quad \theta = \theta(v), \quad \frac{ab(p_2 - p_1)}{l_1} = \frac{1}{\theta}\frac{d\theta}{dv} \equiv f(v).$$

θ et f étant des fonctions réelles et $\neq 0$, puisque $p_2 - p_1$ est $\neq 0$ de la seule variable u dans le premier cas et de la seule variable v dans le second cas.

Si les conditions (5, 5) sont remplies, la première équation (2, 2), grâce aux (5, 2) et (5, 5), acquiert la forme

$$(5,7) \qquad \frac{p_1 p_{1v}}{p_1^2 + \theta^2_{(u)}} = -\frac{a_v}{a}.$$

De là, si la dérivée a_v de a est $\neq 0$, résulte que p_1 et a sont liés avec la variable u par une relation de la forme

$$(5,8) \qquad p_1^2 + \theta^2_{(u)} = \frac{\varphi_1^2(u)}{a^2} \equiv \frac{\varphi^2(u)\,\theta^2(u)}{a^2},$$

où

$$(5,9) \qquad \varphi = \frac{\varphi_1}{\theta} \equiv \varphi(u)$$

est une fonction réelle et $\neq 0$ de la seule variable u et de la relation (5, 8) jointe à la relation (5, 2) on obtient pour p_1, p_2 les expressions

$$(5,10) \qquad p_1 = \theta\frac{\sqrt{\varphi^2 - a^2}}{a}, \qquad p_2 = -\theta\frac{a}{\sqrt{\varphi^2 - a^2}}.$$

On aura donc, grâce aux (5, 10),

$$(5,11) \quad p_1 + p_2 = \theta\frac{\varphi^2 - 2a^2}{a\sqrt{\varphi^2 - a^2}}, \quad p_1 - p_2 = \theta\frac{\varphi^2}{a\sqrt{\varphi^2 - a^2}}, \quad \frac{p_1 - p_2}{p_2} = -\frac{\varphi^2}{a^2}$$

et, cela étant, de la dernière condition (5, 5) jointe à la troisième relation (5, 11) on parvient à la relation

$$(5,12) \qquad \frac{l_2\, a}{p_2\, b} = \frac{\varphi^2}{f} \equiv F(u).$$

De cette relation, en égalant les dérivées logarithmiques par rapport à u de ses deux membres et en tenant compte que, en vertu des (2, 2), (5, 5), (5, 11) et (5, 12), on a

$$\frac{l_{2u}}{l_2} = f\,\frac{\varphi^2 - 2a^2}{\varphi^2}, \qquad \frac{p_{2u}}{p_2} = -\frac{\varphi^2}{a^2}\,\frac{b_u}{b} + \frac{\varphi^2}{f}, \tag{5, 13}$$

on obtient l'équation

$$\frac{a_u}{a} + \frac{\varphi^2 - a^2}{a^2}\,\frac{b_u}{b} = 2\,\frac{f}{\varphi^2}\,a^2 + \frac{2}{\varphi}\,\frac{d\varphi}{du} - \frac{1}{f}\,\frac{df}{du} + \frac{\varphi^2}{f} - f. \tag{5, 14}$$

Par ailleurs, la seconde équation (5, 13), si l'on remplace $\frac{p_{2u}}{p_2}$ par la dérivée logarithmique par rapport à u du second membre de la seconde relation (5, 10) et que l'on tienne compte que l'on a posé $\frac{1}{\theta}\,\frac{d\theta}{du} = f$, acquiert la forme

$$\frac{a_u}{a} + \frac{\varphi^2 - a^2}{a^2}\,\frac{b_u}{b} = a^2\left(\frac{f}{\varphi^2} - \frac{1}{f}\right) + \frac{1}{\varphi}\,\frac{d\varphi}{du} + \frac{\varphi^2}{f} - f \tag{5, 15}$$

et des deux équations (5, 14) et (5, 15), résulte que a doit vérifier l'équation

$$a^2\left[\frac{1}{f} + \frac{f}{\varphi^2}\right] + \frac{1}{\varphi}\,\frac{d\varphi}{du} - \frac{1}{f}\,\frac{df}{du} = 0. \tag{5, 16}$$

On parvient ainsi, en supposant, dans le cas envisagé, que la dérivée a_v de a soit $\neq 0$, à un résultat contradictoire à cette même supposition, car le premier membre de l'équation (5, 16) est un polynôme en a dont les (deux) coefficients sont des fonctions de la seule variable u, qui ne peuvent pas s'annuler tous les deux identiquement, puisque f et φ sont des fonctions réelles et $\neq 0$ de la variable u.

