

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. — **La Géométrie infinitésimale directe, à partir de ses origines naturelles (seconde partie)**, par G. Bouligand\*, Paris. Ἀνεκρινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Κωνσταντίνου Π. Παπαϊωάννου.

16. *Intégrales paratingentes d'une équation  $f(x, y, z, p, q) = 0$ . Applications diverses.* Reprenons le cône élémentaire de  $f = 0$ , en vue de conférer à notre thème, dès le départ, l'aspect géométrique. On appelle «paringente» une surface intégrale de  $f = 0$ , pour laquelle a lieu en chaque point la planéité du paratingent, bien entendu en s'imposant une condition adéquate, telle la suivante: dans la région utile  $f$  est réductible à la forme  $z = \varphi(x, y, p, q)$ , en admettant outre la continuité de  $\varphi$ , sa nature lipschitzienne en  $x, y, p, q$ . On explique ainsi le rôle exceptionnel des arêtes de rebroussement intervenant sur une intégrale, vu qu'en chacun de leurs points, le paratingent inclut toute direction. La courbe lieu des rebroussements est donc toujours «un bord» pour une intégrale paratingente.

Les notions qui précèdent ont donc, à titre de caractère invariant, le fait qu'on passe toujours d'une surface, intégrale paratingente, à une autre nouvelle, en toute transformation appartenant à la topologie restreinte du premier ordre. À ce titre, mieux vaut d'ailleurs s'en tenir au point de vue local<sup>1</sup>.

Le problème crucial est introduit par un cas restreint, auquel je vais m'en tenir: le cône élémentaire de  $z = \varphi$  est convexe. On cherche le type dégénérescent de nos intégrales dans le cas où ce cône vient à s'aplatir, le plan mis en cause ayant lui-même une distribution lipschitzienne (en résolvant encore par rapport à  $z$ ), et de plus, le cas de réduction du cône à une droite.

Dès la réduction à un plan, l'équation  $z = \varphi$  tend vers une équation

---

\* G. BOULIGAND, Ἡ ἄμεσος διαφορική γεωμετρία ἀπὸ τῶν φυσικῶν ἀρχῶν αὐτῆς (μέρος δεύτερον).

1. Même remarque à propos de l'intégration contingente; à ce titre l'invariance est le fait d'un groupe élargi; mais je laisse de côté ces choses un peu subtiles.

aux différentielles totales, dotées sans plus de «lignes intégrales», problème pour lequel on justifie cette propriété: lesdites courbes sont dès lors, du type «arête de rebroussement»<sup>1</sup>.

Enfin, dans le cas de réduction à une droite, on obtient un système différentiel. En maintenant la condition de Lipschitz, on retrouve en tout point l'unicité de la courbe intégrale qui passe en ce point.

17. Un cas prototype du dernier alinéa ci-dessus est fourni par l'équation

$$(E_0) \quad (p - y - \varepsilon)^2 + q^2 = \varepsilon g(x, y, z, p, q) \quad (\varepsilon \text{ étant un } \textit{infinitement petit}).$$

Pour étudier le phénomène produit, il suffit d'ailleurs de faire  $g \leq 1$  et même de s'en tenir au cas  $g = 1$  où n'interviennent plus  $x, y, z, p, q$ . Ce choix simple est bon guide.

D'abord à toute  $f(x, y, p, q) = 0$  on peut substituer le couple d'équations  $p = \varphi(x, y, u)$ ,  $q = \psi(x, y, u)$ , d'où l'équation

$$(e) \quad \psi_u \frac{\partial u}{\partial x} - \varphi_u \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi_y - \psi_x,$$

«linéaire» en  $u_x, u_y$ <sup>2</sup>, dont les caractéristiques peuvent s'écrire

$$(K) \quad \frac{dx}{\psi_u} = \frac{-dy}{\varphi_u} = \frac{dz}{\varphi_y - \psi_x}.$$

