ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. **Sur le spectre d'un produit tensoriel infini d'algèbres topologiques,** *par* ***Anast. Mallios****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Κ. Παπαϊωάννου.

1. ALGÈBRES LOCALEMENT CONVEXES.—Tous les espaces vectoriels et les algèbres envisagées seront sur le corps des nombres complexes. Tous les espaces topologiques sont supposés séparés sauf indication du contraire. Une algèbre E munie d'une topologie telle que l'espace vectoriel E soit localement convexe et la multiplication dans E séparément continue s'appelle *algèbre localement convexe*. Une *algèbre localement convexe à multiplication continue* est une algèbre localement convexe dans laquelle la multiplication est continue par rapport aux toutes deux variables. Une classe particulière d'algèbres localement convexes à multiplication continue sont les *algèbres localement* m - *convexes*. Nous renvoyons à [1] pour la définition et des résultats fondamentaux concernant ces algèbres. Dans la suite nous utiliserons aussi la terminologie de [2].

2. LIMITES INDUCTIVES D'ALGÈBRES LOCALEMENT CONVEXES. – Soit $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ un système inductif d'ensembles relatif à un ensemble d'indices I [3] et supposons chaque E munie d'une structure d'algèbre localement convexe. Supposons en outre que les $f_{\beta\alpha}$ soient des homomorphismes continus (*système inductif d'algèbres localement convexes*). Soient $E = \varinjlim E_\alpha$ l'algèbre limite inductive (sans topologie) et f_α, $\alpha \in I$, l'homomorphisme canonique de E_α dans E. On munit E de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues toutes les f_α (topologie limite inductive des topologies des espaces localement convexes E_α). L'espace localement convexe E ainsi obtenu est en effet une algèbre localement convexe (non nécessairement séparée). Or on a le

LEMME 2.1.—*Soit* $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ *un système inductif d'algèbres localement convexes tel que pour tous* $\alpha, \beta \in I$ *avec* $\alpha \leq \beta$, $f_{\beta\alpha}$ *est un homomorphisme continu de* E_α *dans* E_β. *Soit* $E = \varinjlim E_\alpha$ *l'algèbre limite inductive munie de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les* f_α. *Alors,* E *est une algèbre localement convexe* (non nécessairement séparée).

* ΑΝΑΣΤ. ΜΑΛΛΙΟΥ, Περὶ τοῦ φάσματος ἑνὸς ἀπείρου τανυστικοῦ γινομένου τοπολογικῶν ἀλγεβρῶν.

Étant donné un système inductif $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ vérifiant les conditions du lemme 2.1 si l'algèbre localement convexe qui est ainsi définie est séparée, alors elle s'appelle *l'algèbre (localement convexe) limite inductive* du système $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$. Concernant le spectre de cette algèbre on a la

PROPOSITION 2.1. — *Soit E une algèbre localement convexe (non nécessairement séparée) limite inductive d'un système inductif* $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ *d'algèbres localement convexes. Alors le spectre* $\mathfrak{M}(E)$ *de* E *est homéomorphe à la limite projective des spectres* $\mathfrak{M}(E_\alpha)$ *des algèbres* E_α, $\alpha \in I$.

3. PRODUIT TENSORIEL INFINI D'UNE FAMILLE D'ALGÈBRES. — Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie d' algèbres localement convexes et $E = \bigotimes_{i=1}^{n} E_i$ l' algèbre produit tensoriel correspondante. La topologie sur E produit tensoriel projectif des topologies des espaces localement convexes E_i [4] est une topologie d' algèbre localement convexe. En outre, E est (topologiquement) isomorphe à $\bigotimes_{i=1}^{n} E_{\sigma(i)}$ où σ désigne une permutation quelconque de $\{1, \ldots, n\}$, les deux algèbres étant munies de la topologie produit tensoriel projectif (des topologies des algèbres E_i). Alors, si $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille finie d'algèbres localement convexes, on peut définir de façon unique une algèbre $E = \bigotimes_{\alpha \in I} E_\alpha$ localement convexe *produit tensoriel projectif des algèbres* E_α. En ce qui concerne le spectre de cette algèbre on a dans ce cas une extension immédiate du résultat correspondant concernant le spectre d' un produit tensoriel projectif de deux algèbres localement convexes [2]. Quant aux algèbres localement m - convexes, la terminologie supplémentaire sur les raisonnements correspondants est évidemment spécifiée. En outre on a le

