ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Περιγράφεται ἡ παρασκευὴ ὑπὸ τῶν συγγραφέων τῆς μελέτης ταύτης νέων ἀκορέστων κετονῶν καὶ τῶν θειοσεμικαρβαζονῶν αὐτῶν καὶ μελετᾶται in vitro ἡ φυματιοστατικὴ δρᾶσις τῶν τελευταίων.

BIBLIOGRAPHIE

1. Domagk, Behnisch, Mietzsch, Schmidt, Naturwiss., 1946, **33**, 315; Behnisch, Mietzsch, Schmidt, Angewandte Chem., 1948, **60A**, 113.
2. M. Welsch, N. P. Buu-Hoi et F. Binon, Experientia, 1955, XI, 350. Kuhn-Hensel, Ber., 1953, **86**, 13.
3. N. P. Buu-Hoi, N. D. Xuong et N. B. Tien, J. Org. Chem., 1956, **21**, 415.
4. G. Tsatsas, Ann. Pharm. Franç., 1949, **7**, 733. R. Delaby, G. Tsatsas, M^lle^ M. C. Jendrot, Bull. Soc. Chim., 1956, 1830. E. Profft, Wissenschaftliche Zeitschr. Techn. Hochschule für Chemie Leuna-Merseburg, **1**, (1957-58), p. 23.

ΦΥΣΙΚΗ.— Γενίκευσις ἑνὸς προβλήματος ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως τοῦ Διοφάντου, *ὑπὸ Εὐαγγ. Σταμάτη**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

A

Ὁ Διόφαντος εἰς τὸ Δ´ Βιβλίον τῶν Ἀριθμητικῶν του λύει τὸ ἑξῆς πρόβλημα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως ὑπ' ἀριθ. 20.

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ x, x_1, x_2, x_3. Τὸ πρόβλημα εἶναι $xx_1 + 1 = \alpha^2$, (1), $xx_2 + 1 = \beta^2$, (2), $xx_3 + 1 = \gamma^2$, (3), $x_1x_2 + 1 = \delta^2$, (4), $x_1x_3 + 1 = \varepsilon^2$, (5) $x_2x_3 + 1 = \zeta^2$, (6). Θέτει

$xx_1 + 1 = (x + 1)^2 = x(x + 2) + 1$. Εἶναι ἄρα $x_1 = x + 2$

$xx_2 + 1 = (2x + 2)^2 = x(4x + 4) + 1$ » » $x_2 = 4x + 4$

$xx_3 + 1 = (3x + 1)^2 = x(9x + 6) + 1$ » » $x_3 = 9x + 6$

Διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν x_1, x_2, x_3 πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα 1, 2, 3, 4, 6. Τὸ ἐπίταγμα (5) εἶναι

$x_1x_3 + 1 = (x + 2)(9x + 6) + 1 = 9x^2 + 24x + 13 =$ τετράγωνος. Καλεῖ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ τετραγώνου τούτου $(3x - 4)$, ὁπότε λαμβάνει $9x^2 + 24x + 13 = (3x - 4)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{16}$. Κατὰ ταῦτα εἶναι $x = \frac{1}{16}$, $x_1 = \frac{33}{16}$, $x_2 = \frac{68}{16}$, $x_3 = \frac{105}{16}$ καὶ τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος πληροῦνται.

---

* EVANG. STAMATIS, Verallgemeinerung eines Problems unbestimmter Analytik des Diophantos.

[Σημείωσις. Ἐπὶ τοῦ προβλήματος τούτου ὁ Fermat σημειώνει: «Ἔστωσαν οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ 1, 3, 8. Κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι $1.3 + 1 = 2^2$, $1.8 + 1 = 3^2$, $3.8 + 1 = 5^2$. Ἐὰν ὁ τέταρτος ἀριθμὸς κληθῇ x πρέπει νὰ εἶναι ἀκόμη $3x + 1 =$ τετράγωνος, $x + 1 =$ τετράγωνος, $8x + 1 =$ τετράγωνος, ἤτοι προκύπτουσι τρεῖς συναληθεύουσαι ἐξισώσεις, αἵτινες ἐπιλύονται κατὰ τὴν ὑπ' ἐμοῦ ἐπινοηθεῖσαν μέθοδον. Ἴδε τὴν παρατήρησίν μου εἰς τὸ 24 πρόβλημα τοῦ VI βιβλίου (τοῦ Διοφάντου)». [G. Wertheim, Die Arithmetik des Diophantos von Alexandria, Teubner, 1890, σελ. 145 - 146].

