ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΔΗΜΟΣΙΑ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 30ΗΣ ΜΑΡΤΙΟΥ 2004

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ (ΘΠ)

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΑΡΤΕΜΙΑΔΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὴν 16η Μαΐου 1995, σὲ ὁμιλία μου ἀπὸ τοῦ βήματος αὐτοῦ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν (Πρακτικὰ ΑΑ, Τόμος 70 (1995) Τεῦχος Β΄) μὲ τὴν εὐκαιρία τῆς ἀπονομῆς τοῦ Βραβείου Nobel Οἰκονομικῶν Ἐπιστημῶν τὴν 11-10-1994 στὸν John Nash καὶ στοὺς συνεργάτες του John Harsanyi καὶ Reinhard Selten, εἶχα ἀναφέρει ὅτι μολονότι τὸ βραβεῖο ἀπονεμήθηκε γιὰ συμβολὴ στὶς οἰκονομικὲς ἐπιστῆμες, ἡ συμβολὴ τῶν ἐπιστημόνων αὐτῶν ἦταν στὸν κλάδο τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν ποὺ ὀνομάζεται Θεωρία Παιγνίων. Ὑπενθυμίζεται ὅτι ὁ Alfred Bernhard Nobel εἶχε ὁρίσει (1901), ὅπως τὰ βραβεῖα ἀπονέμονται στὴν Χημεία, Φυσική, Φυσιολογία-Ἰατρικὴ καὶ Λογοτεχνία. Δὲν εἶχε ὁρίσει κανένα βραβεῖο γιὰ τὰ Μαθηματικά. Ἀπὸ τὰ παραπάνω προκύπτει ὅτι ἡ ἀπονομὴ τοῦ βραβείου τὸ 1994 στὶς Οἰκονομικὲς Ἐπιστῆμες ἀποτελεῖ γεγονὸς ἰδιαιτέρας σημασίας διότι γιὰ πρώτη φορά, στὴν μέχρι τότε 93 ἐτῶν ἱστορία τῶν βραβείων Nobel, ἀπονεμήθηκε αὐτὸ σὲ ἔργο ποὺ ἐμπίπτει καθ' ὁλοκληρίαν στὴν περιοχὴ τῶν Καθαρῶν Μαθηματικῶν.

Στὴν προαναφερθεῖσα ὁμιλία μου τοῦ 1995, στὴν ὁποία θὰ ἤθελα νὰ παραπέμψω καὶ τὸν σημερινό μου ἀκροατή, εἶχα παραθέσει, πρὸς διευκόλυνση ἐκεί-

Ἡ ὁμιλία αὐτὴ περιλαμβάνεται στήν: http://www.nartemiadis.gr νων οἱ ὁποῖοι δὲν ἦταν ἐξοικειωμένοι μὲ τὸ θέμα, μερικὲς εἰσαγωγικὲς καὶ ἱστορικῆς φύσεως πληροφορίες ἀναφορικὰ μὲ τὴν Θεωρία Παιγνίων.

Ἐξάλλου ἔχει πιὰ καταστεῖ γνωστὸ ὅτι οἱ ὑπὸ τοῦ Γραφείου Ἐρεύνης Θεωρητικῶν Μαθηματικῶν (ΓΕΘΜ) τῆς Ἀκαδημίας ὀργανούμενες ὁμιλίες ἔχουν ἐν γένει ἐκλαϊκευτικὸ χαρακτήρα καὶ ἀπευθύνονται στὸ εὐρὺ κοινό, διότι ἡ πραγματοποίηση ἐκλαϊκευμένων ὁμιλιῶν ἀνυψώνει «τὸ πολιτισμικὸ καὶ τὸ πολιτιστικὸ» ἐπίπεδο μιᾶς χώρας. Ὁ περιορισμὸς τῶν νέων ἐπιστημονικῶν ἀποτελεσμάτων σὲ μιὰ μικρὴ ὁμάδα εἰδικῶν ὁδηγεῖ σὲ νέκρωση τὸ φιλοσοφικὸ πνεῦμα τοῦ λαοῦ μας κάτι ποὺ στὴ συνέχεια ὁδηγεῖ σὲ πνευματικὴ πενία.

Ἡ ΘΠ εἶναι μιά, σχετικῶς πρόσφατη, μαθηματικὴ θεωρία, ἡ ὁποία ὡς κύριο ἀντικείμενο ἔχει τὴν μελέτη τῶν «ἀντιθέσεων», ποὺ παρουσιάζονται στὸ ἀνθρώπινο εἶδος. Ἂν λάβουμε ὑπόψη ὅτι οἱ ἀντιθέσεις μεταξὺ τῶν ἀνθρώπων παρουσιάσθηκαν ἀπὸ τότε ποὺ ἐμφανίσθηκε ὁ ἄνθρωπος στὴν Γῆ, ὁδηγούμαστε στὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ἐν λόγῳ θεωρία ἄργησε πολὺ νὰ κάνει τὴν ἐμφάνισή της στὴν ἐπίσης μακρὰ ἱστορία τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

Τὸ πρῶτο θεμελιῶδες θεώρημα τῆς ΘΠ ὀφείλεται στὸν John von Neumann, δημοσιεύθηκε τὸ 1928, καὶ ἀποτελοῦσε τότε ἁπλῶς ἕνα θεώρημα τῶν θεωρητικῶν μαθηματικῶν.

Ἡ οὐσιαστικὴ θεμελίωση τῆς ΘΠ ἄρχισε στὶς ἀρχὲς τῆς δεκαετίας τοῦ 1940 μὲ πρωταγωνιστὲς τὸν John von Neumann καὶ τὸν οἰκονομολόγο Oskar Morgenstern. Τὸ ἔργο τῶν δύο αὐτῶν ἐπιστημόνων δημοσιεύθηκε στὸ μνημειῶδες σύγγραμμά τους μὲ τίτλο "Theory of Games and Economic Behavior", (1944). Κατὰ τὰ χρόνια ποὺ ἀκολούθησαν τὴ δημοσίευση τοῦ συγγράμματος αὐτοῦ ἡ ΘΠ ἀναπτύχθηκε πολὺ γρήγορα, κατέχει δὲ σήμερα μιὰ κεντρικὴ θέση στὴν Οἰκονομικὴ Ἐπιστήμη, ἐνῶ ἡ συμβολή της στὶς κοινωνικὲς ἐπιστῆμες ὑπῆρξε καὶ συνεχίζει νὰ εἶναι μεγάλη καὶ οὐσιαστική.

