

ὅτι τὸ τελευταῖον τοῦτο ἀποτελεῖ ἓνα ἀπὸ τὰ πλεονεκτήματα τῆς μουσικῆς ἀπέναντι τῆς ποιήσεως, χάρις εἰς τὸ ὅποῖον ἡ τέχνη τῶν ἤχων δὲν διατρέχει τὸν κίνδυνον εἰς μερικὰς περιστάσεις νὰ γεννήσῃ τὴν ἐντύπωσιν *μονοτονίας*, τὸν ὅποῖον κίνδυνον κάποτε δύσκολα ἀποφεύγει ἡ ὁμοιοκατάληκτος ποίησις, ἡ πιστῶς ἀκολουθοῦσα τὴν συνθήκην τῆς ἀδιακόπου, ἀπὸ τὴν ἀρχὴν ἕως εἰς τὸ τέλος τῶν ποιημάτων, προσαρμογῆς τῆς ρίμας.

Εἶναι, ἐν τέλει, ἄξιον νὰ ἀναφερθῇ ὅτι συμπτωματικά, σποραδικὰ καὶ ὄχι συνειδητὰ παραδείγματα ρίμας συναντῶνται, ὡς γνωστόν, σπανίως καὶ εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας. Ταῦτα δέ, μὲ ἀκανόνιστον τρόπον παρουσιάζοντα τὴν χρῆσιν τῆς ρίμας φανερόν ἐστι ἡ τελευταία, εἰς τὴν ἐποχὴν τῆς πρώτης ἐμφανισέως της, ἠκολούθει ἐντελῶς τὸ πνεῦμα τῆς μουσικῆς, ἀπὸ τὴν ὁποίαν καὶ προήλθεν. Τὸ γεγονός δὲ τοῦτο εἶναι φυσικὸν καὶ εὐλογον νὰ γεννήσῃ τὴν σκέψιν ὅτι, δεδομένης τῆς ποικιλίας τὴν ὁποίαν παρουσιάζει ἡ μουσικὴ εἰς τὴν μελωδικὴν ὁμοιοκαταληξίαν, θὰ ἦτο ἴσως σκόπιμον ἂν καὶ σήμερον, εἰς μερικὰς περιστάσεις καὶ εἰς ὠρισμένα σημεῖα, ἡ ποίησις τὴν ἐμμεῖτο, ἀκολουθοῦσα ἐν μέρει τὸ πνεῦμα, τὸ ὅποῖον εἰς τὴν χρῆσιν τῆς μελωδικῆς ὁμοιοκαταληξίας ἀκολουθεῖ ἡ τέχνη τῶν ἤχων.

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ. — Ἐπὶ τῶν ὀδηγῶν τῶν σωμάτων διακλαδώσεως εἰς τὰ σχετικὰ Ἀβελιανὰ σώματα*, ὑπὸ Φ. Βασιλείου. Ἀνεκoinώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. Ἡ ἀκριβὴς σχέσις ἡ συνδέουσα τὴν σχετικὴν διακρίνουσαν (Relativdiskriminante) ἐνὸς Ἀβελιανοῦ σώματος $K|k$ μετὰ τοῦ ὀδηγοῦ (Führer) f τῆς ὁμάδος τῶν ιδεωδῶν, πρὸς τὴν ὁποίαν τὸ σῶμα τοῦτο εἶναι σῶμα-τάξιν (Klassenkörper), παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$d = \prod_x f_x, \quad (1)$$

ὅπου τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου μέλους ἐκτείνεται ἐφ' ὅλων τῶν καλουμένων x -ὀδηγῶν.

Σκοπὸς τῆς παρουσίης ἀνακοινώσεως εἶναι ἡ μελέτη τῶν ὀδηγῶν τῶν διαφόρων σωμάτων διακλαδώσεως (Verzweigungskörper) ἐνὸς δοθέντος ιδεώδους πρώτου p τοῦ βασικοῦ σώματος (Grundkörper) k καὶ ἡ ἐπὶ τῇ βάσει ταύτης εὑρεσις μιᾶς νέας καὶ ἀπλῆς ἀποδείξεως τῆς ἀνωτέρω θεμελιώδους σχέσεως (1). Αἱ ἀποδείξεις τῶν ἀναφερομένων θεωρημάτων θέλουσι δημοσιευθῆ βραδύτερον.