Reprenons l'équation  $(E_0)$ , qui devient à la limite  $(p - y)^2 + q^2 = 0$ , soit encore  $dz = ydx$ . Son cône élémentaire, lequel est du second degré pour  $\varepsilon \neq 0$ , s'aplatit quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Suivant la marche prescrite, on obtient

$$p = y + \varepsilon(1 - \cos u), \quad q = \varepsilon \sin u.$$

Cherchons la surface passant par la courbe suivante

$$(C) \quad x = v, \quad y = f'(v), \quad z = f(v),$$

1. Annali di Matematica, t. XLX, 1961.

2. Sans modifier la méthode, on retrouve les caractéristiques de l'équation générale  $f(x, y, z, p, q) = 0$  en l'écrivant  $p = A(x, y, z, u)$ ,  
 $q = B(x, y, z, u)$ .

dont la tangente demeure à l'intérieur du cône, pour tout  $\varepsilon$ . Cela donne pour (K)

$$\frac{dx}{\cos u} = \frac{dy}{\sin u} = \varepsilon du,$$

d'où la solution du problème de Cauchy pour la surface ( $\sigma$ ) demandée :

$$\begin{aligned} x &= v + \varepsilon \sin u, & y &= f'(v) + (1 - \varepsilon) \cos u, \\ z &= f(v) + \varepsilon f'(v) \sin u + \varepsilon^2/2 (4 \sin u - 3 \sin u \cos u - u), \end{aligned}$$

ce qui donne, sur ( $\sigma$ ) des arêtes de rebroussement

$$\sin u + \cos u f''(v), \quad \text{d'où } u = \text{Arc tg } f''(v) + K\Pi,$$

K pouvant devenir arbitrairement grand.

D'où la conclusion : la présence simultanée de  $\varepsilon$  et de K introduit sur ( $\sigma$ ) des rebroussements de plus en plus resserrés.

18. De cet exemple, on passe facilement à des cas plus généraux, tel celui dans lequel (C) est trajectoire d'un «groupe continu» à un paramètre  $\lambda$ , «conservant quel que soit  $\lambda$ », l'équation élargie

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Dès lors, ce groupe a le même effet que dans l'exemple du n° 17. Les arêtes de rebroussement d'une intégrale passant par C vont toujours en s'accumulant.

19. Bien entendu, de tels exemples sont vraiment suggestifs, sans toutefois donner la solution générale. Peut-être l'obtiendrait-on, à partir de cette remarque sans doute utilisable (la chose n'étant proposée qu'au bénéfice d'inventaire) : avec des solutions du type indiqué dans l'exemple du n° 18, on peut s'approcher ad libitum du cas général, comme on s'approche d'une ligne rectifiable par une ligne polygonale. Mais, je ne puis rien affirmer à ce titre<sup>1</sup>!

---

1. Un autre exemple, lui-même trop restreint, a fait l'objet d'un travail publié aux *Annali di Matematica*, t. XLX, 1961. Voir la fin du n° 16. En ce qui touche aux équations du type  $F(p - y, q, \mathbf{x}) = \varepsilon$  voir aussi : microphénomènes en géométrie différentielle d'un  $R^3$  : Cf. *Celebrazioni Archimedes* 11-16 avril 1961 (*Géom. diff*<sup>1e</sup>) pp. 35-40.

20. *Exemples divers de microphénomènes.* Les cas proposés aux n<sup>os</sup> 17, 18, 19 apportent déjà quelques éléments en faveur de ce thème. Toutefois, ils restent dans l'Analyse classique. On y peut voir des exercices, au besoin, très ardu. Or, la suite va nous le montrer, l'intérêt s'accroît dès qu'on en vient au discontinu.

Au départ et d'une manière fort timide, lesdits phénomènes pointent déjà dans un exemple fort simple: au bazar, ayant fait emplette d'une boule, un vendeur aimable prend un grand papier bien lisse pour bien l'envelopper! Il la serre contre elle, très vigoureusement, non d'ailleurs sans y produire des «froissements» accompagnés de «superpositions». On est même conduit, de ce fait et en chaque point de la boule, un «indice de superposition» bientôt candidat au rôle insigne de «quantum». Mais pour en tirer de l'intérêt, il nous faut d'abord utiliser des cas particuliers.