Στὴν σημερινὴ ὁμιλία θὰ καταβληθεῖ προσπάθεια νὰ δοθεῖ μιὰ γενικὴ εἰκόνα τῆς θεωρίας, ἀποφεύγοντας ὅσο τὸ δυνατὸν τὴ γλώσσα τῶν μαθηματικῶν, μὲ τὴν ἐλπίδα ὅτι θὰ γίνει ἡ εἰκόνα αὐτὴ καταληπτὴ ἀπὸ τὸ κοινὸ στὸ ὁποῖο ἀπευθύνεται.

Στὸ ΓΕΘΜ καταβάλλεται ἐκ παραλλήλου προσπάθεια ὅπως ἐκδοθεῖ ἕνας τόμος μὲ τίτλο: «Θεωρία Παιγνίων», ὁ ὁποῖος πιθανὸν νὰ ἀποτελέσει μιὰ χρήσιμη ἑλληνικὴ βιβλιογραφικὴ ἀναφορὰ στὸ θέμα αὐτὸ καὶ θὰ ἀνταποκριθεῖ στὶς πρῶτες ἐρευνητικὲς ἀνάγκες τῶν διαφόρων περιοχῶν τῶν ἐπιστημῶν ὅπου ἡ ΘΠ ἔχει τὶς ἐφαρμογές της.

ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ - ΟΡΙΣΜΟΙ

Ἂς διασαφηνίσουμε μερικὲς ἐκ τῶν βασικῶν ἐννοιῶν τῶν ὁποίων θὰ γίνεται συχνὴ χρήση.

Μὲ τὴ λέξη «παίκτης» ἐννοοῦμε ἕνα ἄτομο ἢ ἕνα σύνολο ἀτόμων τὰ ὁποῖα ἀπαρτίζουν μιὰ ἑνότητα, λ.χ. μιὰ ἑταιρεία, ἕνα ἔθνος, ἢ ἀκόμα ἕνα βιολογικὸ εἶδος. Μὲ τὴν λέξη «παίγνιο» ἐννοοῦμε μιὰ συγκεκριμένη κατάσταση ὅπου ὑπάρχουν τουλάχιστον δύο παῖκτες. Κάθε παίκτης ἔχει στὴ διάθεσή του ἕνα ὁρισμένο πλῆθος «τρόπων δράσεως», οἱ ὁποῖοι καλοῦνται ἐν συντομία «στρατηγικές», ἀπὸ τὶς ὁποῖες ὁ παίκτης ἐπιλέγει κάθε φορὰ ἐκεῖνες ποὺ θὰ ἀκολουθήσει, εἶναι δὲ οἱ στρατηγικὲς ποὺ οἱ παῖκτες ἐπιλέγουν, αὐτὲς ποὺ καθορίζουν τὸ τελικὸ ἀποτέλεσμα τοῦ παιγνίου. Σὲ κάθε τελικὸ ἀποτέλεσμα ἑνὸς παιγνίου ἀντιστοιχεῖ ἕνα πλῆθος «ἀπολαβῶν» (κερδῶν) μὲ μιὰ ἀπολαβὴ γιὰ κάθε παίκτη. Οἱ ἀπολαβὲς αὐτὲς παριστάνουν τὴν ἀξία ποὺ ἔχει τὸ τελικὸ ἀποτέλεσμα. Ἡ ἀντίστοιχη λέξη στὴν ἀγγλικὴ τῆς λέξεως «ἀπολαβὴ» εἶναι «playoff».

Ἡ ΘΠ ἀσχολεῖται μὲ τὴ λογικὴ ἀνάλυση τῶν διαφόρων παιγνίων στὰ ὁποῖα παρατηρεῖται «ἀντίθεσις» ἢ «συνεργασία» μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων παικτῶν. Ἡ ΘΠ μελετᾶ τὸν λογικὸ τρόπο ἢ τρόπους κατὰ τοὺς ὁποίους οἱ παῖκτες πρέπει νὰ παίζουν τὰ παίγνια. Ὁ κάθε παίκτης ἐπιθυμεῖ τελικὰ νὰ ἀποκτήσει τὶς περισσότερες δυνατὲς ἀπολαβὲς ἐπηρεάζοντας ἔτσι τὸ τελικὸ ἀποτέλεσμα, κάτι ποὺ κάνουν καὶ οἱ συμπαῖκτες του, καὶ αὐτὸς εἶναι ἐξάλλου ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖο παρουσιάζονται «ἀντιθέσεις» ἢ «συνεργασίες» γιὰ τὶς ὁποῖες μιλήσαμε παραπάνω. Ἀντίθεση μπορεῖ νὰ παρουσιασθεῖ ἂν μερικοὶ παῖκτες ἀξιολογήσουν τὰ διάφορα ἀποτελέσματα κατὰ διαφορετικοὺς τρόπους. Ἀντιθέτως, «συνεργασία» μπορεῖ νὰ παρουσιασθεῖ, ἂν μερικοὶ παῖκτες συντονίσουν τὶς στρατηγικές τους γιὰ νὰ ἀποκτήσουν μεγαλύτερες ἀπολαβές. Οἱ λογικοὶ συλλογισμοὶ τοὺς ὁποίους κάνει κάθε παίκτης τὸν ὁδηγοῦν σὲ πολύπλοκες ἀποφάσεις ὡς πρὸς ποιὲς στρατηγικὲς πρέπει νὰ ἐπιλέξει. Ὑπάρχουν ἐπίσης περιπτώσεις ὅπου ὁ παίκτης πρέπει νὰ λάβει ἀποφάσεις κοινωνικῆς φύσεως ποὺ ἀφοροῦν στὸ πῶς καὶ μὲ ποιοὺς πρέπει νὰ συνεργασθεῖ.