2 Ἐστω \mathfrak{F} εἷς διαιρέτης πρώτος τοῦ ιδεώδους p εἰς τὸ σῶμα K . K_v ($v=0, 1, \dots, n$, $K_n = K$) ἔστω ἡ αὐξουσα σειρὰ τῶν διαφόρων μεταξὺ τῶν σωμάτων διακλαδώσεως

* PH. VASSILIOU. — Über die Führer der Verzweigungskörper in relativ-Abelsche Zahlkörper.

(ὡς πρὸς τὸ \mathfrak{p}), v_n ($v=1, \dots, n$) οἱ ἀντιστοιχοῦντες εἰς αὐτὰ ἀριθμοὶ διακλαδώσεως (Verzweigungszahlen). Διὰ τοῦ \mathfrak{B}_v σημειοῦμεν κατωτέρω τὴν ὁμάδα τοῦ Galois τοῦ σώματος $K|K_{v-1}$

Θεώρημα. Ἐὰν k', K' παριστάνουν δύο σώματα πληροῦντα τὴν σχέσιν :

$$K_{v-1} \leq k' < K' \leq K_v \quad (v=1, \dots, n)$$

τότε, διὰ τὸ σῶμα $K'|k'$, εἰς ἕκαστον διαιρέτην πρῶτον τοῦ \mathfrak{p} τὸ σῶμα διακλαδώσεως εἶναι : $K'_0 = k'$, τὸ δὲ πρώτης τάξεως (einmal überstrichen) σῶμα διακλαδώσεως εἶναι : $K'_1 = K'$. Ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς διακλαδώσεως εἶναι : $v'_1 = v_n$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἰσχύει τὸ

Θεώρημα. Ἐὰν $K_T \leq k' < K' \leq K_0$ ἢ $k \leq k' < K' \leq K_T$, ὅπου K_T παριστάνει τὸ σῶμα ἀδρανείας (Trägheitskörper), τότε, διὰ τὸ σῶμα $K'|k'$, εἰς ἕκαστον διαιρέτην πρῶτον τοῦ \mathfrak{p} , εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ σῶμα ἀδρανείας εἶναι : $K'_T = k'$ καὶ τὸ σῶμα διακλαδώσεως : $K'_0 = K'$, εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ σῶμα ἀδρανείας εἶναι : $K'_T = K'^1$.

Ἡ ἀπόδειξις τῶν προτάσεων τούτων γίνεται τῇ ἐφαρμογῇ ἐνὸς θεωρήματος τοῦ J. Herbrand, ἐπὶ τοῦ προσδιορισμοῦ τῆς σειρᾶς τῶν ὁμάδων τοῦ Hilbert ἐνὸς κατωτέρου σώματος ἐπὶ τῇ βάσει τῆς τοῦ ἀνωτέρου².

3. Θεωροῦμεν τώρα τὸ σῶμα $K_v|K_{v-1}$, καλοῦμεν δὲ τὸν σχετικὸν αὐτοῦ βαθμὸν, ὅστις εἶναι δύναμις τοῦ \mathfrak{p} ($=$ ὁ ρητὸς πρῶτος ὁ περιεχόμενος εἰς τὸ ἰδεῶδες \mathfrak{p}), \mathfrak{p}^{ν} . Ἡ ὁμάς πηλίκου (Faktorgruppe) $\mathfrak{B}_n|\mathfrak{B}_{n+1}$ εἶναι τοῦ τύπου : $(\mathfrak{p}, \dots, \mathfrak{p})$. ὥστε τὸ σῶμα K_v δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς προκύπτων ἐκ τῆς συνθέσεως I_v πρὸς ἄλληλα ἀνεξαρτήτων κυκλικῶν σωμάτων $\mathfrak{p}^{\sigma\tau\upsilon}$ βαθμοῦ. Δι' ἕκαστον τῶν κυκλικῶν τούτων σωμάτων $K^*|K_{v-1}$ πληροῦνται αἱ προϋποθέσεις τῆς πρώτης τῶν προηγουμένων προτάσεων καὶ ἐπομένως δι' ἕκαστον διαιρέτην πρῶτον \mathfrak{p}_{v-1} τοῦ \mathfrak{p} εἰς τὸ K_{v-1} , τὸ σῶμα διακλαδώσεως εἶναι K_{v-1} , τὸ πρώτης τάξεως σῶμα διακλαδώσεως K^* καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς διακλαδώσεως v_n .