LEMME 3.1. — *Soit* $(E_i)_{i \in I}$ *une famille quelconque (non nécessairement finie) d'algèbres localement convexes à élément unité. Pour toute partie finie* α *de* I, *soit* $E_\alpha = \bigotimes_{i \in \alpha} E_i$ *l'algèbre localement convexe, produit tensoriel algébrique de la famille finie* $(E_i)_{i \in \alpha}$ *muni de la topologie produit tensoriel projectif des topologies des algèbres* E_i. *Alors, pour toutes les parties fi-*

nies α, β *de* I *tel que* $\alpha \subseteq \beta$, *il existe un isomorphisme* (*topologique*) $f_{\beta\alpha}$ *de* E_α *dans* E_β *tel que* $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ *est un système inductif d'algèbres localement convexes* (relatif à l'ensemble des parties finies de I ordonné par inclusion).

Le système inductif $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ défini par le lemme précédent satisfait les conditions du lemme 2.1. Alors l' algèbre (topologique) limite inductive qui en est définie est une algèbre localement convexe (non nécessairement séparée). Or on a la

DÉFINITION 3.1.— *Soit* $(E_i)_{i\in I}$ *une famille d'algèbres localement convexes à élément unité. Soit* $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ *le système inductif d'algèbres localement convexes défini par le lemme* 3.1. *Alors si l'algèbre localement convexe* E *limite inductive, correspondante est séparée, elle s'appele l' algèbre produit tensoriel topologique (projectif) infini* (où simplement *l'algèbre* (localement convexe) *produit tensoriel infini*) *de la famille* $(E_i)_{i\in I}$ *et se note* $E = \underset{i\in I}{\otimes} E_i$.

Si dans les algèbres considérées la multiplication est continue, alors chacune des E_α (α une partie finie de I) est une algèbre localement convexe à multiplication continue de sorte que sa complétion, notée par $\hat{E}_\alpha = \underset{i\in\alpha}{\hat{\otimes}} E_i$, l' est aussi.

En particulier, concernant les algèbres localement m-convexes l'algèbre produit tensoriel infini $E = \underset{i\in I}{\otimes} E_i$ est, par définition, une algèbre localement m-convexe (séparée), limite inductive des algèbres (localement m-convexes) $E_\alpha = \underset{i\in\alpha}{\otimes} E_i$ munie de la topologie localement m-convexe la plus fine rendant continues les f_α. Alors sa complétion, notée par $\hat{E} = \underset{i\in I}{\hat{\otimes}} E_i$, est une algèbre localement m-convexe (complète). En outre, $\hat{E}$ est (topologiquement) isomorphe à la complétion $\widehat{\varinjlim}\,(\underset{i\in\alpha}{\hat{\otimes}} E_i)$ de l'algèbre (localement m-convexe) limite inductive $\varinjlim\,(\underset{i\in\alpha}{\otimes} E_i)$.

4. LE SPECTRE D' UNE ALGÈBRE PRODUIT TENSORIEL INFINI.— Les résultats ci-dessous constituent dans le cas d'une algèbre produit tenso-

riel infini une extension des résultats correspondants concernant le spectre d'un produit tensoriel de deux algèbres localement convexes [2]. Ainsi on a le

THÉORÈME 4.1.— *Soit* $(E_i)_{i \in I}$ *une famille d'algèbres localement convexes à élément unité. Soient, de plus,* $E = \bigotimes_{i \in I} E_i$ *l'algèbre (localement convexe) produit tensoriel infini* (Déf. 3.1) *et* $\mathfrak{M}(E)$, $\mathfrak{M}(E_i)$ *les spectres des algèbres* E, E_i *respectivement. Alors*

$$\mathfrak{M}(E) = \prod_{i \in I} \mathfrak{M}(E_i)$$

(à une homéomorphie près).