Τὰ γνωστά μας παίγνια, ὅπως εἶναι τὸ σκάκι, τὸ bridge καθὼς καὶ ἄλλα παίγνια παρόμοιας φύσεως, ἐμπίπτουν στὴν δικαιοδοσία τῆς ΘΠ. Ἐξάλλου ἡ ΘΠ ὀφείλει τὴν ὀνομασία της στὰ παίγνια αὐτὰ διότι διαμορφώθηκε μὲ τὴν διαδικασία τῆς «ἀφαίρεσης» καὶ τῆς «γενίκευσης» τῆς μελέτης αὐτῶν τῶν παιγνίων. Εἶναι δὲ οἱ διαδικασίες αὐτὲς ἀρκετὰ ἰσχυρὲς ὥστε νὰ περιλαμβάνονται σ' αὐτὲς μιὰ μεγάλη ποικιλία σπουδαίων κοινωνικῶν καταστάσεων. Λ.χ. ἑταιρεῖες, οἱ ὁποῖες ἀκολουθοῦν στρατηγικὲς ποὺ ἀποσκοποῦν στὴν συσσωμάτωση ἢ ἐνσωμάτωση καὶ ἄλλων ἑταιρειῶν, παίζουν ἕνα παίγνιο. Τὸ ἴδιο κάνουν καὶ οἱ πολιτικοί, οἱ ὁποῖοι προσπαθοῦν νὰ κερδίσουν στὶς ἐκλογὲς ἢ οἱ βουλευτὲς ποὺ ἐπιδιώκουν νὰ ψηφισθεῖ ἢ νὰ καταψηφισθεῖ κάποιο νομοσχέδιο στὴ Βουλή, ἢ τὰ διάφορα κράτη ποὺ ἑλίσσονται στὸν διεθνῆ στίβο μὲ παρόμοιες ἐπιδιώξεις. Ἐπίσης μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε ὅτι μιὰ ὁμάδα ἀποτελούμενη ἀπὸ μέλη τοῦ ἰδίου βιολογικοῦ εἴδους εἶναι ἕνας παίκτης σὲ ἕνα παίγνιο μὲ συμπαίκτη του τὴν Φύση, ὅπου ἡ ἐπιθυμητὴ ἀπολαβὴ εἶναι νὰ μπορέσει τὸ εἶδος αὐτὸ νὰ περάσει διὰ τῶν γονιδίων στις μελλοντικὲς γενεές.

Εἶναι φανερὸ ὅτι ἂν ἦταν δυνατὸ νὰ δημιουργηθεῖ κάποια γενικὴ θεωρία, ἡ ὁποία νὰ μπορεῖ κάθε φορὰ νὰ μᾶς ὑποδεικνύει πῶς πρέπει νὰ παίζουμε στὰ διάφορα παίγνια ἐφαρμόζοντας κάποια λογικὴ διαδικασία, ἕνα δηλαδὴ γενικὸ τρόπο ἐπιλογῆς τῶν διαφόρων στρατηγικῶν, τότε ἡ χρησιμότητα μιᾶς τέτοιας θεωρίας θὰ ἦταν πράγματι ἐντυπωσιακὴ τὰ δὲ προκύπτοντα ἀποτελέσματα πάρα πολὺ σπουδαῖα. Ἀκολουθώντας μιὰ τέτοια θεωρία θὰ ἦταν δυνατὸν νὰ ἐπιλύσουμε κάθε πρόβλημα στὸ ὁποῖο θὰ παρουσιάζονταν ἀντίθεση ἢ συνεργασία μεταξὺ τῶν παικτῶν.

Ὅμως πρέπει ἐξ ἀρχῆς νὰ δηλώσουμε ὅτι ἡ ΘΠ δὲν ἔχει τέτοιες ὑπεραισιόδοξες ἀπαιτήσεις, εἶναι πολὺ πιὸ μετριόφρων, διότι ἡ ὕπαρξη μιᾶς τέτοιας γενικῆς θεωρίας προσκρούει στὰ ἑξῆς τουλάχιστον τρία ἐμπόδια.

Ἡ πρώτη δυσκολία εἶναι ὅτι στὴν πραγματικὴ καθημερινή μας ζωή, κάθε παίγνιο εἶναι κατὰ κανόνα πολύπλοκο. Πολὺ συχνὰ εἶναι πολὺ δύσκολο νὰ ἐξακριβώσουμε ποιοὶ εἶναι οἱ παῖκτες. Δὲν μποροῦμε νὰ διακρίνουμε ποιὲς εἶναι ὅλες οἱ δυνατὲς στρατηγικὲς καὶ σὲ ποιὰ ἀποτελέσματα μᾶς ὁδηγοῦν, καθὼς ἐπίσης δὲν εἶναι εὔκολο νὰ καθορίσομε ποιὲς εἶναι οἱ ἀπολαβὲς στὸ τελικὸ ἀποτέλεσμα. Ἐνώπιον ὅλων αὐτῶν τῶν δυσκολιῶν τὸ καλύτερο ποὺ ἔχουμε νὰ κάνουμε εἶναι νὰ κατασκευάσουμε ἕνα πρότυπο, ἕνα μοντέλο, τὸ ὁποῖο νὰ ἔχει ὅσο τὸ δυνατὸν περισσότερα ἀπὸ τὰ πιὸ σπουδαῖα χαρακτηριστικὰ τοῦ πραγματικοῦ φαινομένου. Ἡ ἐπιτυχὴς κατασκευὴ ἑνὸς τέτοιου μοντέλου μπορεῖ νὰ μᾶς δώσει μιὰ ἀρκετὰ σαφῆ εἰκόνα τῆς πραγματικῆς κατάστασης.

