ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.—**Σφαιροκεντρικαὶ γραμμαὶ διαφόρων τάξεων δοθείσης καμπύλης**, ὑπὸ ***Νείλου Σακελλαρίου***. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασιλ. Αἰγινήτου.

1. Ἔστω (γ) καμπύλη εἰς τὸν Εὐκλείδειον χῶρον (x_1, x_2, x_3) τάξεως C^4 μὲ διανυσματικὴν ἐξίσωσιν $x = x(s)$, ὅπου s παριστάνει τὸ μῆκος τόξου αὐτῆς (μετρούμενον ἀπό τινος σημείου της), μὲ ἀκτῖνα καμπυλότητος $\rho(s) = \varkappa^{-1}(s)$ ἢ $\varkappa(s) = \rho^{-1}(s)$ ἡ καμπυλότης αὐτῆς μὲ στρέψιν $\sigma(s) = \tau^{-1}(s) \neq 0$ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς $M(x(s))$, ἐνῷ εἶναι $\varkappa(s) = /\ddot{x}(s)/ > 0$, τοῦ συμβόλου $\dot{}$ παριστάνοντος τὸ $^d/_{ds}$. Ἡ $\varkappa(s)$ ἔχει συνεχῆ παράγωγον τάξεως C^2 καὶ ἡ $\sigma(s)$ τάξεως C^1. Ἂν X_i $(i = 1, 2, 3)$ παριστάνουν τὰ μοναδιαῖα διανύσματα ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης, ἐπὶ τῆς α′ καὶ β′ καθέτου εὐθείας τῆς (γ) εἰς τὸ M (συνιστῶντα δεξιόστροφον τρίεδρον), θὰ εἶναι

$$X_1 = \dot{x}(s), \qquad X_2 = \varkappa^{-1}.\ddot{x}(s), \qquad X_3 = X_1 \times X_2, \tag{1}$$

τοῦ συμβόλου $\times$ παριστάνοντος διανυσματικὸν γινόμενον.

2. Ἂν ἀντὶ τοῦ τριέδρου τῶν X_i (τοῦ Frenet) θεωρήσωμεν τὸ τῶν $\bar{X}_i$, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $\bar{X}_1 = X_1$, τὰ δὲ $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$ προκύπτουν διὰ στροφῆς τῶν X_2, X_3 περὶ τὸ M καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $X_2 X_3$ τῆς (γ) εἰς τὸ M κατὰ γωνίαν ἔστω φ, θὰ εἶναι

$$\left.\begin{aligned} \bar{X}_1 &= X_1 \\ \bar{X}_2 &= \dot{X}_2 \,\text{συνφ} + \dot{X}_3 \,\text{ημφ} \\ \bar{X}_3 &= -\dot{X}_2 \,\text{ημφ} + \dot{X}_3 \,\text{συνφ} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ἐνῷ ἔχομεν

$$\text{ημφ} = {}^{\rho}/_{\bar{r}}\,, \qquad \text{συνφ} = {}^{\rho}/_{\bar{\rho}} = k(\dot{\rho}\tau)/\bar{r}\,, \qquad \bar{\rho} = \rho\cdot\bar{r}/_{k(\dot{\rho}\tau)},$$

τοῦ k παριστάνοντος ἀριθμὸν (πραγματικὸν) $\neq 0$,

$$r = (M\bar{P}) = [\rho^2 + (k\dot{\rho}\tau)^2]^{1/2},$$

ἂν P εἶναι ἡ τομὴ τοῦ ἄξονος καμπυλότητος τῆς (γ) εἰς τὸ M ὑπὸ τῆς εὐθείας τοῦ $\bar{X}_3$,

$$\rho = (MK),$$

ἂν K εἶναι ἡ τομὴ τοῦ ἐν λόγῳ ἄξονος καμπυλότητος ὑπὸ τῆς εὐθείας τοῦ $\bar{X}_2$,

$$KP = k. \ KP_s = k.\ (\dot{\rho}\tau).X_3,$$

ὅπου P_s παριστάνει τὸ κέντρον τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας εἰς τὸ M τῆς (γ) καὶ K τὸ κέντρον καμπυλότητος εἰς τὸ M αὐτῆς.

