est separée du Cristallophyllien, qui se trouve au dessous, par l'intermédiaire d' une série de couches, en partie schisteuses et conglomératiques *(coupe B)*.

Au Nord de la ville de Molaï affleure un calcaire marneux à *Fusulinides*, associé à des couches de tuf et de grès. Par conséquent, les *couches de Tyros* appartiennent, en partie, à l'Anthracolithique *(coupe Γ)*.

En se basant sur l'analogie stratigraphique et tectonique qui existe entre le Péloponèse central et occidental et la Crète, l'auteur admet que le Primaire doit apparaître, également, à cette île. Certaines formations éruptives décrites par RAULIN dans son système de «terrains primitifs de talschistes» s'approchent beaucoup aux *couches de Tyros*. D'autre part, les roches vertes, en partie glaucophanitisées et albitisées, qui forment de filons et de filons-couches entre les villages de Phournè et Lakki, à l'île de Crète, sont d'après l'auteur, analogues au magma correspondant de Laconie.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

ΥΠΟ ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

(ὑποβληθεῖσα ὑπὸ τοῦ κ. Γ. Ρεμούνδου)

Ἐν τῷ ὑπομνήματι αὐτοῦ «*Sur les solutions discontinues dans le calcul des variations*», δημοσιευθέντι εἰς τὰ *Mathem. Annalen*, Bd. 94, Heft 1./2 1925, ὁ A. RAZMADZÉ ἐρευνᾷ ἓν νέον πρόβλημα τοῦ Λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν, καθ' ὃ ἡ γραμμὴ δι' ἣν ἀντιστοιχεῖ ἡ ἐλαχίστη ἢ ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ ὡρισμένου ὁλοκληρώματος

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

δύναται νὰ εἶναι καμπύλη, ἥτις ἔχει *συνήθη ἢ πρώτης τάξεως ἀσυνέχειαν*. Ὁ ἀνωτέρω ἀναφερόμενος συγγραφεύς, ἀναχωρῶν ἀπὸ τὸ γνωστὸν ὁλοκλήρωμα $\int_{-1}^{+1} x^2 y'^2\, dx$ τοῦ WEIERSTRASS ἐξετάζει ἐν τῷ ὑπομνήματι αὐτοῦ τὸ x– πρόβλημα τοῦ Λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν καὶ εὑρίσκει τὰς ἀναγκαίας καὶ ἐπαρκεῖς συνθήκας, ἵνα τὸ ὁλοκλήρωμα

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx$$

διὰ $y = y(x)$ $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$ λαμβάνῃ τὴν ἐλαχίστην αὐτοῦ τιμήν, ἐνῷ ἡ συνάρτησις $y = y(x)$ ἐν τῷ διαστήματι (x_1, x_2) ἔχει ἓν σημεῖον ἀσυνεχείας $x = x_0$, καὶ εἶναι συνεχὴς εἰς ἕκαστον τῶν διαστημάτων $x_1 \leqq x < x_0$ καὶ $x_0 < x \leqq x_2$, εἰς δὲ τὴν τιμὴν $x = x_0$ ἀντιστοιχοῦν δύο σημεῖα P_0 καὶ $\overline{P}_0$ τῆς γραμμῆς, κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τρόπον, ὥστε ἡ καμπύλη νὰ ἀποτελῆται ἐκ δύο τόξων P_1P_0 καὶ $\overline{P}_0P_2$, μὴ ἐχόντων κοινόν τι σημεῖον, ἐνῷ τὰ P_1 καὶ P_2 ἀντιστοιχοῦν εἰς $x = x_1$ καὶ $x = x_2$. Τὰ σημεῖα P_0 καὶ $\overline{P}_0$, εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχεῖ *ἅλμα* τῆς καμπύλης, καλοῦμεν *σημεῖα θραύσεως* τῆς καμπύλης $y = y(x)$. Τὸ πρόβλημα τοῦτο τοῦ Λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν ἐξητάσαμεν εἰς παραμετρικὴν μορφήν, ἥτις εἶνε γενικωτέρα, κατελήξαμεν δὲ εἰς τὰ κατωτέρω συμπεράσματα, ἐὰν τὸ ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ ἐλαχίστη τιμὴ εἶναι τό:

$$J = \int_{s_1}^{s_2} F(x, y, \vartheta)\, ds, \qquad (1)$$

θεωρεῖται δ' ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ (παράμετρος) ἡ s καὶ εἶναι ἡ συνάρτησις

$$F(x, y, x', y') \equiv F(x, y, \sigma\upsilon\nu\vartheta, \eta\mu\vartheta) \equiv F(x, y, \vartheta)$$

ὁμογενὴς ὡς πρὸς τὰς x', y' εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἔχωμεν:

$$F(x, y, kx', ky') = k\,F(x, y, x', y')$$

διὰ k θετικόν, ὑποτιθεμένου ὅτι εἶναι $x'^2 + y'^2 > o$, καὶ ὅτι τὰ σημεῖα θραύσεως P_0 καὶ $\overline{P}_0$ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος:

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad s_1 \leqq s \leqq s_2, \qquad (2)$$

ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σταθερῶν σημείων P_1 $(s = s_1)$, P_2 $(s = s_2)$, κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y καὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν τιμὴν $s = s_0$.