B

1. **Παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ προβλήματος 20.**

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ὁ Διόφαντος θέτει $9x^2 + 24x + 13 = (3x - 4)^2$ (1). Ἐκ τούτου γεννᾶται ἡ εὔλογος ἀπορία πόθεν ὁ Διόφαντος ὡρμήθη διὰ νὰ λάβῃ ὡς τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ τετραγώνου τὴν $(3x - 4)$. Κατὰ τὴν ἡμετέραν γνώμην τοιαύτη λῆψις προέρχεται ἐξ ἀριθμητικῶν ἐρευνῶν τῶν Πυθαγορείων, αἱ ὁποῖαι δὲν διεσώθησαν. Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι ὡς μειωτέος τῆς διαφορᾶς $(3x - 4)$ ἔχει ληφθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $9x^2$. Τοῦτο γίνεται, ἵνα ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἀναχθῇ εἰς πρωτοβάθμιον. Ἐὰν ὡς δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως (1) ἐλάμβανε $(3x \pm 3)^2$ ἢ $(3x + 5)^2$ ἡ τιμὴ τοῦ x θὰ ἦτο ἀρνητική. Ὁ Διόφαντος ὅμως ἀποφεύγει τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, καίτοι χρησιμοποιεῖ ὅπου εἶναι ἀνάγκη τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Ἐὰν ἐλάμβανε $(3x + 4)^2$ θὰ ἦτο $0 = 3$. Ἐὰν ἐλάμβανε $(3x - 5)^2$ ὁ x θὰ ἦτο θετικὸς $= \frac{2}{9}$ καὶ τὸ συναφὲς ἐπίταγμα τοῦ προβλήματος θὰ ἐπληροῦτο διὰ μίαν ἀκόμη θετικὴν τιμὴν τοῦ x. Ὁ ἀφαιρετέος 4 εἰς τὴν διαφορὰν $(3x - 4)$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὅρου τοῦ τριωνύμου τοῦ περιέχοντος τὸν x διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ $9x^2$. Ἐκ τούτου συνάγομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι προκειμένου ἀλγεβρικὴ παράστασις τῆς μορφῆς $\lambda^2 x^2 + \lambda \varkappa x + \mu$, (2), νὰ ἐξισωθῇ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν λαμβάνεται ὡς τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ τετραγώνου τούτου ἡ διαφορὰ $\left(\lambda x - \frac{\varkappa}{2}\right)$, ὅπου $\frac{\varkappa}{2} = (\lambda \varkappa x : 2\lambda x)$. Ἀκριβῶς τὸν νόμον τοῦτον χρησιμοποιοῦμεν κατὰ τὴν κατωτέρω ἐκτιθεμένην γενίκευσιν τοῦ προβλήματος. Ἐκ τῆς ἐρεύνης τὴν ὁποίαν διενηργήσαμεν κατὰ τὴν γενίκευσιν αὐτὴν διεπιστώσαμεν, ὅτι χωρὶς νὰ θίγηται ὁ ἀνωτέρω ἐκτεθεὶς νόμος σχηματισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑνὸς τριωνύμου τῆς μορφῆς (2) καὶ τὰ ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τούτου λαμβανόμενα ἀποτελέσματα, εἶναι δυνατὸν εἴς τινας περιπτώσεις νὰ λαμβάνηται ὁ ἀφαιρετέος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης μικρότερος τοῦ $\frac{\varkappa}{2}$, πάντοτε ὅμως νὰ εἶναι $\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2 > \mu$ διὰ νὰ εἶναι $x > 0$. Εἰς τὴν παράστασιν π.χ. $x_1 x_5 + 1 = (x + 2)\ (25x + 10) + 1 =$

$25x^2 + 60x + 21$, (3), τὴν ὁποίαν θὰ συναντήσωμεν κατωτέρω, θέτομεν τὸ τριώνυμον (3) ἴσον πρὸς $(5x-6)^2$ κατὰ τὸν καθ' ἡμᾶς ὑποτιθέμενον τρόπον σχηματισμοῦ ὑπὸ τοῦ Διοφάντου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ τριωνύμου θεωρουμένου ὡς τετραγώνου. Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ τεθῇ τὸ τριώνυμον (3) καὶ ἴσον πρὸς $(5x-5)^2$ καὶ νὰ πληροῦται τὸ ζητούμενον ἐπίταγμα, ἐφ' ὅσον ὁ $5^2 > 21$ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι θετική.