Οἱ ἀντίστοιχοι τῶν τύπων τοῦ Frenet διὰ τὸ τρίεδρον τῶν $\bar{X}_i$, ἂν τεθῇ

$$\bar{G} = \bar{\tau}^{-1}.\bar{X}_1 + \bar{r}^{-1}.\bar{X}_2 + \bar{\rho}^{-1}.\bar{X}_3,$$

ὅπου $\bar{\tau}^{-1} = \tau^{-1} + (\rho/\bar{r})^{\cdot}\, {}^{1}/_{\sigma\upsilon\nu\varphi}$

εἶναι $\dot{\bar{X}}_i = \bar{G} \times \bar{X}_i.$ (3)

Παρατηρητέον ὅτι διὰ $k \to \infty$, ἔχομεν $r \to \infty$, $\varphi \to 0$, $\eta\mu\varphi \to 0$, $\sigma\upsilon\varphi \to 1$, $\bar{\rho} \to \rho$, $\bar{r} \to r$, οἱ δὲ τύποι (2) τρέπονται εἰς τοὺς κλασικοὺς ὑπὸ τὸ ὄνομα τύποι τοῦ Frenet διὰ τὴν (γ).

3. Τὸ κέντρον τῆς ἐγγυτάτης σφαίρας τῆς (γ) εἰς τὸ Μ δίδεται ὑπὸ τοῦ

$$x^{(1)} = x(s) + \rho(s).X_2(s) + (\dot{\rho}(s)\tau(s)).X_3 \quad (4),$$

ὁ δὲ τόπος τοῦ τέλους τοῦ διανύσματος $x^{(1)}$ εἶναι ἐν γένει καμπύλη $(\gamma^{(1)}) = (\gamma^{(1)}(\gamma))$, περιοριζομένη εἰς ἓν σημεῖον, ὅταν ἡ (γ) εἶναι τόξον κυκλικόν.

Ἂν τεθῇ $\rho/\tau + (\dot{\rho}\tau)^{\cdot} = \vartheta(s)$, (ὑποτεθῇ δὲ $\vartheta \neq 0$),

θὰ εἶναι τὸ $\vartheta(s)$ τάξις C^1 καὶ

$$x^{(1)\prime} = \vartheta(s).X_3(s), \qquad x^{(1)\prime} = dx^{(1)}/ds.$$

Ἂν $s^{(1)}$ παριστάνῃ τὸ μῆκος τόξου τῆς $(\gamma^{(1)})$, $X_i^{(1)}$ τὰ μοναδιαῖα διανύσματα τοῦ (δεξιοστρόφου) τριέδρου τοῦ Fenet τῆς $(\gamma^{(1)})$ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς $M^{(1)}$ ἀντίστοιχον τοῦ Μ τῆς (γ), $\rho^{(1)}$, $\tau^{(1)}$ κλπ. τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος, στρέψεως κλπ. τῆς $(\gamma^{(1)})$ εἰς τὸ $M^{(1)}$, θὰ ἔχωμεν

$$\dot{x}^{(1)} = dx^{(1)}/ds^{(1)} = X_1^{(1)}$$

$$(ds^{(1)})^2 = \vartheta(s).^2(ds)^2, \qquad s^{(1)} = \int (\rho.\sigma + (\dot{\rho}/\sigma)^{\cdot})\, ds + c \ (\sigma\tau\alpha\vartheta.)$$

ἤτοι τὸ $s^{(1)}$ εἶναι συνάρτησις τοῦ s, ἔστω $s^{(1)} = s^{(1)}(s)$, ἄρα καὶ $s = s(s^{(1)})$.

Εὑρίσκομεν $dx^{(1)}/ds^{(1)} = X_3(s)$, $(\dot{x}^{(1)}) = 1$,

$$X_1^{(1)}(s^{(1)}) = X_3(s(s^{(1)})) = X_3(s^{(1)}),$$

ἄρα τὸ $x^{(1)}$ εἶναι τάξεως C^1 (ὡς τὸ X_3), τὸ δὲ $x^{(1)}$ τάξεως C^2.