Donc, si les conditions (5, 5) sont remplies, a est nécessairement une fonction de la seule variable u:

$$a = a(u) \tag{5, 17}$$

et, cela étant, il en est de même, en vertu des (5, 2) et (5, 7), des p_1, p_2:

$$p_1 = p_1(u), \qquad p_2 = p_2(u). \tag{5, 18}$$

En outre, d'après (5, 5), (5, 17) et (5, 18), $\frac{l_2 a}{p_2 b}$, $\frac{l_2}{b}$ sont également des fonctions de la seule variable u :

$$\frac{l_2 a}{p_2 b} = F(u), \quad \frac{l_2}{b} = F_1(u) \tag{5, 19}$$

et, grâce aux (5,18), (5, 19) et à la seconde équation (2, 2), il en est de même de $\frac{a_v}{b}$; par suite b doit être une fonction des u, v de la forme $b = U(u) . V(v)$.

Donc, dans le cas envisagé, le carré de l'élément linéaire de l'image sphérique Σ de la congruence est nécessairement de la forme

$$d\sigma^2 = du^2 a^2(u) + dv^2 U^2(u) V^2(u), \tag{5, 20}$$

ce qui permet de choisir les variables u, v de manière que, les surfaces $v = \mathrm{Cte}$, $u = \mathrm{Cte}$ engendrées par les droites de la congruence étant ses surfaces distributrices principales, dans l'expression (5, 20) de $d\sigma^2$ on ait

$$a = 1, \quad b = b(u). \tag{5, 21}$$

Mais, b (u) doit en plus satisfaire à l'équation différentielle $\frac{d^2 b}{du^2} + b = 0$, à laquelle, grâce aux (5, 21), se ramène l'équation (1, 6); par suite b doit être une fonction de la variable u de la forme : $b = c_1 \cos(u + c)$, où c_1, c sont deux constantes dont la première au moins est nécessairement $\neq 0$.

Il en résulte que, dans le cas envisagé, les variables u, v peuvent être choisies de manière que l'on ait

$$a = 1, \ b = \cos u, \ l_1 = 0, \ l_2 = l_2(u) \neq 0, \ p_1 = p_1(u) \neq 0, \ p_1 = p_2(u) \neq 0, \tag{5, 22}$$

p_1, p_2 et l_2 étant des fonctions de la variable u, qui doivent satisfaire aux trois équations différentielles :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{dp_2}{du} \cos u + (p_1 - p_2) \sin u - l_2 = 0, \qquad \frac{dl_2}{du} + (p_1 + p_2) \cos u = 0, \\ & 2(p_1 - p_2) \cos u + l_2 \left(\frac{1}{p_1} \frac{dp_1}{du} + \frac{1}{p_2} \frac{dp_2}{du} \right) = 0, \end{aligned} \right. \tag{5, 23}$$

auxquelles on parvient en tenant compte que les équations (2, 2) et (5, 5), si l'on y remplace a, b, p_1, p_2, l_1, l_2 par leurs valeurs (5, 22) et θ par $\sqrt{-p_1 p_2}$, doivent être vérifiées.

Si, au lieu des conditions (5, 5), les conditions (5, 6), sont remplies, on reconnaît par des raisonnements pareils aux précédents que, dans ce cas, les variables u, v, aux couples de valeurs desquelles correspondent les droites de la congruence, peuvent être choisies de manière que l'on ait

$$(5,24) \quad a = \cos v, \quad b = 1, \quad l_1 = l_1(v) \neq 0, \quad l_2 = 0, \quad p_1 = p_1(v) \neq 0, \quad p_2 = p_2(v) \neq 0,$$

p_1, p_2 et l_1 étant des fonctions de la variable v, qui doivent satisfaire aux trois équations différentielles

$$(5,25) \quad \begin{cases} \dfrac{dp_1}{du} \cos v - (p_1 - p_2) \sin v + l_1 = 0, \quad \dfrac{dl_1}{dv} - (p_1 + p_2) \cos v = 0, \\ 2(p_1 - p_2) \cos v + l_1 \left(\dfrac{1}{p_1} \dfrac{dp_1}{dv} + \dfrac{1}{p_2} \dfrac{dp_2}{dv} \right) = 0. \end{cases}$$