Ὁ \mathfrak{p}_{v-1} ὀδηγὸς τοῦ σώματος $K^*|K_{v-1}$ εἶναι κατὰ ταῦτα :³

$$f_{\mathfrak{p}_{v-1}}(K^*|K_{v-1}) = \mathfrak{p}_{v-1}^{v_n+1}$$

¹ Βλ. H. HASSE, Führer, Diskriminante und Verzweigungskörper relativ-Abelscher Zahlkörper, *Journ. f. Math.* **162**, (1930).

² J. HERBRAND, Détermination des groupes de ramification d'un corps à partir de ceux d'un sur-corps. *Comptes rendus de l'Acad. de Paris*, **191**, (1930), p. 980.—Sur la théorie des groupes de décomposition, d'inertie et de ramification, *Journ. de Math.* X. (1931).

³ H. HASSE, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil Ia, §§ 9, 17, 18.

του δὲ $K_v|K_{v-1}$ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τούτων, δηλ.

$$f_{p_{v-1}}(K_v|K_{v-1}) = p_{v-1}^{v_v+1} \quad (2)$$

4. Ἐστωσαν k_1, k', K' τρία τυχόντα μερικὰ σώματα τοῦ K πληροῦντα τὴν σχέσιν: $K_T \leq k_1 < k' < K'$. Τὸ σῶμα $k'|k_1$ ἔστω βαθμοῦ πρώτου q (ἴσου μὲ p ἢ διαφόρου τοῦ p), p_1 εἷς διαιρέτης πρώτος τοῦ p εἷς τὸ k_1 , p' διαιρέτης πρώτος τοῦ p_1 εἷς τὸ k' καὶ v ὁ ἀντίστοιχος εἷς τὸ $k'|k_1$ ἀριθμὸς διακλαδώσεως διὰ τὸ p_1 . Θετόμεν $v-0$ ἔὰν διὰ τὸ $k'|k_1$, διὰ τὸ ἰδεῶδες p_1 , τὸ σῶμα ἀδρανείας εἶναι k_1 καὶ τὸ σῶμα διακλαδώσεως k' . Τότε ἰσχύει τὸ

Θεώρημα. Ἐὰν $f_p(K'|k') = p^{1+v+a}$ καὶ $a > 0$

τότε εἶναι: $a - 1q$ καὶ

$$f_p(K'|k_1) = p_1^{1+v+1}.$$

5. Ζητοῦμεν ἤδη τὸν p -ὀδηγὸν τοῦ σώματος $K_v|k$: $f_p(K_v|k)$ ($v = 0, \dots, n$) Συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν (2) ὁ p_{v-1} -ὀδηγὸς τοῦ σώματος $K_v|K_{v-1}$ ($v = 1, \dots, n$; p_{v-1} εἷς τὸ K_{v-1}) εἶναι γνωστός. Ἡ μετάβασις ἀπὸ τοῦ σώματος K_{v-1} εἷς τὸ k γίνεται βαθμηδόν, τῇ ἐφαρμογῇ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, διὰ καταλλήλων μερικῶν σωμάτων (Zwischenkörper) σχετικοῦ βαθμοῦ πρώτου. Πρὸς τοῦτο γίνεται χρῆσις διπλῆς τελείας ἀναγωγῆς. Ὅπως καὶ προηγουμένως, p^{fv} ἄς παριστάνη τὸν βαθμὸν τοῦ $K_v|K_{v-1}$ ἐπίσης e_0 τὸν (πρὸς τὸ p πρώτον) βαθμὸν τοῦ $K_0|K_T$. Ἐπὶ πλέον $\text{Exp. } f_p(K'|k')$ ἄς παριστάνη τὸν ἐκθέτην τοῦ p' -ὀδηγοῦ τοῦ σώματος $K'|k'$ διὰ τοὺς διαιρέτας πρώτους p' τοῦ p εἷς τὸ k' .