En particulier, relatif aux algèbres localement m-convexes à spectre équicontinu (pour faciliter les énoncés nous considérons *Q*-algèbres localement m-convexes [1]) on a le

THÉORÈME 4.2.— *Soit* $(E_i)_{i \in I}$ *une famille de Q-algèbres localement* m*-convexes à élément unité. Soient, de plus,* E *l'algèbre localement* m*-convexe produit tensoriel infini et* $\mathfrak{M}(E)$, $\mathfrak{M}(E_i)$ *les spectres des algèbres* E, E_i *respectivement. Alors*

$$\mathfrak{M}(\hat{E}) = \mathfrak{M}(\widehat{\varinjlim}\,(\widehat{\bigotimes_{i \in \alpha}} E_i)) = \prod_{i \in I} \mathfrak{M}(E_i)$$

(à une homéomorphie près).

Concernant l'hypothèse implicite dans les énoncés des théorèmes précédents que l'algèbre E est séparée (cf. Déf. 3.1), on remarque qu'elle n'est pas nécessaire dans leur démonstration (cf. aussi Prop. 2.1).

En outre, en appliquant les raisonnements dévelopés ci-dessus on obtient une autre démonstration du résultat suivant:

THÉORÈME 4.3. (TAKEDA [5]). — *Soit* $(E_i)_{i \in I}$ *une famille de* B^**-algèbres commutatives à élément unité. Soient, de plus,* $E = \bigotimes_{i \in I} E_i$ *la* $*$*-algèbre (normée) produit tensoriel infini et* $\mathfrak{M}(E)$, $\mathfrak{M}(E_i)$ *les espaces des ideaux maximaux (munis de la topologie de Gelfand) (spectres) des algèbres* E, E_i *respectivement. Alors*

$$\mathfrak{M}(\hat{E}) = \prod_{i \in I} \mathfrak{M}(E_i)$$

(à une homéomorphie près), où $\hat{E}$ *est la* (B^**-algèbre) complétion de* E.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Δοθείσης μιᾶς οἰκογενείας (μὴ κατ' ἀνάγκην πεπερασμένης) τοπικῶς κυρτῶν ἀλγεβρῶν, ορίζεται μία (τοπικῶς κυρτὴ) ἄλγεβρα, ἄπειρον τανυστικὸν γινόμενον τῆς δοθείσης οἰκογενείας, καὶ μελετᾶται τὸ φάσμα τῆς ἐν λόγῳ ἀλγέβρας ἐν σχέσει πρὸς τὰ φάσματα τῶν ἀλγεβρῶν τῆς δοθείσης οἰκογενείας.

RÉFÉRENCES

1. E. A. MICHAEL, Mem. Amer. Math. Soc. No 11 (1952).
2. A. MALLIOS, Math. Ann. 154 (1964), 171 - 180.
3. N. BOURBAKI, Act. Sci. et Ind. 1044 (1962).
4. A. GROTHENDIECK, Mem. Amer. Math. Soc. No 16 (1955).
5. Z. TAKEDA. Tôhoku Math. J. 7 (1955), 67 - 86.

(Institut mathématique, Université d'Athènes).

*

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Κ. Παπαϊωάννου**, κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν τῆς ὡς ἄνω ἐργασίας, εἶπε τὰ ἑξῆς:

Ὁ κ. Ἀ. Μάλλιος εἶναι πτυχιοῦχος τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, ὁ ὁποῖος εἰργάσθη ἐρευνητικῶς ὑπὸ τὴν καθοδήγησιν τοῦ Καθηγητοῦ κ. Κάππου, εἰς τὴν κατεύθυνσιν τῆς γενικευμένης θεωρίας τοῦ ὁλοκληρώματος ἐν συνδυασμῷ μὲ τὴν θεωρίαν τῶν διατεταγμένων συνόλων.

Σχετικὴ ἐργασία τοῦ κ. Μάλλιου ὑπεβλήθη εἰς τὴν Φυσικομαθηματικὴν Σχολὴν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, ὡς διατριβὴ ἐπὶ διδακτορίᾳ, ἐγκριθεῖσα μὲ τὸν βαθμὸν ἄριστα. Κατόπιν διετοῦς παραμονῆς εἰς τὸ ἐξωτερικόν, ὁ κ. Μάλλιος ἐπέστρεψεν εἰς τὴν Ἑλλάδα, ὅπου ἐργάζεται εἰς τὸ Βασιλικὸν Ἵδρυμα Ἐρευνῶν ὡς ἐπιστημονικὸς συνεργάτης τοῦ Καθηγητοῦ κ. Κάππου.