2. Ἡ γενίκευσις τοῦ προβλήματος 20 τοῦ Διοφάντου.

Νὰ εὑρεθῶσι n τὸ πλῆθος ἀριθμοί, ὅπου n ὁσονδήποτε μεγάλος, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν ἀνὰ δύο σὺν ἓν νὰ εἶναι τετράγωνος.

Ἐπιλύομεν τὸ πρόβλημα ἐνδεικτικῶς διὰ ἑπτὰ ἀγνώστους καὶ ἀκολούθως διατυποῦμεν τοὺς γενικοὺς νόμους.

Ἔστωσαν οἱ ἄγνωστοι $x, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι

1. $xx_1 + 1 = \alpha_1^2$	7. $x_1x_2 + 1 = \beta_1^2$	12. $x_2x_3 + 1 = \gamma_1^2$	16. $x_3x_4 + 1 = \delta_1^2$
2. $xx_2 + 1 = \alpha_2^2$	8. $x_1x_3 + 1 = \beta_2^2$	13. $x_2x_4 + 1 = \gamma_2^2$	17. $x_3v_5 + 1 = \delta_2^2$
3. $xx_3 + 1 = \alpha_3^2$	9. $x_1x_4 + 1 = \beta_3^2$	14. $x_2x_5 + 1 = \gamma_3^2$	18. $x_3x_6 + 1 = \delta_3^2$
4. $xx_4 + 1 = \alpha_4^2$	10. $x_1x_5 + 1 = \beta_4^2$	15. $x_2x_6 + 1 = \gamma_4^2$	
5. $xx_5 + 1 = \alpha_5^2$	11. $x_1x_6 + 1 = \beta_5^2$		
6. $xx_6 + 1 = \alpha_6^2$			

19. $x_4x_5 + 1 = \varepsilon_1^2$, 20. $x_4x_6 + 1 = \varepsilon_2^2$, 21. $x_5x_6 + 1 = \xi_1^2$

Θέτομεν

1. $xx_1 + 1 = (x+1)^2 = x(x+2) + 1$. Εἶναι ἄρα $x_1 = x + 2$
2. $xx_2 + 1 = (2x+1)^2 = x(4x+4) + 1$. » » $x_2 = 4x + 4$
3. $xx_3 + 1 = (3x+1)^2 = x(9x+6) + 1$. » » $x_3 = 9x + 6$
4. $xx_4 + 1 = (4x+1)^2 = x(16x+8) + 1$. » » $x_4 = 16x + 8$
5. $xx_5 + 1 = (5x+1)^2 = x(25x+10) + 1$. » » $x_5 = 25x + 10$
6. $xx_6 + 1 = (6x+1)^2 = x(36x+12) + 1$. » » $x_6 = 36x + 12$

Διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ πληροῦνται τὰ ἐπιτάγματα 1—6. Δι' ἀντικαταστάσεως δὲ τῶν τιμῶν τούτων εἰς τὰ ἐπιτάγματα 7—21 λαμβάνομεν

7. $x_1x_2 + 1 = (x+2)(4x+4) + 1 = (2x+3)^2$
8. $x_1x_3 + 1 = (x+2)(9x+6) + 1 = 9x^2 + 24x + 13 = (3x-4)^2$, ἐξ ἧς $x = \frac{1}{16}$
9. $x_1x_4 + 1 = (x+2)(16x+8) + 1 = 16x^2 + 40x + 17 = (4x-5)^2$ (κατὰ τὸν προηγουμένως μνημονευθέντα νόμον σχηματισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ τριωνύμου). Ἐκ τῆς προηγουμένης ἐξισώσεως εἶναι $x = \frac{1}{10}$