Ἰσχύει τότε τὸ ἐξῆς

Θεώρημα. $\text{Exp. } f_p(K_v|k) = 1 + \alpha_v$

$$= 1 + \frac{v_1}{e_0} + \frac{v_2 - v_1}{e_0 p^{r_1}} + \dots + \frac{v_v - v_{v-1}}{e_0 p^{r_1 + \dots + r_{v-1}}}.$$

6. Ἐστω τῶρα χ τυχὼν χαρακτήρ (Charakter) τῆς ομάδος τῶν τάξεων (Klassengruppe), πρὸς τὴν ὁποίαν τὸ K εἶναι σῶμα-τάξεων. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῆς ἰσομορφίας (Isomorphiesatz) τῆς θεωρίας τῶν Ἀβελιανῶν σωμάτων (Klassenkörpertheorie), ὁ χ εἶναι ἐπίσης χαρακτήρ τῆς ομάδος τοῦ Galois \mathfrak{G} τοῦ σώματος $K|k$, ἐφόσον συμφωνοῦμεν δι' ὁμόλογα στοιχεῖα τῶν δύο ομάδων ὁ χαρακτήρ χ νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν τιμὴν. Ὁ ὀδηγὸς $f_\chi = f(\chi; K|k)$ ὀρίζεται τότε ὡς ὁ ὀδηγὸς ἐκείνης τῆς ομάδος ἰδεωδῶν $H(\chi) = H(\chi; K|k)$, ἡ ὁποία συντίθεται ἀπὸ ὅλας τὰς τάξεις ὡς πρὸς $H(K|k)$, διὰ τὰς ὁποίας ὁ χ ἔχει τὴν τιμὴν 1.

Ἀντίστοιχον σῶμα-τάξεων $K(\chi)$ πρὸς τὴν ομάδα ταύτην ἰδεωδῶν (Idealgruppe)

$H(\chi)$ είναι εκείνο τὸ μερικὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ, κατὰ τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῆς θεωρίας τοῦ Galois, εἰς τὴν ὁμάδα ὄλων τῶν στοιχείων τῆς \mathfrak{G} μὲ τὴν τιμὴν τοῦ χ ἴσην μὲ ε_n . Ὁ ὁδηγὸς τούτου ὀρίζεται συμφώνως πρὸς τὸ

Θεώρημα. Ἐχομεν

$$\text{Exp. } f_p(\chi; K|k) = \frac{e_0 p^{R_1 - \chi(\mathfrak{B}_0)}}{e_0 p^{R_1}} + \frac{v_1}{e_0} \frac{p^{R_1 - \chi(\mathfrak{B}_1)}}{p^{R_1}} + \frac{v_2 - v_1}{e_0 p^{r_1}} \frac{p^{R_2 - \chi(\mathfrak{B}_2)}}{p^{R_2}} + \dots \quad (3)$$

($\chi(\mathfrak{B})$ διὰ μίαν μερικὴν ὁμάδα \mathfrak{B} τῆς \mathfrak{G} δηλοῖ τὸ ἄθροισμα τῶν χ -τιμῶν δι' ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς \mathfrak{B} , πρὸς τούτους δὲ ἐτέθη $r_h = R_h - R_{h-1}$, $r_n = R_n$, δηλ. $R_h = p^{r_h} + \dots + r_n$).

