ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 15ΗΣ ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 1970

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΛΕΩΝ. Θ. ΖΕΡΒΑ

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Généralisation du lemme de Zassenhauss,** *par S. P. Zervos**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Κ. Παπαϊωάννου.

1. Le livre «An Introduction to Algebraic Structures» d' A. Rosenfeld (Holden-Day, 1968) contient (p. 102) l'extension suivante du lemme de Zassenhauss aux groupoïdes (l'auteur appelle «groupoïde» tout ensemble muni d'une loi de composition interne partout définie):

Soient A et B des sous-groupoïdes d'un groupoïde X, tels que $A \cap B \neq \emptyset$; *soient R et S des congruences sur, respectivement, A et B; on suppose, enfin, que toutes les congruences sur* $A \cap B$ *sont, deux à deux permutables. Alors,* $R \circ S \circ R$ *et* $S \circ R \circ S$ *sont des congruences sur, respectivement,* $R(A \cap B)$ *et* $S(A \cap B)$, *et les groupoïdes-quotients respectifs sont isomorphes.*

Nous allons, maintenant, généraliser ce résultat.

Abréviations. 1) resp. = respectivement. 2) c-à-d = c'est-à-dire.

Terminologie. 1) Nous considérons, dans 1, uniquement des relations *binaires.* 2) Par «relation sur E», nous entendons: relation définie sur un surensemble de E. 3) $(R_\iota)_{\iota \in I}$ étant une famille de relations sur, resp., des ensembles quelconques, l'ensemble des éléments de cette famille sera appelé «base» de cette famille. La base de la famille des facteurs d'un produit $R_n \circ \ldots \circ R_1$ de relations sur E (produit, qui, manifestement, lui-aussi est une relation sur E) sera appelée «base» de ce produit.

* Σ. Π. ΖΕΡΒΟΥ, **Γενίκευσις τοῦ λήμματος τοῦ Zassenhauss.**

Remarque 1. *Si les bases de deux produits de relations d'équivalence (*resp. *congruences), permutables, deux à deux, sur un ensemble(*resp. *groupoïde) E coïncident, ces produits eux-mêmes coïncident sur E.*

Démonstration facile par induction et utilisation de la permutabilité et de la propriété $R^2 = R$ des relations d'équivalence (resp. congruences) R.

La généralisation préannoncée est la suivante :

Théorème 1. a. *Soit* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ $(1 \leqslant \iota \leqslant n)$ *une famille finie de sous-groupoïdes d'un groupoïde X, telle que* $\bigcap_{\iota\in I} A_\iota \neq \emptyset$; *soit, pour chaque* $\iota \in I$, $(R_{\iota j_\iota})_{j_\iota \in J_\iota}$ *une famille de congruences sur* A_ι ; *on suppose enfin, que toutes ces congruences sont permutables, deux à deux, sur* $E = \bigcap_{\iota\in I} A_\iota$ (c-à-d, que les congruences respectives induites sur E sont permutables, deux à deux). *Alors, si l'on désigne par R une, quelconque, de ces congruences et par S un produit, quelconque, d'* $R_{\iota j_\iota}$, $R \circ S \circ R$ *est une congruence sur R (E)* [et, par conséquent, $R(E) / R \circ S \circ R$ est un groupoïde quotient] ; *et, si deux produits de la forme* $R \circ S \circ R$ (qu'on peut désigner par $R \circ S \circ R$ et $R' \circ S' \circ R'$) *ont la même base, les groupoïdes-quotients respectifs sont isomorphes* [c-à-d, $R(E) / R \circ S \circ R \cong R'(E) / R' \circ S' \circ R'$].

D é m o n s t r a t i o n. Rappel d'un abus de langage et de notation utilisé ici : L est une relation sur E = L est une relation sur un surensemble de E ; ainsi, on désigne par L à la fois L et ses restrictions.

S est, manifestement, une congruence sur E, donc, $R \circ S \circ R$ en est une sur R(E). Soient $R \circ S \circ R$ et $R' \circ S' \circ R'$ deux produits ayant la même base ; ils coïncident, nécessairement, sur E. Donc, $E / R \circ S \circ R = E / R' \circ S' \circ R'$. Or, d'après le second théorème d'isomorphisme,

$$R(E) / R \circ S \circ R \cong E / R \circ S \circ R \quad \text{et} \quad R'(E) / R' \circ S' \circ R' \cong E / R' \circ S' \circ R'.$$

Par conséquent, $R(E) / R \circ S \circ R \cong R'(E) / R' \circ S' \circ R'$. c. q. f. d.

Note. Cette démonstration ne présuppose pas le «lemme de Zassenhauss» cité au début. Ce dernier correspond au cas particulier $n = 2$ et $R_{\iota j_\iota} = R_\iota$ $(\iota = 1, 2)$.