D'après les constatations précédentes, on peut toujours faire correspondre les droites d'une congruence hyperbolique aux couples de valeurs des deux variables u, v telles que, les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par les droites de la congruence étant ses surfaces distributrices principales, les calaires a, b, p_1, p_2, l_1, l_2 que les équations (2, 1) qui déterminent à une translation près sa surface moyenne renferment, soient ou bien les fonctions (5, 22) de la seule variable u ou bien les fonctions (5, 24) de la seule variable v, lorsque les droites de la congruence établissent une correspondance isométrique entre les points de ses nappes focales et, comme dans chacun de ces deux cas les conditions (4, 3) qui sont suffisantes, afin que les réseaux R_p sur la surface moyenne de la congruence soient tous conjugués, sont remplies, on peut formuler le

Théorème II. Les réseaux R_p sur la surface moyenne d'une congruence hyperbolique dont les droites établissent une correspondance isométrique entre les points de ses nappes focales, sont tous conjugués.

Il est à remarquer que les paramètres distributeurs principaux p_1, p_2 d'une congruence hyperbolique ayant la propriété qui vient d'être signalée sont liés, si aucun d'eux n'est constant, par une relation, puisque, d'après les constatations précédentes, par un choix convenable des variables u, v, aux couples de valeurs desquelles correspondent les droites d'une congruence de ce type, ses paramètres p_1, p_2, deviennent tous les deux des fonctions soit de la seule variable u soit de la seule variable v.

Or, si la congruence considérée C est une congruence hyperbolique ayant la propriété signalée et que les variables u, v, aux couples de valeurs desquelles correspondent ses droites, soient telles que dans les équations (2, 1) de sa surface moyenne S on ait $a = 1$, $b = \cos u$, $l_1 = 0$, tandis que p_1, p_2, l_2 sont des fonctions de la seule variable u, les trois équations différentielles (5, 23), auxquelles ces trois fonctions doivent satisfaire, si p_1, p_2 sont liés par une relation :

$$p_2 = p_2(p_1), \tag{5, 26}$$

acquièrent la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} 2(p_1 - p_2)\cos u + l_2\left(\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}\dfrac{dp_2}{dp_1}\right)\dfrac{dp_1}{du} = 0, \\ \dfrac{dp_2}{dp_1}\dfrac{dp_1}{du}\cos u + (p_1 - p_2)\sin u - l_2 = 0, \quad \dfrac{dl_2}{du} + (p_1 + p_2)\cos u = 0. \end{array}\right. \tag{5, 27}$$

Cela étant, si l'on élimine l_2 entre les deux premières équations (5, 27) et la dérivée $\dfrac{dl_2}{du}$ entre la troisième équation (5, 27) et chacune des deux équations que l'on obtient en différentiant les deux premières par rapport à u, on parvient aux trois équations de la forme

$$F_1 \cos u + F_2 \sin u = 0, \quad \varphi_1 \cos u + \varphi_2 \sin u = 0, \quad \varphi_1' \cos u + \varphi_2' \sin u = 0 \tag{5, 28}$$

où F_1, F_2 sont des polynômes en p_1, p_2, $\dfrac{dp_2}{dp_1}$, $\dfrac{dp_1}{du}$ et φ_1, φ_2, φ_1', φ_2' sont des polynômes en p_1, p_2, $\dfrac{dp_2}{dp_1}$, $\dfrac{d^2p_2}{dp_1^2}$, $\dfrac{dp_1}{du}$, $\dfrac{d^2p_1}{du^2}$ à coefficients numériques.

En outre, en différentiant la première équation (5, 28) par rapport à u on obtient une quatrième équation de la forme $\varphi_1'' \cos u + \varphi_2'' \sin u = 0$, où φ_1'', φ_2'' sont des polynômes en p_1, p_2, $\dfrac{dp_2}{dp_1}$, $\dfrac{d^2p_2}{dp_1^2}$, $\dfrac{dp_1}{du}$, $\dfrac{d^2p_1}{du^2}$ à coefficients numériques et en éliminant tgu et les dérivées $\dfrac{dp_1}{du}$, $\dfrac{d^2p_1}{du^2}$

entre cette équation et les trois équations (5, 28) on parvient à une équation :

$$R\left(p_1, p_2, \frac{dp_2}{dp_1}, \frac{d^2p_2}{dp_1^2}\right) = 0 \tag{5, 29}$$

dont le premier membre est un polynôme en p_1, p_2, $\frac{dp_2}{dp_1}$, $\frac{d^2p_2}{dp_1^2}$ à coefficients numériques, à laquelle p_2 — considéré comme fonction de p_1 — doit satisfaire.