Ἕνα δεύτερο ἐμπόδιο εἶναι ὅτι, στὴν ΘΠ γιὰ τὴν ἐπίλυση τῶν διαφόρων προβλημάτων ἐφαρμόζεται πάντοτε κάποια λογικὴ διαδικασία. Κάθε δηλαδὴ παίκτης ἀναλύει μὲ λογικὸ τρόπο τὸ πῶς θὰ ἐπιτύχει τὸν στόχο του, ἐνῶ ὑποτίθεται ὅτι καὶ οἱ συμπαῖκτες του θὰ κάνουν τὸ ἴδιο πράγμα. Ὅλοι ὅμως γνωρίζουμε ὅτι στὴν πραγματικὴ καθημερινὴ ζωὴ ὅλοι οἱ παῖκτες δὲν συμπεριφέρονται πάντοτε λογικὰ στὶς περιπτώσεις ἐκεῖνες ποὺ παρουσιάζονται ἀντιθέσεις ἢ συνεργασίες μεταξὺ τῶν παικτῶν.

Θὰ ἀναφέρουμε ἐδῶ ὅτι καὶ οἱ περιπτώσεις ἐκεῖνες ὅπου οἱ παίκτες δὲν συμπεριφέρονται «λογικὰ» παρουσιάζουν ἐνδιαφέρον, ἡ δὲ ΘΠ μπορεῖ νὰ διευκολύνει τὴ μελέτη τῶν περιπτώσεων αὐτῶν.

Τὸ τρίτο καὶ σπουδαιότερο ἐμπόδιο εἶναι ὅτι ἡ ΘΠ δὲν παρέχει πάντα μιὰ μοναδικὴ ἀπάντηση στὸ πῶς πρέπει νὰ παίξουν οἱ παῖκτες ὅταν πρόκειται γιὰ παίγνια μὲ δύο παῖκτες ὅπου τὰ συμφέροντα τοῦ ἑνὸς παίκτη δὲν εἶναι τελείως ἀντίθετα πρὸς τὰ συμφέροντα τοῦ ἄλλου παίκτη. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ ὅταν τὸ πλῆθος τῶν παικτῶν εἶναι μεγαλύτερο τῶν δύο.

Ἡ ΘΠ παρέχει ἁπλῶς μιὰ ποικιλία ἀπὸ ἐνδιαφέροντα παραδείγματα, ἀναλύσεις, ὑποδείξεις, ὄχι ὅμως πλήρη σχέδια δράσεως γιὰ τὶς καταστάσεις ποὺ ἐπικρατοῦν στὶς τελευταῖες αὐτὲς περιπτώσεις.

ΠΑΙΓΝΙΑ ΜΕ ΔΥΟ ΠΑΙΚΤΕΣ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ. ΣΑΓΜΑΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Τὰ παρακάτω ἁπλὰ παραδείγματα θὰ βοηθήσουν νὰ σχηματίσουμε μιὰ σαφῆ εἰκόνα τῶν καταστάσεων ποὺ παρουσιάζονται σὲ παίγνια μὲ δύο παῖκτες, μηδενικοῦ ἀθροίσματος.

Ἄς ὀνομάσουμε Ὀρέστη καὶ Κώστα τοὺς δύο παῖκτες τοῦ παιγνίου καὶ ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ Ὀρέστης στὸ παίγνιο ποὺ ἀναφέρουμε ἀμέσως παρακάτω, διαθέτει τρεῖς στρατηγικές, τὶς ὁποῖες ὀνομάζουμε ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ἐνῶ ὁ Κώστας διαθέτει μόνο δύο στρατηγικές, τὶς ΚΑ, ΚΒ. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὰ τελικὰ δυνατὰ ἀποτελέσματα τοῦ παιγνίου εἶναι 3×2=6. Τὴν κατάσταση τοῦ παιγνίου μποροῦμε νὰ τὴν παραστήσουμε μὲ τὸν ἀκόλουθο ΠΙΝΑΚΑ 1.

		ΚΩΣΤΑΣ	
		A	B
	A	(2, -2)	(-3, 3)
ΟΡΕΣΤΗΣ	B	(0, 0)	(2, -2)
	Γ	(-5, 5)	(10, -10)

Ἂς δοῦμε πῶς παίζεται τὸ παίγνιο τὸ ὁποῖο παριστάνει ὁ Πίνακας 1: Ὁ Ὀρέστης διαλέγει μιὰ ἀπὸ τὶς στρατηγικὲς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ποὺ ἔχει στὴ διάθεσή του, μιὰ δηλαδὴ ἀπὸ τὶς ὁριζόντιες γραμμὲς τοῦ Πίνακα 1, καὶ σημειώνει τὴν ἐπιλογή του σὲ ἕνα χαρτὶ τὸ ὁποῖο τοποθετεῖ ἐπάνω στὸ τραπέζι, μὲ τὴν ἔνδειξη ποὺ σημείωσε πρὸς τὰ κάτω γιὰ νὰ μὴ φαίνεται. Ὁ Κώστας διαλέγει καὶ αὐτὸς μιὰ ἀπὸ τὶς στραγητικές του ΚΑ, ΚΒ, μία δηλαδὴ ἀπὸ τὶς κάθετες στῆλες καὶ κάνει καὶ αὐτὸς τὸ ἴδιο. Στὴ συνέχεια ἀνοίγουν τὰ δύο χαρτιὰ καὶ παρατηροῦν ποιὲς εἶναι οἱ ἀπολαβὲς τοῦ κάθε παίκτη. Ἔτσι, ἂν ὁ Ὀρέστης ἐπέλεξε τὴ στρατηγικὴ ΟΓ, ὁ δὲ Κώστας τὴ στρατηγικὴ ΚΑ, τότε τὸ τελικὸ ἀποτέλεσμα εἶναι (-5, 5) ποὺ σημαίνει ὅτι ὁ Ὀρέστης χάνει 5 μονάδες ὁ δὲ Κώστας κερδίζει 5 μονάδες. Στὰ ζεύγη ἀριθμῶν τοῦ πίνακα, ὁ πρῶτος ἀριθμὸς δηλώνει τὴν ἀπολαβὴ τοῦ Ὀρέστη καὶ ὁ δεύτερος τὴν ἀπολαβὴ τοῦ Κώστα.