10. $x_1x_5 + 1 = (x + 2)(25x + 10) + 1 = 25x^2 + 60x + 21 = (5x - 6)^2,$

ἐξ ἧς $x = \frac{1}{8}$

11. $x_1x_6 + 1 = (x + 2)(36x + 12) + 1 = 36x^2 + 84x + 25 = (6x - 7)^2,$

ἐξ ἧς $x = \frac{1}{7}$

12. $x_2x_3 + 1 = (4x + 4)(9x + 6) + 1 = 36x^2 + 60x + 25 = (6x + 5)^2,$

13. $x_2x_4 + 1 = (4x + 4)(16x + 8) + 1 = 64x^2 + 96x + 33 = (8x - 6)^2,$

ἐξ ἧς $x = \frac{1}{64}$

14. $x_2x_5 + 1 = (4x + 4)(25x + 10) + 1 = 100x^2 + 140x + 41 = (10x - 7)^2,$

ἐξ ἧς $x = \frac{1}{35}$

15. $x_2x_6 + 1 = (4x + 4)(36x + 12) + 1 = 144x^2 + 192x + 49 = (12x - 8)^2,$

ἐξ ἧς $x = \frac{5}{128}$

16. $x_3x_4 + 1 = (9x + 6)(16x + 8) + 1 = 144x^2 + 168x + 49 = (12x + 7)^2,$

17. $x_3x_5 + 1 = (9x + 6)(25x + 10) + 1 = 225x^2 + 240x + 61 = (15x - 8)^2,$

ἐξ ἧς $x = \frac{1}{160}$

18. $x_3x_6 + 1 = (9x + 6)(36x + 12) + 1 = 324x^2 + 324x + 73 = (18x - 9)^2,$

ἐξ ἧς $x = \frac{1}{81}$

19. $x_4x_5 + 1 = (16x + 8)(25x + 10) + 1 = 400x^2 + 360x + 81 = (20x + 9)^2$

20. $x_4x_6 + 1 = (16x + 8)(36x + 12) + 1 = 576x^5 + 480x + 97 = (24x - 10)^2,$

ἐξ ἧς $x = \frac{1}{320}$

21. $x_5x_6 + 1 = (25x + 10)(36x + 12) + 1 = 900x^2 + 660x + 121 = (30x + 11)^2.$

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν 21 ἐπιταγμάτων τὰ 11 πληροῦνται διὰ πάσας τὰς θετιβὰς τιμὰς τοῦ x, ἐνῷ τὰ 10 δὲν πληροῦνται διὰ πάσας τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ x.

Οἱ γενικοὶ νόμοι ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος.

Καλοῦμεν x ἕνα τῶν n ἀγνώστων ἀριθμῶν, συναρτήσει τοῦ ὁποίου θὰ ἐκφράσωμεν τοὺς λοιπούς. Εἰς τούτους δίδομεν δείκτας 1, 2, 3,... ν, ὡς $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots x_\nu$.

Τὸ πρόβλημα εἶναι

$$\begin{array}{lllll}
xx_1 + 1 = \alpha_1^2 & x_1x_2 + 1 = \beta_1^2 & x_2x_3 + 1 = \gamma_1^2 & x_3x_4 + 1 = \delta_1^2 & \ldots x_{\nu-1}x_\nu + 1 = \xi^2 \\
xx_2 + 1 = \alpha_2^2 & x_1x_3 + 1 = \beta_2^2 & x_2x_4 + 1 = \gamma_2^2 & x_3x_5 + 1 = \delta_2^2 & \\
xx_3 + 1 = \alpha_3^2 & x_1x_4 + 1 = \beta_3^2 & x_2x_5 + 1 = \gamma_3^2 & x_3x_6 + 1 = \delta_3^2 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
xx_\nu + 1 = \alpha^2_\nu & x_1x_\nu + 1 = \beta^2_{\nu-1} & x_2x_\nu + 1 = \gamma^2_{\nu-2} & x_3x_\nu + 1 = \delta^2_{\nu-3}. &
\end{array}$$

Ὡς τετρ. ρίζαν τοῦ τριωνύμου τῆς μορφῆς $\lambda^2 x^2 + \lambda \varkappa x + \mu$ λαμβάνομεν τὴν διαφορὰν $\left(\lambda x - \frac{\lambda \varkappa x}{2\lambda x}\right)$ οὕτως, ὥστε

$$\lambda^2 x^2 + \lambda \varkappa x + \mu = \left(\lambda x - \frac{\varkappa}{2}\right)^2.$$

1. Τὸ πλῆθος τῶν πρὸς πλήρωσιν ἐπιταγμάτων εἶναι $\frac{(n-1)n}{2}$.

2. Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων συναρτήσει τοῦ x εἶναι

$$x_1 = x+2, \text{ ἐκ τοῦ } xx_1+1=(x+1)^2=x(x+2)+1$$
$$x_2=4x+4, \text{ » » } xx_2+1=(2x+1)^2=x(4x+4)+1$$
$$x_3=9x+6, \text{ » » } xx_3+1=(3x+1)^2=x(9x+6)+1$$

Ἐκ τοῦ $xx_\nu+1=(\nu x+1)^2=x(\nu^2 x+2\nu)+1$, $x_\nu=\nu^2 x+2\nu$. ($\nu=1, 2, 3 \ldots$).