On peut donc énoncer le

Théorème III. Les paramètres distributeurs principaux, p_1, p_2, d'une congruence hyperbolique dont les droites établissent une correspondance isométrique entre les points de ses nappes focales, sont liés, si aucun d'eux n'est constant, par une relation qui n'est pas arbitraire, car l'un de ses paramètres, p_1, p_2, considéré comme fonction de l'autre doit satisfaire à une équation différentielle du second ordre, qui est une équation algébrique par rapport aux dérivées de cette fonction, dont les coefficients sont des polynômes en p_1, p_2 à coefficients numériques.

6. Supposons enfin que la congruence non isotrope C qui, étant définie par l'équation (1, 1), admet la surface S définie par l'équation (1, 2) comme surface moyenne et les surfaces v = Cte, u = Cte engendrées par ses droites comme surfaces distributrices principales, soit une congruence parabolique.

La surface moyenne S de C, d'après la supposition faite, est en même temps sa nappe focale unique et les courbes tracées sur la surface S, auxquelles les droites de C sont tangentes, constituent l'un des systèmes des lignes asymptotiques de S. En outre un des paramètres distributeurs principaux, p_1, p_2, de S — et un seul — comme nous l'avons déjà signalé dans le paragraphe 2, doit être $\equiv 0$.

Or, si

$$p_1 \not\equiv 0, \qquad p_2 = 0, \tag{6, 1}$$

les lignes asymptotiques de la surface S, auxquelles les droites de la congruence C sont tangentes, sont les courbes u = Cte tracées sur elle, car les dérivées $\bar{r}_u$, $\bar{r}_v$ du second membre de l'équation (1, 2) de S, qui, d'après les suppositions faites, peuvent s'écrire sous la forme (2, 1), grâce aux (6, 1), deviennent

$$(6,2) \qquad \bar{r}_u = ap_1\bar{g} + l_1 \boldsymbol{l}, \qquad \bar{r}_v = l_2 \boldsymbol{l},$$

où l_2 est une fonction $\neq 0$ des u, v.

En différentiant les équations (6, 2) par rapport à u et à v et en ayant égard aux (1, 5), (1, 8), (2, 2) et (6, 1), on parvient aux équations

$$(6,3) \qquad \begin{cases} \bar{r}_{u^2} = \dfrac{a(p_1 a_v + bl_1)}{b}\bar{t} + (ap_1)_u\bar{g} + l_{1u}\boldsymbol{l}, \quad \bar{r}_{uv} = al_2\bar{t} + l_{2u}\boldsymbol{l}, \\ \bar{r}_{v^2} = bl_2\bar{g} + l_{2v}\boldsymbol{l} \end{cases}$$

et, à l'aide des (6, 2) et (6, 3), on obtient pour les coefficients E, F, G et L, M, N des deux formes quadratiques fondamentales de la surface S, définie par l'équation (1, 2), les expressions

$$(6,4) \qquad E = a^2p_1^2 + l_1^2, \quad F = l_1 l_2, \quad G = l_2^2$$

et

$$(6,5) \qquad L = \frac{a(p_1 a_v + bl_1)}{b}, \quad M = al_2, \quad N = 0,$$

En outre, en tenant compte que au point courant de la surface S la torsion σ de sa ligne asymptotique u = Cte issue de ce point est égale à sa torsion géodésique σ_g en ce même point, qui, grâce aux (6, 5) est : $\sigma_g = \dfrac{M}{EG - F^2}$, on obtient, en ayant égard aux (6, 4) et (6, 5), la relation

$$(6,6) \qquad \sigma = \frac{1}{p_1}.$$

Par ailleurs les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur la surface S sont les courbes, que les surfaces distributrices principales de la congruence C déterminent sur elle et, comme les courbes u = Cte sont des lignes asymptotiques de la surface S, pour que les réseaux R_p sur elle soient tous conjugués, il faut et il suffit, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 3, que les courbes v = Cte tracées sur S constituent l'autre système de ses lignes asymptotiques ; il faut et il suffit, donc, que l'on ait L = 0 et, d'après la première relation (6, 5) :

$$(6,7) \qquad p_1 a_v + bl_1 = 0.$$

Mais, d'après la première équation (2, 2), qui — grâce aux (6, 1) —

acquiert la forme $ap_{1v} = -p_1 a_v - bl_1$ pour que la condition (6, 7) soit remplie, il faut et il suffit que p_1 soit une fonction de la seule variable u.