Στὸ παραπάνω παίγνιο παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολαβῶν τῶν παικτῶν, σὲ κάθε ἀποτέλεσμα, ἰσοῦται μὲ μηδέν. Αὐτὸ δηλαδὴ ποὺ κερδίζει ὁ Ὀρέστης τὸ χάνει ὁ Κώστας καὶ ἀντιστρόφως. Τὰ συμφέροντα τῶν δύο παικτῶν εἶναι τελείως ἀντίθετα. Παίγνια τοῦ εἴδους αὐτοῦ καλοῦνται «παίγνια μηδενικοῦ ἀθροίσματος», καὶ παριστάνουν καταστάσεις ὅπου μεταξὺ τῶν παικτῶν ὑπάρχει πλήρης ἀντίθεσις.

Γιὰ τὴν ἁπλούστευση τῆς γραφῆς, τοῦ λοιποῦ, τὰ παίγνια μὲ δύο παῖκτες, μηδενικοῦ ἀθροίσματος, θὰ παριστάνονται μὲ πίνακες ὅπου ἀναγράφονται μόνο οἱ ἀπολαβὲς τοῦ Ὀρέστη, ἀφοῦ οἱ ἀντίστοιχες ἀπολαβὲς τοῦ Κώστα εἶναι οἱ ἀντίθετες ἐκείνων τοῦ Ὀρέστη. Συνεπῶς ὁ Πίνακας 1 μπορεῖ νὰ γραφεῖ, ὅπως παρουσιάζεται στὸν ΠΙΝΑΚΑ 2.

		ΚΩΣΤΑΣ	
		Α	Β
	Α	2	-3
ΟΡΕΣΤΗΣ	Β	0	2
	Γ	-5	10

Ἂς παραμείνουμε ὅμως γιὰ λίγο στὸ παίγνιο τοῦ Πίνακα 1, καὶ ἂς παρακολουθήσουμε κάποιον ἀπὸ τοὺς παῖκτες, π.χ. τὸν Ὀρέστη, στὶς σκέψεις του.

Ὀρέστης: Θὰ παίξω ΟΓ γιὰ νὰ κερδίσω 10, ἂν βέβαια ὁ Κώστας παίξει ΚΒ. Ἂν ὅμως ὁ Κώστας μαντεύσει τὴ σκέψη μου αὐτή, τότε θὰ παίξει ΚΑ, ὁπότε χάνω 5. Γι' αὐτὸ πρέπει νὰ παίξω ΟΑ γιὰ νὰ κερδίσω 2. Ἂν ὅμως ὁ Κώστας πάλι μαντέψει ἢ προβλέψει τὴ σκέψη μου αὐτή, θὰ παίξει ΚΒ καὶ τότε χάνω 3, ὁπότε ἐγὼ πρέπει νὰ παίξω ΟΓ καὶ ἔτσι ἐπιστρέφουμε ἐκεῖ ἀπὸ ὅπου ἀρχίσαμε, κ.ο.κ.

Παρατηροῦμε ὅτι στὸ παίγνιο αὐτὸ δὲν ὑπάρχει κάποιο σημεῖο ὅπου οἱ παῖκτες θὰ κρίνουν ὅτι πρέπει νὰ σταματήσουν. Οἱ σκέψεις: «ἂν αὐτὸς νομίζει ὅτι νομίζω ὅτι θὰ κάνει αὐτό, τότε ἐγὼ πρέπει νὰ κάνω ἐκεῖνο» δὲν ὁδηγοῦν πουθενά. Στὶς περιπτώσεις τῶν παιγνίων μὲ δύο παῖκτες μηδενικοῦ ἀθροίσματος, ὅπου προκύπτουν διλήμματα τοῦ εἴδους ποὺ περιγράψαμε, ἡ ΘΠ δίνει λύση σ' αὐτὰ κάνοντας χρήση τῶν λεγομένων «μεικτῶν στρατηγικῶν», περιγράφει δηλαδὴ πλήρως τὴ λογικὴ διαδικασία ποὺ πρέπει νὰ ἀκολουθηθεῖ. Γιὰ τὶς μεικτὲς στρατηγικὲς θὰ μιλήσουμε σὲ λίγο. Θὰ διευκρινίσουμε ἐπίσης κάπως λεπτομερέστερα τὶς ἔννοιες «στρατηγική», «ἀπολαβή», ποὺ ἤδη χρησιμοποιήσαμε καὶ θὰ ἀναφέρουμε ἐφαρμογὲς παιγνίων μὲ δύο παῖκτες μηδενικοῦ ἀθροίσματος.

Ἕνα ἄλλο εἶδος παιγνίων μὲ δύο παῖκτες εἶναι ἐκεῖνα ποὺ δὲν εἶναι μηδενικοῦ ἀθροίσματος καὶ εἶναι αὐτὰ πολὺ πιὸ πολύπλοκα ἀπὸ τὰ παίγνια μηδενικοῦ ἀθροίσματος.

Στὸν πίνακα ποὺ παριστάνει ἕνα τέτοιο παίγνιο πρέπει προφανῶς νὰ ἀναγράφονται οἱ ἀπολαβὲς καὶ τῶν δύο παικτῶν καὶ ὄχι μόνο τοῦ Ὀρέστη (ΠΙΝΑΚΑΣ 3).

Παράδειγμα

		ΚΩΣΤΑΣ	
		Α	Β
ΟΡΕΣΤΗΣ	Α	(1, 1)	(-2, 2)
	Β	(2, -2)	(-5, -5)

Στὸ παράδειγμα αὐτὸ τὸ δεύτερο συμφερότερο ἀποτέλεσμα καὶ γιὰ τοὺς δύο παῖκτες εἶναι τὸ (1, 1). Ἂν ὁ Ὀρέστης ἐπιχειρήσει νὰ παίξει ΟΑ καὶ ὁ Κώστας μαντεύσει τὴν ἐπιλογὴ αὐτή, τότε ὁ Κώστας θὰ παίξει ΚΒ. Παρόμοιους συλλογισμοὺς θὰ κάνει καὶ ὁ Ὀρέστης. Ἂν καὶ οἱ δύο παῖκτες σκεφθοῦν κατ' αὐτὸ τὸν τρόπο τότε θὰ καταλήξουν στὸ ἀποτέλεσμα (-5, -5) ποὺ εἶναι τὸ χειρότερο καὶ γιὰ τοὺς δύο.