À cette intention, reprenons la boule sphérique B et donnons d'abord au tissu T une configuration cylindrique et verticale  $T_0$  circonscrite à B. Sur l'équateur de B, plaçons un «élastique ( $E^1$ ) fortement constricteur». Dès lors, si l'on fait monter ( $E^1$ ), en veillant à ce qu'il reste horizontal, l'effet produit sera d'écraser chaque parallèle du cylindre sur le parallèle de B ayant même cote z. Accrue avec z, la perte en longueur que subit un parallèle de T détermine, aussitôt qu'on abandonne l'équateur, des «superpositions du type annoncé». L'indice afférent croît sans limite à l'approche du pôle. Ladite expérience peut d'ailleurs se répéter en prenant deux boules égales B, B', inscrites dans  $T_0$ . Les froissements et superpositions sont dès lors réservés aux deux hémisphères extérieures, rien n'intervenant sur le cylindre  $T_0$  entre les deux équateurs E, E', sauf peut-être, en deux bandes infimes voisinant E, E' si le tissu T a quelque raideur.

Mais, je dois citer une nouvelle expérience de grand intérêt: on y réalise un sac de cellophane empli de «microbilles», dont certaines touchent la frontière, les autres demeurant à l'intérieur. Ce qui met en présence deux microphénomènes, à savoir ( $\mu\varphi$ )<sub>1</sub> présence des billes à l'intérieur du sac ( $\mu\varphi$ )<sub>2</sub>, fait que celles, tangentes à la paroi, le contact pouvant du point de vue théorique, de créer des froissements et superpositions, mais sur une calotte où ils sont «pratiquement inobservables», le diamètre de cette calotte étant infiniment petit par rapport à celui des billes.

En définitive, en ces deux «phénomènes interdépendants», jaillissent des questions d'échelles, qui reproduisent des faits analogues à celui que livre l'hydrodynamique à la comparaison de la turbulence et du mouvement brownien.

D'où cette question : Est-il bon de rapprocher «micro-géométrie» et «microphysique» ?

Bien entendu, on y peut voir un premier motif d'intérêt : Une «synthèse géométrique» peut conduire à simplifier un exposé d'une «synthèse physique», au même objet. Sans prétendre outrepasser de beaucoup cette remarque, il est juste de rappeler divers cas, rencontrés par les expérimentateurs, où une idée préconçue est capable de leur faciliter les accès d'un nouveau thème.

D'ailleurs, on connaît des modèles géométriques pour les incertitudes d'Heisenberg : le promeneur, qui ne se lasse point de parcourir la côte, tout au bord d'un rivage, et qui met en parallèle, avec les changements directionnels ainsi mis en cause le schème de sa carte favorite, réalisé à une échelle bien inférieure, se doit d'en reconnaître l'infidélité. Et dualistiquement, au lieu de passer des points aux tangentes, on peut faire l'inverse. Or la structure dualistique est inhérente à la Mécanique quantique<sup>1</sup>.

### **21. Sous l'influence des problèmes cosmiques ; le devenir tout récent des entités spatiales.**

Fort anciens, les problèmes cosmiques se sont imposés dès la création, à l'éclat nocturne des étoiles. Cependant n'ont-ils pris rang dans la Science qu'à partir de Kepler, de Galilée, de Newton. On doit à ce dernier la loi fameuse de l'attraction universelle, dont l'intérêt fut doublé, quand voulant une meilleure concordance entre l'observation des planètes et les calculs s'y rapportant, Lagrange et Laplace eurent fondé la théorie des perturbations, laquelle opère sur des quantités suffisamment petites, pour que la Mécanique céleste, aux calculs redoutables, s'en trouve simplifiée : construction d'ailleurs efficace ! On le vit quand, à la fin du 18<sup>e</sup> siècle, l'astronome Bouvart, en examinant les tables d'Uranus,