α') «*Ἵνα εἰς τὴν καμπύλην* (2) *τῆς ὁποίας τὰς ἐξισώσεις γράφομεν ὑπὸ τὴν μορφήν:*

$$\begin{matrix} x = x(s) \\ y = y(s) \end{matrix} \left| \begin{matrix} = x_0(s), \\ = y_0(s), \end{matrix} \right. \text{διὰ } s_1 \leqq s < s_0, \quad \begin{matrix} = \overline{x}_0(s) \\ = \overline{y}_0(s) \end{matrix} \text{ διὰ } s_0 < s \leqq s_2, \qquad (2')$$

ἀντιστοιχῇ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ ὁλοκληρώματος (1), *πρέπει τὰ τόξα* $P_1 P_0$, $\overline{P}_0 P_2$ *νὰ ἐπαληθεύουν τὰς διαφορικὰς ἐξισώσεις τοῦ* LAGRANGE-EULER:

$$F_x - \frac{d}{ds}(F_{x'}) = o, \qquad F_y - \frac{d}{ds}(F_{y'}) = o,$$

προσέτι δὲ νὰ πληροῦνται αἱ συνθῆκαι τοῦ LEGENDRE:

$$F_1 > o, \qquad \overline{F}_1 > o,$$

ἐνῷ ἐτέθη: $\quad F_1 = \dfrac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\dfrac{F_{x'y'}}{x'y'} = \dfrac{F_{y'y'}}{x'^2}$, *καὶ ἀναλόγως διὰ τὸ* $\overline{F}_1$».

β') «*Εἰς τὰ σημεῖα θραύσεως* $P_0\,(a_0, b_0, \vartheta_0)$, $\overline{P}_0\,(a_0, \overline{b}_0, \overline{\vartheta}_0)$ *τῆς λύσεως* (2') *πληροῦνται αἱ ἑξῆς συνθῆκαι:*

$$\left.\begin{matrix} F_{x'}(a_0, b_0, \vartheta_0) = o, & F_{y'}(a_0, b_0, \vartheta_0) = o, \\ F_{x'}(a_0, \overline{b}_0, \overline{\vartheta}_0) = o, & F_{y'}(a_0, \overline{b}_0, \overline{\vartheta}_0) = o, \end{matrix}\right. \qquad (3)$$

ἐνῷ ϑ_0 *καὶ* $\overline{\vartheta}_0$ *παριστάνουν τὰς γωνίας τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ σημεῖα* P *καὶ* $\overline{P}_0$ *τῶν τόξων* P_1P_0 *καὶ* $\overline{P}_0P_2$ *μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν* x».

γ') «*Ἐὰν* $x = f(s, \alpha, \beta)$, $y = g(s, \alpha, \beta)$, *εἶναι τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τοῦ* LAGRANGE-EULER, *παραστήσωμεν δὲ διὰ* α_0, β_0, $\overline{\alpha}_0$, $\overline{\beta}_0$ *τὰς τιμὰς τῶν* α *καὶ* β, *αἵτινες δίδουν τὰ τόξα* P_1P_0 *καὶ* $\overline{P}_0P_2$, *καὶ διὰ* $s=s_0$, $s=\overline{s}_0$ *τὰς τιμὰς τοῦ* s *εἰς ἃς ἀντιστοιχοῦν τὰ σημεῖα* P_0 *καὶ* $\overline{P}_0$, *δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας* a_0, b_0 *καὶ* $\overline{a}_0$, $\overline{b}_0$ *τῶν σημείων θραύσεως τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξισώσεων, αἵτινες ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς* (3) *καὶ τῶν:*

$$x_1 = f(s_1, \alpha_0, \beta_0), \qquad y_1 = g(s_1, \alpha_0, \beta_0),$$
$$x_2 = f(s_2, \overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0), \qquad y_2 = g(s_2, \overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0).$$

δ') «*Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξισώσεων*

$$\left.\begin{array}{ll} F_{x'}(a, b, \vartheta) = o, & F_{y'}(a, b, \vartheta) = o, \\ \overline{F}_{x'} \equiv F_{x'}(a, \overline{b}, \overline{\vartheta}) = o, & \overline{F}_{y'} \equiv F_{y'}(a, \overline{b}, \overline{\vartheta}) = o \end{array}\right\} \quad (3')$$