Ἕνα πολὺ γνωστὸ παράδειγμα παιγνίου τοῦ εἴδους αὐτοῦ, μὲ τὸ ὁποῖο θὰ ἀσχοληθοῦμε ἀργότερα, εἶναι «Τὸ Δίλημμα τοῦ Φυλακισμένου».

Ἡ ΘΠ ἀσχολεῖται μὲ τὰ παίγνια αὐτοῦ τοῦ εἴδους, ἡ δὲ σχετικὴ θεωρία εἶναι πολύπλοκη καὶ ἐκτεταμένη. Ἐξετάζει περιπτώσεις ὅπου οἱ δύο παῖκτες ἐπικοινωνοῦν μεταξύ τους καὶ περιπτώσεις ποὺ δὲν ἐπικοινωνοῦν. Ἐξετάζει ἐπίσης περιπτώσεις κατὰ τὶς ὁποῖες μπορεῖ νὰ ὑπάρχει κάποιος διαιτητής, ὁ ὁποῖος προσπαθεῖ νὰ ἐπιτύχει ἕνα δίκαιο διακανονισμὸ ποὺ νὰ συμφέρει καὶ τοὺς δύο παῖκτες.

Ἡ ΘΠ δὲν παρέχει γενικὴ λύση στὰ παίγνια δύο παικτῶν μὴ μηδενικοῦ ἀθροίσματος. Παρέχει ὅμως ἕνα πλῆθος ἐνδιαφερουσῶν παρατηρήσεων καὶ ἐφαρμογῶν σὲ καταστάσεις ποὺ ἐμπίπτουν στὴν πειραματικὴ κοινωνικὴ ψυχολογία, στὶς διαπραγματεύσεις ποὺ διεξάγονται μεταξὺ ἐργατικῶν ἑνώσεων, καὶ στὰ λεγόμενα «οἰκονομικὰ διπώλεια». Θὰ ἐξηγήσουμε, παρακάτω, τὴ σημασία τῆς λέξεως «διπώλειο».

Στὸ σημεῖο αὐτὸ πρέπει νὰ παρατηρήσουμε ὅτι στὰ παίγνια μὲ δύο παῖκτες ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω, οἱ παῖκτες ἐπιλέγουν τὶς στρατηγικές τους συγχρόνως, χωρὶς μάλιστα ὁ ἕνας παίκτης νὰ γνωρίζει ποιὰ στρατηγικὴ ἐπέλεξε ὁ συμπαίκτης του. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ θὰ μποροῦσε νὰ θεωρηθεῖ ὡς ἕνα σοβαρὸ μειονέκτημα τοῦ παιγνίου, δεδομένου ὅτι σὲ πολλὲς καταστάσεις ποὺ παρουσιάζονται στὴν καθημερινὴ ζωή, καὶ ὅπου ὑπάρχουν ἀντιθέσεις μεταξὺ τῶν παικτῶν, οἱ ἀποφάσεις δὲν λαμβάνονται συγχρόνως ἀλλὰ διαδοχικὰ μεταξὺ τῶν παικτῶν, διότι οἱ ἐπιλογὲς ποὺ κάνουν οἱ παῖκτες περιέρχονται εἰς γνῶσιν τοῦ ἑνὸς καὶ τοῦ ἄλλου παίκτη, κατὰ τὴν ἐξέλιξη τοῦ παιγνίου. Ἡ ΘΠ ἐξετάζει τὶς περιπτώσεις αὐτὲς μὲ μιὰ μέθοδο ὅπου κατασκευάζεται ἕνα πρότυπο (model) μιᾶς τέτοιας διαδοχικῆς ἐπιλογῆς τῶν στρατηγικῶν, τὸ λεγόμενο «δενδροειδὲς παίγνιο» (game-tree). Ὅμως αὐτὸ ποὺ προκαλεῖ ἔκπληξη στὴν περίπτωση αὐτὴ εἶναι ὅτι τὸ νέο αὐτὸ πρότυπο μπορεῖ πάντοτε νὰ ἀναχθεῖ στὸ γνωστό μας πρότυπο ποὺ δίδεται διὰ πινάκων.

Στὰ παίγνια ποὺ ἀναφέραμε μέχρι τώρα ὑπῆρχαν μόνο δύο παῖκτες, οἱ δὲ καταστάσεις ποὺ παρουσιάζονταν ἦταν ἤδη πολύπλοκες. Ὑπάρχουν ὅμως παίγνια ὅπου τὸ πλῆθος τῶν παικτῶν ὑπερβαίνει τοὺς δύο, οἱ δὲ παρουσιαζόμενες καταστάσεις εἶναι πολὺ πιὸ πολύπλοκες διότι στὰ παίγνια αὐτὰ ὑπάρχει τὸ ἐνδεχόμενο δημιουργίας συμμαχιῶν μεταξὺ ὁρισμένων ἐκ τῶν παικτῶν.

Στὴν λεγόμενη ΘΠ Ν-προσώπων ($N > 2$) ἡ προσπάθεια δὲν ἐπικεντρώνεται στὸ πῶς θὰ παίξει ὁ κάθε παίκτης, ἀλλὰ ἐπικεντρώνεται περισσότερο στὸ ποιὲς συνθῆκες πρέπει νὰ διαμορφωθοῦν καὶ στὸ πῶς οἱ συνθῆκες αὐτὲς θὰ καταμερίσουν τὶς προκύπτουσες ἀπολαβές.