$$\text{Οἱ παράγοντες } \varepsilon_i = \frac{p^{R_i - \chi(\mathfrak{B}_i)}}{p^{R_i}} \quad (i=1, \dots, n) \text{ καὶ ὁ } \varepsilon_0 = \frac{e_0 p^{R_1 - \chi(\mathfrak{B}_0)}}{e_0 p^{R_1}} \text{ ἰσοῦνται}$$

μὲ 0 ἢ 1 καὶ μάλιστα ἐὰν εἷς τούτων ἰσοῦται μὲ μηδὲν τότε καὶ ὅλοι οἱ ἐπόμενοί του. Ἐκ τοῦ τρόπου τούτου τῆς γραφῆς, ἐπὶ τῇ βάσει καὶ τῶν γνωστῶν ἰσαριθμῶν (Kongruenzen) τοῦ Hasse βλέπομεν, ὅτι οἱ ὅροι τοῦ ἄθροίσματος τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ἀκέραιοι.

7. Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα εἰς τὸν τύπον (3) δι' ὅλους τοὺς χαρακτῆρας χ καὶ παραβάλωμεν τὸ ἐξαγόμενον μὲ τὸν τύπον τῆς p -διακρινούσης

$$\text{Exp. } d_p(K|k) = g f (e_0 p^{R_1} - 1 + v_1 (p^{R_1} - 1) + (v_2 - v_1) (p^{R_2} - 1) + \dots),$$

ὅπου τὰ g, f ἔχουν τὴν συνήθη σημασίαν διὰ τὸ ἰδεῶδες p , τότε προκύπτει ἀμέσως ὁ τύπος (1).

8. Ἐφαρμόζοντες τὰ ἀποτελέσματα τῶν προηγουμένων §§ εἰς τὸ σύμβολον τοῦ Hasse $\left(\frac{\beta, k}{p}\right)$, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται δι' ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς $\beta \not\equiv 0$ τοῦ βασικοῦ σώματος k , ἔχομεν τὰ ἐξῆς θεωρήματα:

Θεώρημα. Ἐὰν K^* παριστάνῃ ἐν μερικὸν σῶμα τοῦ K , περιέχον τὸ σῶμα ἀναλύσεως (*Zerlegungskörper*) K_z τοῦ p τότε, ἐφόσον τὸ β διατρέχει ὅλα τὰ ὑπόλοιπα μέτρων (*Normenreste*) mod. $f_p(K^*|k)$ τοῦ K^* , αἱ τιμαὶ τοῦ συμβόλου $\left(\frac{\beta, k}{p}\right)$ εἶναι ἢ εἰς τὸ σῶμα K^* ἀντιστοιχοῦσα μερικὴ ὁμάς \mathfrak{G}^* τῆς \mathfrak{G} .

Θεώρημα. Ἐὰν τὸ β διατρέχει τὴν ὁμάδα τῶν ὑπολοίπων-μέτρων mod. $p^{1+\alpha_n}$ τοῦ K_n , τότε τὸ σύμβολον $\left(\frac{\beta, k}{p}\right)$ διατρέχει τὴν n -τάξεως ὁμάδα διακλαδώσεως (*n -mal überstrichen*) τοῦ p .

ZUSAMMENFASSUNG

Vorliegende Note soll, vermittels eines Satzes von Herbrand, eine Vereinfachung der Untersuchungen von Hasse erzielen, die sich auf die

Führer der verschiedenen Verzweigungskörper eines gegebenen Primideals \mathfrak{p} des Grundkörpers k des Abelschen Körpers $K|k$ beziehen. Dabei wird sich unmittelbar der explizite Ausdruck (Formel (3)) für den χ -Führer ergeben und damit ein neuer Beweis der Produktformel des Führer-Diskriminanten-Satzes der Klassenkörpertheorie. Die Beweise werden demnächst in Crelles Journal erscheinen.

ΦΥΣΙΚΗ. – Συμβολή εἰς τὸ φαινόμενον Raman*, ὑπὸ **Θ. Κουγιουμτζέλλη.**
Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλιέζου.