Διὰ τὰ $X_2^{(1)}$, $X_3^{(1)}$ εὑρίσκομεν

$$\ddot{x}^{(1)} = -\sigma/\vartheta \cdot X_2$$

$$\varkappa^{(1)} = \pm\sigma(s^{(1)})/\vartheta(s^{(1)}), \qquad (\text{ὑποτίθεται } \varkappa^{(1)} > 0)$$

$$X_2^{(1)} = \pm X_2,$$

ὅπου τὸ $\pm$ εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πρόσημον τοῦ $-\sigma/\vartheta$,

$$X_3^{(1)} = X_1^{(1)} \times X_2^{(1)} = X_3 \times (\pm X_2) = -(\pm X_1),$$

ἤτοι
$$X_1^{(1)} = X_3, \quad X_2^{(1)} = \pm X_2, \quad X_3^{(1)} = \mp X_1 \tag{5}$$

$$\sigma = | X_1 \, X_2 \, \dot{X}_2 | ,$$

$$\sigma^{(1)} = | X_1^{(1)} \, X_2^{(1)} \, \dot{X}_2^{(1)} | ,$$

$$\sigma^{(1)} = \varkappa . \vartheta^{-1} , \quad \tau^{(1)} = \vartheta . \varkappa^{-1} . \tag{6}$$

4. Διὰ τὴν σφαιροκεντρικὴν καμπύλην ($\gamma^{(2)}$) τάξεως C^2 τῆς ($\gamma^{(1)}$), ὑποθέτοντες C^6 τὴν τάξιν τῆς (γ), εὑρίσκομεν

$$X_1^{(2)} = \mp X_1, \quad X_2^{(2)} = \pm X_2, \quad X_3^{(2)} = \mp X_3, \tag{7}$$

Διὰ τὴν ἔκφρασιν τῶν $\dot{X}_i^{(j)}$ ἐν γένει τῆς σφαιροκεντρικῆς τῆς (γ) καὶ j τάξεως, ὅτε θὰ ὑποτεθῇ ὅτι ἡ (γ) εἶναι τάξεως C^{j+2}, θέτομεν

$$f^{(j)} = \tau^{(j)-1} . X_1^{(j)} + \rho^{(j)-1} . X_3^{(j)}$$

ὅτε ἔχομεν
$$\dot{X}_i^{(j)} = f^{(j)} \times X_i^{(j)}, \quad \left({j = 1, 2, 3, \dots \atop i = 1, 2, 3} \right).$$

5. διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν $\bar{X}_i^{(j)}$ τῆς ($\gamma^{(j)}$) σφαιροκεντρικῆς j τάξεως τῆς (γ), ὡς πρὸς (δεξιόστροφον) ὀρθογώνιον σύστημα τριέδρου, ἔχοντος ἀκμὰς τὸ $\bar{X}_1^{(j)} = X_1^{(j)}$ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς ($\gamma^{(j)}$) καὶ τὰς δύο ἄλλας $\bar{X}_2^{(j)}$, $\bar{X}_3^{(j)}$ προκυπτούσας ἐκ τῶν $X_2^{(j)}$, $X_3^{(j)}$ τῆς ($\gamma^{(j)}$) εἰς τὸ θεωρούμενον σημεῖον αὐτῆς διὰ στροφῆς αὐτῶν περὶ αὐτὸ καὶ ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου $X_2^{(j)} \, X_3^{(j)}$ κατὰ γωνίαν φ, ἔχομεν τύπους ἀναλόγους τῶν (2), διὰ δὲ τὰ $\dot{\bar{X}}_i^{(j)}$ ἔχομεν

$$\dot{\bar{X}}_i^{(j)} = \bar{G}^{(j)} \times \bar{X}_i^{(j)},$$

ἐνῷ ἐτέθη
$$G^{(j)} = \bar{\tau}^{(j)-1} . \bar{X}_i^{(j)} + \bar{r}^{(j)-1} . X_2^{(j)} + \bar{\rho}^{(j)-1} . X_3^{(j)} .$$

6. Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν τριέδρων Frenet μεταξύ των προκύπτει ὅτι τὰ μὲν μοναδιαῖα διανύσματα ἐπὶ τῆς α′ καθέτου τῆς (γ) καὶ τῶν ($\gamma^{(j)}$) εἶναι παράλληλα, ἐνῷ τὰ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς β′ καθέτου αὐτῶν ἐναλλάσσονται εἰς παραλληλίαν ἀπὸ καμπύλης εἰς τὴν ἑπομένην αὐτῆς.