Τὸ ἀπαραίτητο μαθηματικὸ στοιχεῖο εἶναι διάσπαρτο σὲ ὅλες αὐτὲς τὶς ἐκφάνσεις τῆς ΘΠ σὲ βαθμὸ ποὺ ποικίλλει ἀνάλογα μὲ τὶς καταστάσεις ποὺ παρουσιάζονται.

Συνοψίζοντας τὰ ὅσα μέχρι τώρα ἀναφέραμε θὰ ἐπαναλάβουμε ὅτι ἡ ΘΠ ἀσχολεῖται μὲ τὰ ἀκόλουθα:

1. Παίγνια μὲ δύο παῖκτες μηδενικοῦ ἀθροίσματος.

Ἐφαρμογές: Ἀνθρωπολογία – Πολεμικὲς ἐπιχειρήσεις – Φιλοσοφία – Δενδροειδῆ παίγνια – Ἐμπορικὲς ἐπιχειρήσεις καὶ ἄλλες.

2. Παίγνια μὲ δύο παῖκτες μὴ μηδενικοῦ ἀθροίσματος.

Ἐφαρμογές: Κοινωνικὴ Ψυχολογία – Βιολογία, κ.ἄ. Στὶς ἐφαρμογὲς αὐτὲς ἀνήκει ἐπίσης τὸ λεγόμενο «Duopoly Problem». Μὲ τὴν λέξη duopoly (διπώλειο) ἐννοοῦμε τὴν κατάσταση ἐκείνη ὅπου δύο ἑταιρεῖες, μόνο, ἐλέγχουν τὴν ἀγορὰ ὡς πρὸς κάποιο εἶδος ἢ εἴδη. Τὸ πρόβλημα ἐδῶ ἔγκειται στὸ νὰ ἀποφασισθεῖ πῶς οἱ ἑταιρεῖες αὐτὲς πρέπει νὰ προσαρμόσουν τὴν παραγωγή τους προκειμένου νὰ μεγιστοποιήσουν τὰ κέρδη τους. Στὸ πρόβλημα αὐτό, συνήθως, ὑπάρχουν περισσότερες τῆς μιᾶς λύσεις, τὰ δὲ ἀπαιτούμενα μαθηματικὰ περιλαμβάνουν τὴ χρήση τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ.

3. Παίγνια μὲ N-πρόσωπα ($N > 2$).

Ἐφαρμογές: Πολιτικὴ – Πρόβλημα τῶν N-φυλακισμένων – Ἀθλητικὰ – Ἀνθρωπολογία – Οἰκονομικὲς ἐπιστῆμες.

Θὰ συνεχίσουμε μὲ μερικὰ ἀκόμη σχόλια καὶ παραδείγματα ποὺ ἀφοροῦν σὲ παίγνια μὲ δύο μόνο παῖκτες. Δὲν θὰ ἀσχοληθοῦμε μὲ τὴν περίπτωση τῶν παιγνίων μὲ N-πρόσωπα ($N > 2$), ἡ ὁποία ἀποτελεῖ καὶ τὴν πιὸ ἀκανθώδη περιοχὴ τῆς ΘΠ.

Ἄς θεωρήσουμε τὸ ἀκόλουθο παίγνιο μὲ δύο παῖκτες μηδενικοῦ ἀθροίσματος (ΠΙΝΑΚΑΣ 4).

		ΚΩΣΤΑΣ			
		Α	Β	Γ	Δ
	Α	12	-1	1	0
ΟΡΕΣΤΗΣ	Β	5	1	7	-20
	Γ	3	2	4	3
	Δ	-16	0	0	16

Ὑπενθυμίζεται ὅτι ὁ Ὀρέστης ἐπιθυμεῖ οἱ ἀπολαβὲς (στὸν πίνακα 4) νὰ εἶναι μεγάλες (16 εἶναι ἡ μεγαλύτερη), ἐνῶ ὁ Κώστας ἐπιθυμεῖ οἱ ἀπολαβὲς (στὸν Πίνακα 4) νὰ εἶναι μικρὲς (-20 εἶναι ἡ μικρότερη), διότι τότε οἱ δικές του εἶναι οἱ ἀντίθετες τῶν ἀναγραφομένων.

Τὸ παραπάνω παίγνιο παίχθηκε (βλ. Game Theory and Srategy, by P.D. Straffin, p. 7) ἕνα μεγάλο ἀριθμὸ φορῶν ἀπὸ φοιτητὲς ποὺ παρακολουθοῦσαν τὸ μάθημα τῆς ΘΠ. Στὴ συνέχεια ἔγινε μιὰ προσεκτικὴ καταγραφὴ καὶ ἀνάλυση τῶν ἀποτελεσμάτων. Κατὰ τὴν καταγραφὴ τῶν ἀποτελεσμάτων τὸ πρῶτο πρᾶγμα ποὺ παρατηρήθηκε ἦταν, ὅτι ἡ στρατηγικὴ ΚΓ χρησιμοποιήθηκε πολὺ λίγες φορὲς (2%). Τὸ γεγονὸς αὐτὸ εἶναι εὐεξήγητο ἂν κανεὶς προσέξει ὅτι στὴ στρατηγικὴ ΚΓ δὲν ὑπάρχουν ἀρνητικοὶ ἀριθμοί. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, ὅ,τι καὶ νὰ εἶχε παίξει ὁ Ὀρέστης, ὁ Κώστας παίζοντας ΚΓ θὰ ἔχανε ὁπωσδήποτε. Ἕνας δεύτερος λόγος, γιὰ τὸν ὁποῖο ἡ στρατηγικὴ ΚΓ χρησιμοποιήθηκε τόσες λίγες φορές, εἶναι ὅτι ἡ στρατηγικὴ ΚΒ εἶναι αὐστηρῶς πιὸ ἐπικερδὴς ἀπὸ τὴν ΚΓ διότι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ τῆς δεύτερης στήλης εἶναι μικρότεροι ἢ ἴσοι τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν τῆς τρίτης στήλης. Στὴν δεύτερη αὐτὴ περίπτωση λέγουμε ὅτι ἡ στρατηγικὴ ΚΒ δεσπόζει τῆς ΚΓ ἢ ὅτι ἡ ΚΓ δεσπόζεται ἀπὸ τὴν ΚΒ. Ἀπὸ τὰ παραπάνω προκύπτει ἡ ἀκόλουθη:

Ἀρχὴ τῆς δεσπόζουσας στρατηγικῆς: «Μὴν ἀκολουθεῖτε ποτὲ μιὰ στρατηγικὴ ἡ ὁποία δεσπόζεται ἀπὸ κάποια ἄλλη».