3. Τὸ γινόμενον τοῦ x ἐφ' ἕκαστον τῶν λοιπῶν ἀγνώστων σὺν ἓν εἶναι πάντοτε τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$xx_i+1=x(i^2x+2i)+1=(ix+1)^2, \; (i=1, 2, 3 \ldots), \; (1).$$

4. Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀγνώστων σὺν ἓν εἶναι πάντοτε τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$x_i x_{i+1}+1=(i^2x+2i)\left[(i+1)^2x+2(i+1)\right]+1=\left[i(i+1)x+(2i+1)\right]^2, (2)$$

5. Τὸ γινόμενον δύο μὴ διαδοχικῶν ἀγνώστων σὺν ἓν εἶναι πάντοτε τετράγωνος ἀριθμὸς τῆς μορφῆς

$$x_i x_{i+\varkappa}+1=(i^2x+2i)\left[(i+\varkappa)^2x+2(i+\varkappa)\right]+1=\left[i(i+\varkappa)-(2i+\varkappa)\right]^2, \; \varkappa \geqq 2, \; (3).$$

6. Διὰ $n \geqq 3$ τὸ πλῆθος τῶν ἐπιταγμάτων, τὰ ὁποῖα πληροῦνται διὰ πάσας τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ x ἰσοῦται πρὸς $2n-3$, ἐνῷ τὸ πλῆθος τῶν ἐπιταγμάτων τὰ ὁποῖα δὲν πληροῦνται διὰ πάσας τὰς θετικὰς τιμὰς τοῦ x, τὰς περιλαμβανομένας κατ' ἐφαρμογὴν τοῦ ἀνωτέρω τύπου (3), ἰσοῦται πρὸς $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

ZUSAMMENFASSUNG

Diophant löst das Problem vier Zahlen von der Art zu finden, dass die Produkte von je zweien Zahlen vermehrt um 1, ein Quadrat ergeben (Arith. IV 20).

Bemerkung: Man setzt als Quadratwurzel eines Trinoms von der Form $\lambda^2 x^2 + \lambda \varkappa x + \mu$ die Differenz $\left(\lambda x - \frac{\lambda \varkappa x}{2\lambda x}\right)$, so dass

$$\lambda^2 x^2 + \lambda \varkappa x + \mu = \left(\lambda x - \frac{\varkappa}{2}\right)^2 \text{ ist.}$$

Das allgemeine Problem lautet: Es sind n Zahlen, wobei n beliebig gross ist, von der Art zu finden, dass die Produkte von je zweien, vermehrt um 1, ein Quadrat ergeben.

Wir nennen x eine der unbekannten n Zahlen und ordnen die anderen in einer Reihe mit Indizen, wie $x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu$.

1. Die Zahl der Forderungen ist gleich $\frac{(n-1)n}{2}$.

2. Die Werte der unbekannten Zahlen als Funktionen von x sind

$x_1 = x+2$ aus $xx_1+1=(x+1)^2=x(x+2)+1$

$x_2=4x+4$ » $xx_2+1=(2x+1)^2=x(4x+4)+1$

$x_3=9x+6$ » $xx_3+1=(3x+1)^2=x(9x+6)+1$

$x_\nu=\nu^2x+2\nu$ aus $xx_\nu+1=(\nu x+1)^2=x(\nu^2x+2\nu)+1$, $(\nu=1, 2, 3\ldots)$.

3. Das Produkt von x mit je einer der unbekannten Zahlen vermehrt um 1, ist immer ein Quadrat von der Form

$$xx_i+1=x(i^2x+2i)+1=(ix+1)^2, \quad (i=1, 2, 3\ldots), \quad (1).$$

4. Das Produkt von je zweien sukzessiven unbekannten Zahlen vermehrt um 1, ist immer ein Quadrat von der Form

$$x_ix_{i+1}+1=(i^2x+2i)\left[(i+1)^2x+2(i+1)\right]+1=\left[i(i+1)x+(2i+1)\right]^2, \quad (2).$$

5. Das Produkt von je zweien nicht sukzessiven unbekannten Zahlen vermehrt um 1, ist immer ein Quadrat von der Form

$$x_ix_{i+\varkappa}+1=(i^2x+2i)\left[(i+\varkappa)^2x+2(i+\varkappa)\right]+1=\left[i(i+\varkappa)x-(2i+\varkappa)\right]^2, \varkappa\geqq 2, \quad (3).$$

6. Für $n \geqq 4$ ist die Zahl der Forderungen, die gemäss der vorigen Formel (3) für positive Werte von x erfüllt sind, gleich $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$.