Ὡς γνωστὸν ἐπὶ τοῦ φαινομένου Raman ἡσυχολήθη πλῆθος ἐρευνητῶν, ἐν τούτοις ἡμεῖς ἐν γνώσει τῆς σχετικῆς βιβλιογραφίας ἐξελέξαμεν ὡς θέμα ἐρεύνης τὴν ἐκ νέου μελέτην τοῦ βενζολίου καὶ τινων ἐκ τῶν ἐνδιαφερόντων παραγῶγων του, διότι τὸ καινὸν τοῦ φαινομένου δικαιολογεῖ τὴν ὑπὸ πολλῶν παρατηρητῶν ἐξέτασιν τῶν αὐτῶν οὐσιῶν, ἰδίως δὲ ὅταν διατίθενται ἰσχυρὰ μέσα ἀναλύσεως. Καὶ πράγματι ἡ ἐργασία μας ἐκτελεσθεῖσα ἐν τῷ Α'. Ἐργ. Φυσικῆς τοῦ Ἐθν. Πανεπιστημίου διὰ φασματογράφου 4 πρισματῶν Flint 60° Heele Berlin, διασκεδασμοῦ 8A° κατὰ m m περὶ τὰ 4000 Å, εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα ἐκτὸς τοῦ ἐλέγχου τῶν ἤδη ὑπὸ ἄλλων ἐρευνητῶν γενομένων μετρήσεων καὶ τὴν εὑρεσιν νέων γραμμῶν.

Ὡς πρὸς τὸ ζήτημα τοῦ φωτισμοῦ μετεχειρίσθημεν ἰδίαν διάταξιν ἀποτελουμένην ἐξ ἐνὸς πρισματικοῦ δοχείου τομῆς ἰσοπλεύρου τριγώνου δυναμένου νὰ τεθῆ μετὴν μίαν τῶν ἐδρῶν ὀριζοντίως, μεταξὺ δύο ἀνακλαστικῶν ἢ διαχεουσῶν ἐπιφανειῶν. Ἐπὶ τῆς ὀριζοντίας ταύτης ἔδρας προσέπιπτε συγκεντρούμενον καταλλήλως τὸ φῶς λυχνίας ὑδραργύρου ἐκ χαλαζίου ἰσχύος 1500 H. K. κατασκευῆς Heraeus-Hanau.

BENZOLIUM

Τὸ φάσμα Raman τοῦ βενζολίου ἐμελετήθη κυρίως ἀπὸ τοὺς Raman, Wood, Daure, Pringsheim - Rosen, Söderqvist καὶ Dadieu - Kohlrausch. Παρουσιάζονται ὅμως εἰς τὰς μετρήσεις σημαντικαὶ διαφοραὶ καὶ τοῦτο ὑπῆρξεν ἡ ἀφορμὴ διὰ νὰ τὸ μελετήσωμεν καὶ ἡμεῖς ἐκ νέου, ἐφ' ὅσον μάλιστα εἶναι καὶ τὸ θεμελιῶδες φάσμα διὰ τὰ παράγωγά του. Ἡ ἐκτίμησις τοῦ μήκους κύματος ἐκάστης γραμμῆς ἐγένετο διὰ συγκρίσεως πρὸς τὸ φάσμα τοῦ σιδήρου. Τὰ ἀναγραφόμενα μ. κ. ἀναφέρονται εἰς μ. κ. ἐν τῷ ἀέρι, αἱ δὲ συχνότητες ἔχουν ἀναχθῆ εἰς τὸ κενόν. Ἡ ἀναγωγὴ τῶν συχνοτήτων ἐγένετο διὰ τῆς ἀναγωγῆς τοῦ μήκους κύματος εἰς τὸ κενὸν καὶ εἶτα διὰ διαιρέσεως τοῦ ἑκατοστομέτρου διὰ τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ.

* TH. G. COUYUMDZELLIS.— Contribution à l'effet Raman.