εὑρίσκομεν τὰς συνθήκας ὑπὸ τὰς ὁποίας δύο σημεῖα $P(a, b, \vartheta)$ *καὶ* $\overline{P}(a, \overline{b}, \overline{\vartheta})$, *τὰ τὰ ὁποῖα εἶναι ἀπείρως γειτονικὰ τῶν* P_0 *καὶ* $\overline{P}_0$ *ἀντιστοίχως, δύνανται νὰ εἶναι σημεῖα θραύσεως μιᾶς μὴ συνεχοῦς λύσεως τοῦ προβλήματος, ἐὰν πληροῦνται αἱ συνθῆκαι* $F_1 > o$ *καὶ* $\overline{F}_1 > o$. *Αἱ συνθῆκαι αὗται εἶναι αἱ ἑξῆς δύο:*

$$F_y(a_0, b_0, \vartheta_0) \neq o, \qquad F_y(a_0, b_0, \overline{\vartheta}_0) \neq o».$$

ε') *Ἐὰν πληροῦνται αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις* (3') *ὡς πρὸς* b, $\overline{b}$, ϑ *καὶ* $\overline{\vartheta}$, *θεωροῦντες τὴν* a *ὡς αὐθαίρετον μεταβλητήν, καὶ θὰ εἶναι:*

$$b - b_0 = b(a - a_0), \qquad \overline{b} - \overline{b}_0 = \overline{b}(a - a_0)$$
$$\vartheta - \vartheta_0 = \vartheta(a - a_0), \qquad \overline{\vartheta} - \overline{\vartheta}_0 = \overline{\vartheta}(a - a_0).$$

Ἐὰν τὰς λύσεις τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τοῦ LAGRANGE-EULER *γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφήν:*

$$x = X(s, a, b, \vartheta), \qquad y = \Psi(s, a, b, \vartheta),$$
$$\overline{x} = \overline{X}(s, \overline{a}, \overline{b}, \overline{\vartheta}) \qquad \overline{y} = \overline{\Psi}(s, \overline{a}, \overline{b}, \overline{\vartheta}),$$

καὶ εἰσαγάγωμεν εἰς ταύτας τὰς τιμὰς τῶν b, $\overline{b}$, ϑ *καὶ* $\overline{\vartheta}$ *ἐκ τῶν προηγουμένων, τὸ πλῆθος τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος δύναται νὰ παριστάνεται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων:*

$$x = \lambda(s, a), \qquad y = \mu(s, a),$$
$$\overline{x} = \overline{\lambda}(s, a), \qquad \overline{y} = \overline{\mu}(s, a)».$$

στ') «*Ἐκ τῶν ἐξισώσεων:*

$$b - b_0 = b(a - a_0), \qquad \overline{b} - \overline{b}_0 = \overline{b}(a - a_0)$$

παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὴν κίνησιν τῆς εὐθείας γραμμῆς $x = a_0$ *παραλλήλως ἑαυτῇ, τὰ σημεῖα θραύσεως* $P_0(a_0, b_0, \vartheta_0)$ *καὶ* $\overline{P}_0(a_0, \overline{b}_0, \overline{\vartheta}_0)$, *τὰ ὁποῖα εἶναι πάντοτε καὶ* *σημεῖα θραύσεως τῆς εἰς ἑκάστην θέσιν ἀντιστοιχούσης λύσεως, γράφουν δύο γραμμὰς αἵτινες ἔχουν ἐξισώσεις ἀντιστοίχους τάς:*

$$y=\psi(x), \qquad \bar{y}=\bar{\psi}(x), \tag{4}$$

προκυπτούσας ἐκ τῶν $b-b_0=b(a-a_0)$ *καὶ* $\bar{b}-\bar{b}_0=\bar{b}(a-a_0)$. *Τὰς γραμμὰς ταύτας καλοῦμεν* ***καμπύλας τῶν σημείων θραύσεως,*** *ὑποτίθεται δ' ὅτι αὗται τέμνουν (χωρὶς νὰ ἐφάπτωνται) τὰς γραμμάς, αἵτινες εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος ἡμῶν».*

ζ') *«Αἱ παράγωγοι ὡς πρὸς* x *τῶν* y *καὶ* $\bar{y}$ *τῶν* (4) *εὑρίσκονται ἐκ τῶν:*

$$F_{x'}(x,\psi(x),\vartheta(x))=0, \qquad F_{y'}(x,\psi(x),\vartheta(x))=0,$$

$$F_{x'}(x,\bar{\psi}(x),\bar{\vartheta}(x))=0, \qquad F_{y'}(x,\bar{\psi}(x),\bar{\vartheta}(x))=0,$$

καὶ εἶναι:

$$y_x=-\frac{F_x}{F_y}, \qquad \bar{y}_x=-\frac{\bar{F}_x}{\bar{F}_y},$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται ὅτι:

η') *«Αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν καμπύλων θραύσεως εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα αὐτῶν* P *καὶ* $\bar{P}$ *εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας τῶν καμπύλων:*

$$F(x,y,\vartheta(x))=0, \qquad F(x,\bar{y},\bar{\vartheta}(x))=0$$

εἰς τὰ ἀντίστοιχα τούτων σημεῖα».