2. Nous nous référons au livre «Universal Algebra» de P. M. Cohn (Harper, 1965). L'auteur appelle «Ω-algèbre» tout ensemble A muni d'un ensemble, fini ou non, Ω d'applications $\omega : A^{n_\omega} \to A$, où n_ω est un nombre naturel dépendant uniquement d'ω. Terminologie analogue.

Il démontre, dans ce cadre, le suivant «lemme de Zassenhauss» (p. 91) : *Soient X une Ω - algèbre, A et B des sous-algèbres de X et R et S des congruences sur resp. A et B ; on suppose que toutes les congruences sur* $A \cap B$ *sont permutables, deux à deux. Alors,* $R \circ S \circ R$ *et* $S \circ R \circ S$ *sont des congruences sur resp.* $R(A \cap B)$ *et* $S(A \cap B)$, *et* $R(A \cap B) / R \circ S \circ R \cong S(A \cap B) / S \circ R \circ S$. (On a à dessein utilisé ici les mêmes lettres que dans l'énoncé du début, dans 1. On peut supposer $A \cap B \neq \emptyset$.)

Cet énoncé constitue une extension formelle aux Ω - algèbres de l'énoncé du début pour les groupoïdes. Comme, en vertu des définitions et des propositions contenues dans le livre en question, l'extension formelle de la démonstration est valable, l'énoncé pour les Ω - algèbres est également valable.

Or, pour les mêmes raisons est valable l'extension formelle aux Ω - algèbres de notre démonstration (préliminaires inclus) du théorème 1. a. Donc, *l'extension formelle aux Ω - algèbres de ce théorème est également valable ;* nous appellerons le résultat ainsi obtenu *«théorème 1. b»*.

3. Nous nous référons au livre «Universal Algebra» de G. Grätzer (Van Nostrand, 1968). Grätzer appelle «algèbres» les structures appelées dans Cohn «Ω - algèbres». Il utilise la notation $\langle A, F \rangle$ pour une telle algèbre, de support A et d'ensemble d'opérations F.

N o t a t i o n s. Si $\langle C, F \rangle$ est une sous - algèbre de $\langle A, F \rangle$ et si R est une congruence sur $\langle A, F \rangle$, il désigne par R_C la restriction de cette congruence à $\langle C, F \rangle$; nous écrirons, indifféramment, R_C ou R. Si R et S sont des congruences sur $\langle A, F \rangle$, il désigne par $R \vee S$ la borne inférieure de l'ensemble des congruences sur $\langle A, F \rangle$ contenant à la fois R et S dans l'ensemble des congruences sur $\langle A, F \rangle$, ordonné par inclusion (et formant, alors, un treillis complet). Si $(R_\iota)_{\iota \in I}$ est une famille de congruences sur $\langle A, F \rangle$, $\vee R_\iota$ $(\iota \in I)$ désigne la borne inférieure analogue.

Il énonce, dans ce cadre, le suivant «lemme de Zassenhauss» [p. 74. Il attribue ce résultat à A. W. Goldie, *«The Jordan - Hölder theorem for general abstract algebras»,* Proceedings of the London Mathematical Society (2) 52 (1950), p. 107 - 131. La même référence apparaît, hors texte, dans Cohn.] : *Soient* $\langle X, F \rangle$ *une algèbre* $\langle A, F \rangle$ *et* $\langle B, F \rangle$ *des sous-algèbres de* $\langle X, F \rangle$, *telles que* $A \cap B \neq \emptyset$, *et R et S des congruences sur resp.* $\langle A, F \rangle$ *et* $\langle B, F \rangle$; *on pose* $\Psi = R_{A \cap B} \vee S_{A \cap B}$. *Alors,* $R \circ \Psi \circ R$ *et*

$S \circ \Psi \circ S$ *sont resp. des congruences sur* $\langle R(A \cap B), F\rangle$ *et* $\langle S(A \cap B), F\rangle$ *et* $R(A \cap B)/R \circ \Psi \circ R \cong S(A \cap B)/S \circ \Psi \circ S$.

Comme ce résultat est cité sans démonstration dans Grätzer (dans les «exercices») et que l'on a besoin ici de sa démonstration, on en donne une, ci-dessous.

On sait que, si R_1 et $R_2 \supseteq R_1$ sont des congruences sur une même algèbre, $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1 = R_2$.

Le fait que $R \circ \Psi \circ R$ (resp. $S \circ \Psi \circ S$) est une congruence sur $\langle R(A \cap B), F\rangle$ [resp. $S(A \cap B), F]$ est évident.