---

1. Cf. Relations d'incertitude en géométrie et en physique aux «Actualités scientifiques et industrielles Hermann», fasc. 143 (1933), avec une préface de Louis de Broglie.

signala des anomalies dans le comportement de cette planète, car on ne pouvait le réduire aux seules perturbations de Jupiter et de Saturne. Ce qui permit à Leverrier, maître en orbites, de localiser une autre planète, qu'il se permit — chose fort heureuse — de supposer «unique» et qui prit le nom de Neptune<sup>1</sup>. Or, à peu près deux ans avant, le même avait signalé le «déplacement séculaire du périhélie de Mercure», soit environ 43 secondes (en tablant sur la division sexagésimale de la circonférence). Pourtant, malgré l'appel de Leverrier à ses collaborateurs de l'Observatoire, il fût impossible de découvrir une nouvelle planète dans la banlieue solaire. La question ne fût réglée, vers 1915, qu'à la mise en oeuvre de la théorie einsteinienne de la Relativité Généralisée, et à ce titre du recours à un «espace riemannien» qu'on appela, sous un autre nom, «l'Univers».

22. Il nous faut donc étudier, à titre liminaire, divers types d'espaces; cet appui géométrique est une base nécessaire à l'étude, toujours en devenir, des problèmes cosmiques.

À cette fin, il sera commode, voire nécessaire, de «veiller à la terminologie».

Le modèle entre les plus courants d'espace riemannien se présente au moment d'évaluer un élément d'arc sur une surface  $S$ , par un calcul bien classique

$$ds = \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \text{ (avec } EG - F^2 > 0),$$

$E, F, G$  étant fonctions des paramètres  $(u, v)$  qui déterminent un point de  $S$ . En divisant par l'élément de temps  $dt$ , on passe aux vitesses, d'où

$$V^2 = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2.$$

---

1. Le thème éclairé de la sorte avait donc pris naissance en «inversant» le problème résolu par Lagrange et Laplace. On le sait d'ailleurs, une telle inversion est le résultat d'un réflexe humain, acquis de l'aurore de la création par nos lointains ancêtres: pour se procurait de la nourriture, ils devaient en effet cheminer du gîte au «centre de ravitaillement» et d'une manière très consciente, revenir au gîte, ayant gardé le souvenir de clairières ou de roches abruptes dans la forêt. Démarches reproduites chez Neper (exponentielles et logarithmes) puis chez Leibniz (problème des aires, problème des tangentes), en faveur du Calcul infinitésimal.

Pour un point  $(u, v)$  de  $S$ , considérons la courbe décrite par l'extrémité du vecteur  $(u', v')$  pour  $|V|$  constant. Sa trajectoire est une ellipse de centre  $(u, v)$ . On la désigne sous le nom d'«indicatrice». Comme telle, on peut dire qu'elle caractérise la métrique de  $S$ .

Pour le cas de  $n$  dimensions, on obtient de même une forme quadratique à  $n$  variables avec une «indicatrice» dont la frontière admet  $\underline{n - 1}$  dimensions.

Or «l'indicatrice est la notion fondamentale», qui va nous permettre d'aller plus loin dans une étude systématique des espaces.

Un premier point va consister à montrer ici le «péril des conventions arbitraires». Elles apparaissent dès qu'on est tenté de faire appel à une «indicatrice non-convexe»!