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν του ὁ κ. Μάλλιος θεωρεῖ μίαν οἰκογένειαν τοπικῶς κυρτῶν τοπολογικῶν ἀλγεβρῶν, αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν ὡρισμένας ὑποθέσεις. Αἱ τοπικῶς κυρταὶ τοπολογικαὶ ἄλγεβραι εἶναι ὡρισμέναι ἐπὶ τοῦ μιγαδικοῦ σώματος· ὡς παράδειγμα δὲ ὡρισμένων ὑποθέσεων, τὰς ὁποίας ἱκανοποιοῦν αὗται, σημειοῦμεν ὅτι οἱ τοπολογικοὶ χῶροι εἶναι χωρισμένοι.

Ἐν συνεχείᾳ ὁ κ. Μάλλιος ὁρίζει μίαν τοπικῶς κυρτὴν τοπολογικὴν ἄλγεβραν ὡς ἄπειρον τανυστικὸν γινόμενον τῆς θεωρηθείσης οἰκογενείας τῶν ἀλγεβρῶν καὶ μελετᾷ τὸ φάσμα τοῦ οὕτως ὁρισθέντος τανυστικοῦ γινομένου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐπιτυγχάνει γενίκευσιν ἀποτελεσμάτων γνωστῶν εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ φάσματος ἑνὸς τανυστικοῦ γινομένου δύο τοπολογικῶν ἀλγεβρῶν τοπικῶς κυρτῶν. Τὸ ἐνδιαφέρον τῆς γενικεύσεως αὐτῆς εἶναι σημαντικόν.

Ἀπὸ ἀπόψεως διατυπώσεως ἡ παροῦσα ἐργασία τοποθετεῖται εἰς τὰ πλαίσια τῆς Γαλλικῆς Σχολῆς τῶν Bourbaki καὶ εἶναι ἀξιοσημείωτος ἡ ἄνεσις καὶ ἡ οἰκειότης, μὲ τὴν ὁποίαν ὁ κ. Μάλλιος χειρίζεται τὰς μεθόδους τῶν Bourbaki καὶ γενικώτερον τῶν νεωτέρων Μαθηματικῶν.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Sur la localisation des zéros des polynômes,** *par* ***Jeanne Ferentinou - Nicolacopoulou****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Κ. Παπαϊωάννου.

§ 1. **Introduction.** Nous considérons un polynôme entier f de la variable complexe z et nous cherchons des domaines du plan complexe, contenant tous les zéros de la dérivée de f qui ne coïncident pas avec un zéro de f. L'ensemble des domaines que nous trouvons est différent du domaine connu par le théorème des Gauss - Lucas [3], [5] pour ces zéros. Si nous appelons U l'ensemble des points qui appartiennent dans ces domaines et L l'ensemble déterminé par Gauss - Lucas, pour les zéros du polynôme f′ les différents des zéros du f, nous aboutissons à la conclusion : *Tous les points critiques*** *du polynôme f les différents de ses zéros, appartiennent à l' intersection* U ∩ L, *sous - ensemble stricte de* L.

§ 2. **Positions des points critiques d'un polynôme entier quant à l'ensemble p - 1 de cercles.** Soit

$$f(z) = (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_p)^{m_p} , \qquad (1)$$

où z est une variable complexe, $p \geqslant 2$ et $m_1 , \dots , m_p$ les degrés de multiplicité des zéros $z_1 , \dots , z_p$ de f respectivement.

Nous appelons n le degré de ce polynôme. Il est par conséquent

$$n = m_1 + \dots + m_p . \qquad (2)$$

---

* ΙΩΑΝΝΑΣ ΦΕΡΕΝΤΙΝΟΥ - ΝΙΚΟΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ, Περὶ τοῦ ἐντοπισμοῦ τῶν ῥιζῶν τῶν πολυωνύμων.

** Points critiques du polynôme f, s'appellent les zéros de sa dérivée. [Voir Marden [6], pag. 11].