On peut donc, en ayant égard à la relation (6, 6), formuler le

Théorème IV. Les réseaux R_p sur la nappe focale unique d'une congruence parabolique ne sont tous conjugués que si — et seulement si — les lignes asymptotiques de cette surface, auxquelles les droites qui engendrent la congruence sont tangentes, sont des courbes à torsion constante.

Une conséquence de ce théorème, compte tenu du fait que la courbure totale K en chaque point (régulier) d'une surface et les torsions σ, σ' de ses lignes asymptotiques issues de ce point sont liées par les relations $K = \sigma\sigma'$, $\sigma + \sigma' = 0$, est le

Théorème V. Les surfaces reglées engendrées par les tangentes aux lignes asymptotiques de chaque système d'une surface pseudosphérique, à paramètre distributeur p constant — le même sur toutes ces surfaces — déterminent sur cette surface un réseau conjugué, quelle que soit la valeur constante de p.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς τὴν ἐργασίαν ταύτην, τῆς ὁποίας σκοπὸς εἶναι ἡ ἀναζήτησις εὐθειογενῶν σμηνῶν μὴ ἰσοτρόπων τοῦ Εὐκλειδείου τριδιαστάτου χώρου, ἐπὶ τῆς μέσης ἐπιφανείας ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ εὐθειογενεῖς ἐπιφάνειαι σταθερᾶς παραμέτρου διανομῆς, p, αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν εὐθειῶν αὐτοῦ, ὁρίζουν δι' ἑκάστην τιμὴν τῆς p δίκτυον συζυγές, ἐκτίθενται ἐν ἀρχῇ στοιχεῖα τινα ἀπαραίτητα διὰ τὰ ἑπόμενα καὶ ἐν συνεχείᾳ ἀποδεικνύονται τὰ ἑξῆς :

α) Τὰ καθετικὰ σμήνη τοῦ RIBAUCOUR, ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ μέση περιβάλλουσα εἶναι γεννήτρια ἐπιφάνεια, ἔχουν τὴν ἀνωτέρω ἀναφερομένην ἰδιότητα, τὸ δὲ πρόβλημα τοῦ καθορισμοῦ τῶν σμηνῶν τοῦ τύπου τούτου εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ τοῦ καθορισμοῦ τῶν συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς τῶν πληρουσῶν κοινὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν δευτέρας τάξεως, τῆς ὁποίας ἡ ὁλοκλήρωσις ἀνάγεται εἰς τετραγωνισμούς.

β) Τὰ ὑπερβολικὰ σμήνη, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ δύο ἑστιακαὶ χῶναι ἀπεικονίζονται, ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ἰσομετρικῶς διὰ τῶν εὐθειῶν αὐτοῦ, ἔχουν τὴν ἀνωτέρω ἀναφερομένην ἰδιότητα, αἱ δὲ κύριαι παράμετροι διανομῆς, p_1, p_2, ἑνὸς τοιούτου σμήνους, ὅταν οὐδεμία τούτων εἶναι σταθερά, συνδέονται διὰ σχέσεως καὶ δὴ τοιαύτης, ὥστε ἡ ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ὁριζομένη μία τῶν παραμέτρων, p_1, p_2, ὡς συνάρτησις τῆς ἄλλης πληροῖ κατ' ἀνάγκην διαφορικὴν ἐξίσωσιν δευ-

τέρας τάξεως, ἡ ὁποία εἶναι ἐξίσωσις ἀλγεβρικὴ ὡς πρὸς τὰς παραγώγους τῆς συναρτήσεως ταύτης καὶ τὰς κυρίας παραμέτρους μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστάς.

γ) Ἓν παραβολικὸν σμῆνος ἔχει τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα πάντοτε καὶ μόνον ὅταν αἱ ἀσυμπτωτικαὶ γραμμαὶ τῆς μοναδικῆς ἑστιακῆς χώνης αὐτοῦ, ἐφαπτόμεναι τῶν ὁποίων εἶναι αἱ εὐθεῖαι τοῦ σμήνους, εἶναι καμπύλαι σταθερᾶς στρέψεως.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, (Teubner) 1910.
2. W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, I, (Springer) 1924.
3. H. Milloux et P. Vincensini, Sur une méthode vectorielle d'étude des congruences de droites et quelques-unes de ses applications, Bull. Sc. Math. S. 2, 94 (1970), p. 5 à 24.
4. O. Pylarinos, Sur un type spécial de congruences de droites, Praktika de l'Acad. d'Athènes, V. 49 (1974).
5. C. E. Weatherburn, Differential geometry I, (Cambridge), 1961.