23. L'exemple suivant, où l'on fait intervenir ce cas dangereux, va nous conformer dans la prudence. Supposons qu'on prenne

$$ds^4 = (du^2 + 24 dv^2) (24 du^2 + dv^2),$$

après avoir choisi l'indicatrice

$$(j) (\xi^2 + 24 \eta^2) (24 \xi^2 + \eta^2) = 1.$$

Cette ligne (j) a deux points d'inflexion dans chaque quadrant, lesquels vont être symétriques par rapport à la bissectrice correspondante. La métrique afférente n'est pas altérée par les translations, dans le plan des  $\xi, \eta$ . Considérons la partie de cette courbe incluant tout point d'abscisse positive. Au moyen d'une figure, on voit qu'elle réunit trois arcs convexes, et deux arcs concaves. L'un de ces derniers  $ij$  est dans l'angle droit où les deux coordonnées sont positives. Cela dit, les mesures de longueur se feront comme suit. Dans le plan  $(\xi, \eta)$  prenons un vecteur  $\vec{V}$ ; alors, les translations en laissent invariante la longueur. Si maintenant, on en prend deux autres  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  en ayant soin d'adopter les hypothèses suivantes :

$$1^\circ \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2.$$

2° Les 3 vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  et  $\vec{V}$  sont, quand on les fait partir de l'origine dans le secteur  $Oij$ , où l'arc  $\widetilde{ij}$  est concave dans la frontière de

Oij, on a, entre les longueurs de ces vecteurs, la relation d'inégalité (vraiment paradoxale) :

$$L|\vec{V}| > L|\vec{V}_1| + L|\vec{V}_2|.$$

Dès lors, le minimum de longueur ne peut-il être obtenu par  $|\vec{V}|$ . Le minimum de longueur de  $\vec{V}$  a lieu dès lors pour toute ligne polygonale joignant les points O et V et dont les côtés sont alternativement parallèles à Oi et Oj, aussi bien que pour les arcs en livrant des configurations limites<sup>1</sup>.

24. *Les espaces variationnels.* Convenons de regarder les «espaces riemanniens» d'un point de vue solidaire de leur définition initiale, lequel table sur les «lignes géodésiques», dont une partie suffisamment réduite donne un minimum de longueur entre ses deux extrémités. En présence de telles hypothèses, l'attention se porte bientôt vers un «groupement de problèmes» incluant le précédent. Cela, par l'entremise du Calcul des Variations, qui se donne pour objet l'atteinte de pareils minima.

Introduisons maintenant, avec précaution, «l'indicatrice» qui permet de séparer les problèmes de ce genre en divers types.

Pour les géodésiques ordinaires, au n° 22, cette ligne : elle consiste, alors, pour un lieu géométrique bidimensionnel, à une ellipse centrée en chaque point où l'on veut construire ladite indicatrice.

Quand on passe aux géodésiques variationnelles, la chose est plus délicate. D'abord, comme on l'a vu au n° 23, une extension ne pourrait être «naturelle» qu'en entourant chaque point, dans le cas bidimensionnel, d'un contour fermé convexe (ce qu'il est facile d'étendre à des dimensions plus élevées).

Or, pour les espaces de Riemann à deux dimensions, l'indicatrice «admet un centre» ! Bien entendu, il peut arriver qu'il en soit de même dans les espaces variationnels. Mais cela, il y faut veiller, ne s'impose en rien. D'où cette conséquence importante : ou bien, on prend une «indicatrice partout centrée». Dès lors, en toute l'étendue de la variété, la longueur d'arc ne dépend pas du sens de parcours. Dans le cas contraire, le sens intervient dans le calcul de la longueur.

---

1. N. B. : pour les deux figures de ce §, prière de se reporter tout à la fin du présent exposé.



Enfin, pour concevoir un espace variationnel  $V$ , il suffit de recourir à un espace euclidien  $\varepsilon_n$  de même dimension, où l'on se donne partout l'indicatrice, dans les cas où  $V$  est illimité, ou tout simplement une région délimitée quand on s'en tient à des propriétés locales.

Ces rapides indications vont nous permettre une étude ayant pour objet deux thèmes connus, empruntés à la Relativité générale.

25. *Le périhélie de Mercure.* Dans le premier, on obtient un accord très net entre la théorie et l'observation. Les calculs ont été effectués en recourant au  $ds^2$  à 4 variables et à «symétrie sphérique» de Schwarzschild.