Sur $\langle A \cap B, F\rangle$, $R \subseteq \Psi$ (c-à-d, $R_{A \cap B} \subseteq \Psi$) et $S \subseteq \Psi$, donc, *là*, $R \circ \Psi \circ R = \Psi$ et $S \circ \Psi \circ S = \Psi$. Le second théorème d'isomorphisme (appelé dans Grätzer «premier») donne, alors :

$R(A \cap B)/R \circ \Psi \circ R \cong A \cap B/\Psi$ et
$S(A \cap B)/S \circ \Psi \circ S \cong A \cap B/\Psi$, donc,
$R(A \cap B)/R \circ \Psi \circ R \cong S(A \cap B)/S \circ \Psi \circ S$. c. q. f. d.

Une démonstration entièrement analogue démontre la généralisation suivante du résultat précédent :

Théorème 1c. *Soit* $(\langle A_\iota, F\rangle)_{\iota \in I}$ $(1 \leq \iota \leq n)$ *une famille finie de sous-algèbres d'une algèbre* $\langle A, F\rangle$, *telle que* $\bigcap_{\iota \in I} A_\iota \neq \emptyset$; *soit, pour chaque* $\iota \in I$, $(R_{\iota j_\iota})_{j_\iota \in J_\iota}$ *une famille de congruences sur* $\langle A_\iota, F\rangle$. *Alors, si l'on pose* $E = \bigcap_{\iota \in I} A_\iota$ *et si l'on désigne par* R *une, quelconque, des* $R_{\iota j_\iota}$, *par* L *une famille, non vide, quelconque, d'* $R_{\iota j_\iota} \cap E^2$, *contenant* $R \cap E^2$ (c-à-d, la congruence R_E sur $\langle E, F\rangle$), *et par* Ψ *la congruence* VL, $R \circ \Psi \circ R$ *est une congruence sur* $R(E)$; *et, si* R' *et* R'' *sont deux* $R_{\iota j_\iota}$, L' *et* L'' *deux familles de la forme* L, *contenant resp.* $R' \cap E^2$ *et* $R'' \cap E^2$ *et ayant la même base et* $\Psi' = VL'$, $\Psi'' = VL''$, *alors,* $R'(E)/R' \circ \Psi' \circ R' \cong R''(E)/R'' \circ \Psi'' \circ R''$.

Remarque 2. Étant données deux congruences R et S sur une même algèbre, on sait qu'elles sont permutables ssi $R \circ S = RVS$. Une induction évidente montre, alors, que si n $(n \geq 2)$ congruences sur une même algèbre sont permutables, deux à deux, $R_n \circ \ldots \circ R_1 = \underset{(\iota=1,\ldots,n)}{V R_\iota}$. Ceci et des remarques faciles permettent d'obtenir le théorème 1. b (donc, aussi, son cas particulier, le théorème 1. a) comme un corollaire du théorème 1. c.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἔχουν δοθῆ, ὡς γνωστόν, διάφοροι γενικεύσεις τοῦ κλασσικοῦ λήμματος τοῦ Zassenhauss διὰ τὰς ὁμάδας. Εἰς αὐτὰς γενικεύουν μὲν τὴν ὁμάδα εἰς ἄλγεβραν, θεωροῦν, ὅμως, πάντοτε δύο δομάς, ὡς ὁ Zassenhauss. Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν, ἡ ὁποία γενικεύει τὰς ὡς ἄνω γενικεύσεις, ἐπιτυγχάνεται ἡ θεώρησις περισσοτέρων τῶν δύο δομῶν.

★

Ἐπὶ τῆς ἀνακοινώσεως τοῦ κ. Σ. Π. Ζερβοῦ «Γενίκευσις τοῦ λήμματος τοῦ Zassenhauss» ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Κ. Παπαϊωάννου** εἶπε τὰ ἑξῆς:

Ὑφίστανται, ὡς γνωστόν, διάφοροι γενικεύσεις τοῦ λήμματος τοῦ Zassenhauss διὰ τὰς ὁμάδας. Εἰς αὐτὰς θεωροῦν ἀντὶ τῆς ὁμάδος καθολικὴν ἄλγεβραν ἢ δομὴν μιᾶς ἐσωτερικῆς πράξεως, περιορίζονται, ὅμως, πάντοτε, εἰς δύο δομὰς ὡς καὶ ὁ Zassenhauss. Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν ὁ καθηγητὴς κ. Σπυρίδων Π. Ζερβὸς γενικεύει τὰς γενικεύσεις αὐτάς, διὰ τῆς θεωρήσεως περισσοτέρων τῶν δύο δομῶν, εἰς τὰς ὁποίας καὶ ἐπιτυγχάνει νὰ ἐπεκτείνῃ τὸ ὡς ἄνω λῆμμα.