Or dans ce cas, la symétrie sphérique est pleinement justifiée. Et de fait, non seulement quand on les rapporte à la masse du Soleil, les planètes autres que Mercure donnent un résultat très faible, mais encore ce qui prévaut, les potentiels newtoniens donnent un résultat tout-à-fait insignifiant<sup>1</sup>.

26. D'où un contraste frappant dans le second thème indiqué, où il s'agit du «comportement d'un rayon lumineux dans un champ de gravitation»: ce qui ressort nettement à la page 65, du beau livre de Madame Marie-Antoinette Tonnelat: «Les preuves expérimentales de la Relativité»<sup>2</sup>. Le flottement qui s'introduit inopinément dans les observations faites lors des éclipses totales de Soleil atteint une valeur de 10 à 20 ‰. Bien entendu, on est alors en présence d'un phénomène où l'on doit renoncer à la symétrie sphérique. Mais comment parvenir à l'expliquer?

27. Je ne pouvais atteindre cet objectif sans tabler sur un recours géométrique approprié, ce qui va nous éloigner nettement de ce qui précède.

Je suis parti d'un problème d'examen: on établit une correspondance (1,1) entre les points d'une surface  $S$  et les arcs  $\alpha$  découpés sur des courbes, éléments d'une congruence, par deux autres  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

1. Rompre dans l'occurrence avec la Relativité générale n'importe guère, vu que les conséquences de l'attraction newtonienne, en dehors de l'avance infime du périhélie de Mercure sont négligeables.

2. Paris, éd. de la librairie Masson, 1966.

Passer du  $ds^2$  de S à l'élément d'aire d'une bandelette engendrée par ces arcs. Il faut, à ce deuxième titre, appliquer à la surface  $\Sigma$  décrite par  $\beta$ , l'expression de l'aire élémentaire et l'intégrer le long d'un arc  $\alpha$ . De ce calcul, on tire alors une «métrique variationnelle» avec «indicatrice centrée».

En définitive, on voit ici l'unité du cheminement suivi.

28. Appliquons maintenant ladite remarque à la discussion entamée (n° 26). Bon gré, mal gré, faut-il introduire un postulat; je propose le suivant :

Faute d'une symétrie sphérique en un thème où le Soleil est déjà mis en cause, je devrais prendre le  $ds^2$  d'un Univers «rappelant celui d'Einstein». Pour le choisir, j'ai cru bon de mettre en ligne les phénomènes de type nucléaire déterminés par explosions violentes (avec rythme aléatoire) produites à l'intérieur même du Soleil et perceptibles dans les Observatoires grâce aux ondes électromagnétiques, venant ainsi les atteindre.

Partons maintenant du  $ds^2$  de Schwarzschild. Notre équipée du genre probabiliste nous amène à calculer le résultat obtenu en intégrant ce  $ds^2$  par rapport au temps propre, ce qui confère également à ce  $ds^2$  une structure aléatoire. Tant et si bien que les différents observateurs chargés de mission lors des éclipses totales trouveront des résultats différents.

#### C O N C L U S I O N

J'ai demandé, non sans hardiesse, à mes lecteurs, de me suivre dans une équipée, d'ailleurs en terrain varié, lequel ne ressemble guère aux propos familiers de la Mathématique actuelle.

Je crois bon de le faire : jamais on n'insistera d'une manière suffisante sur l'Histoire qui, non contente de remonter à la Genèse des idées en conserve l'acquis. Or, nul n'oublie actuellement la théorie des nombres figurés, dans la production de l'École pythagoricienne, ce qui n'a pas empêché l'éclosion du Calcul infinitésimal.

C'est par là que je voulais finir !

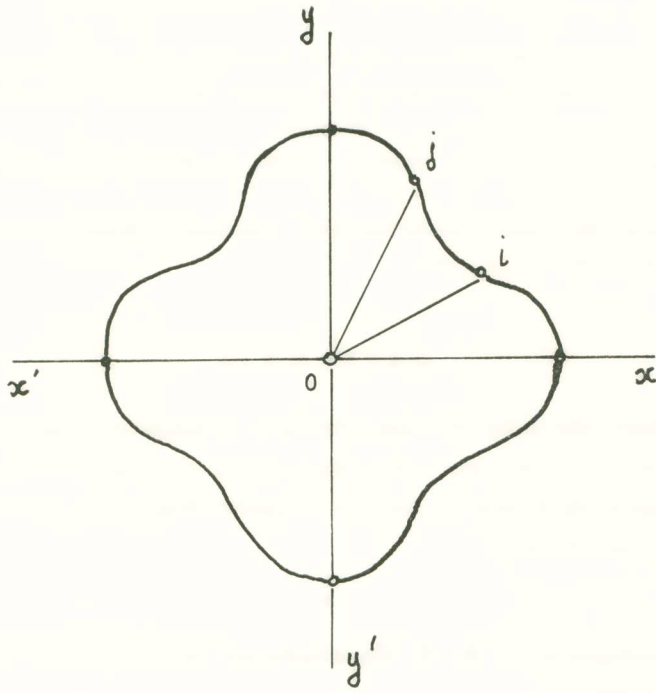


Fig. 1.

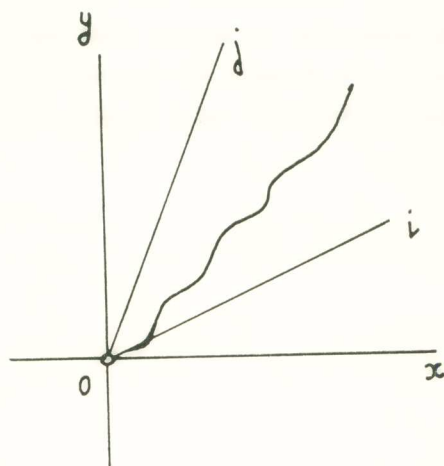


Fig. 2.

## BIBLIOGRAPHIE SUPPLÉMENTAIRE

1. Essai sur «*L'Unité des méthodes directes*» (synthèse de conférences, M. Lucien Godeau et beaucoup d'autres Collègues.) Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, p. 1 - 88, 1933.
2. *Transformations conservant les volumes*. Annali di Matematica, t. XLVIII, 1959, p. 533 - 560.
3. MARCEL COZ, Métriques variationnelles régulières, Mémoires de l'Académie des Bruxelles, t. 33, 1961.

## Π Ε Ρ Ι Λ Η Ψ Ι Σ

Συνεχίζων τὴν ἀνάπτυξιν προγενεστέρας γεωμετρικο-αναλυτικῆς ἐργασίας του, συνδυάζει, εἰς τὸ δεύτερον τοῦτο μέρος αὐτῆς, ὁ συγγραφεὺς τὰς σκέψεις του καὶ πρὸς θέματα τῆς Κλασσικῆς καὶ τῆς Οὐρανίου Μηχανικῆς, ὡς ἐπίσης καὶ τῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητος.

★

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Κ. Π. Παπαϊωάννου** ἀνακοινῶν τὴν ὡς ἄνω ἐργασίαν εἶπε τὰ ἑξῆς :

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν του ὁ κορυφαῖος Γάλλος γεωμέτρης Georges Bouligand συνεχίζει τὴν σπουδὴν, τὴν ὁποίαν ἤρχισεν εἰς τὴν προηγουμένην ἀνακοίνωσίν του εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν.

Καταδεικνύει, ἐδῶ, τὴν σπουδαιότητα τῶν ὑπ' αὐτοῦ εἰσαχθεῖσῶν ἐννοιῶν τῆς εὐθείας διαφορικῆς γεωμετρίας εἰς θέματα τόσον ποικίλα, ὅσον αἱ ἐξισώσεις μὲ μερικὰς παραγώγους (εἰς τὴν θεωρίαν τῶν ἐπιφανειῶν), ἡ Μηχανικὴ, ἡ Οὐράνιος Μηχανικὴ, οἱ χῶροι τοῦ Riemann καὶ ἡ θεωρία τῆς Σχετικότητος.