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι πρέπει ἐξαρχῆς νὰ ἐντοπίζονται καὶ νὰ ἀπαλείφονται οἱ στρατηγικὲς ἐκεῖνες οἱ ὁποῖες δεσπόζονται ἀπὸ ἄλλες στρατηγικές.

Ἕνα δεύτερο πρᾶγμα ποὺ παρατηρήθηκε στὸ παίγνιο τοῦ Πίνακα 4, ἦταν ὅτι οἱ στρατηγικὲς ΟΓ καὶ ΚΒ ἀκολουθήθηκαν περισσότερο ἀπὸ κάθε ἄλλη στρατηγική. Ποιοὶ ἦταν οἱ λόγοι; Ἕνας ἀπὸ τοὺς λόγους εἶναι ὅτι οἱ στρατηγικὲς ΟΓ καὶ ΚΒ εἶναι οἱ πιὸ «προσεκτικές», οἱ πιὸ «ἐπιφυλακτικές», οἱ πιὸ φρόνιμες, ἂν θέλετε, γιὰ νὰ ἀκολουθήσουν οἱ δύο παῖκτες. Ἐπιλέγοντας ΟΓ ὁ Ὀρέστης εἶναι βέβαιος ὅτι κερδίζει τουλάχιστον 2 μονάδες, ἐνῶ μὲ ὁποιαδήποτε ἄλλη στρατηγικὴ κερδίζει λιγότερες. Ὁ Κώστας ἐπιλέγοντας τὴν στρατηγικὴ ΚΒ εἶναι βέβαιος ὅτι τὸ πολὺ χάνει 2 μονάδες, ἐνῶ ἐπιλέγοντας ὁποιαδήποτε ἄλλη στρατηγικὴ μπορεῖ νὰ χάσει περισσότερες ἀπὸ 2.

Γενικότερα ὑπάρχουν ἰσχυροὶ λόγοι γιὰ τοὺς ὁποίους οἱ παῖκτες ἐπέλεξαν τὶς στρατηγικὲς ΟΓ καὶ ΚΒ.

Παραθέτουμε δύο ἀπὸ τοὺς λόγους αὐτούς.

- Οἱ ἐπιλογὲς Ὀρέστης Γ – Κώστας Β παρέχουν ἕνα *ἰσόρροπο ἀποτέλεσμα.*

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἂν ὁ Κώστας γνωρίζει ἢ πιστεύει ὅτι ὁ Ὀρέστης θὰ ἐπιλέξει ΟΓ, ὁ Κώστας θὰ ἀπαντήσει ἐπιλέγοντας ΚΒ. Παρομοίως, ΟΓ εἶναι ἡ καλύτερη ἀπάντηση στὴν ἐπιλογὴ ΚΒ. Ἂν ἀμφότεροι οἱ παῖκτες ἐπιλέξουν τὶς στρατηγικὲς αὐτές, τότε κανένας ἐξ αὐτῶν δὲν ἔχει κίνητρο νὰ ἐπιλέξει κάποια διαφορετικὴ στρατηγική.

- Ἐπιλέγοντας ΟΓ, ὁ Ὀρέστης εἶναι βέβαιος ὅτι κερδίζει τουλάχιστον δύο μονάδες. Ὁ Κώστας ἐπιλέγοντας ΚΒ εἶναι βέβαιος ὅτι ὁ Ὀρέστης δὲν θὰ κερδίσει *παραπάνω ἀπό δύο μονάδες.*

Στὴν περίπτωση ποὺ ὁ Ὀρέστης κερδίζει λιγότερο ἀπὸ 2, θὰ κέρδιζε περισσότερα ἂν εἶχε ἐπιλέξει ΟΓ. Ἂν ὁ Ὀρέστης κερδίζει περισσότερα ἀπὸ 2, τότε ὁ Κώστας θὰ ἦταν συμφερότερο νὰ ἐπιλέξει ΚΒ.

Ἂν οἱ παῖκτες δὲν ἐπιλέξουν τὶς ἰσόρροπες στρατηγικές, τότε καὶ ὁ ἕνας καὶ ὁ ἄλλος γνωρίζει ὅτι ἢ ἐκεῖνος ἢ ὁ ἀντίπαλός του θὰ μποροῦσε νὰ ἐπιδιώξει ἕνα συμφερότερο ἀποτέλεσμα.

Οἱ θεωρητικοὶ μελετητὲς τῆς ΘΠ θεωροῦν τοὺς δύο παραπάνω λόγους ὅτι εἶναι ἀρκετὰ ἰσχυρὰ ἐπιχειρήματα γιὰ νὰ ἀποφανθοῦν ὅτι ἡ στρατηγικὴ ΟΓ – ΚΒ ἀποτελεῖ μιὰ λογικὴ ἐπιλογὴ στὸ παίγνιο αὐτό.

Τὰ ἐπιχειρήματα αὐτὰ προκύπτουν ἀπὸ τὸ ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα ΟΓ – ΚΒ εἶναι, συγχρόνως, ὁ μικρότερος ἀριθμὸς τῆς ὁριζόντιας γραμμῆς στὴν ὁποία ἀνήκει καὶ ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς τῆς στήλης στὴν ὁποία ἀνήκει. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι οἱ στρατηγικὲς οἱ ὁποῖες ὁδηγοῦν στὸ ἀποτέλεσμα αὐτό, ἤτοι τὸ 2, εἶναι οἱ βέλτιστες ἀπαντήσεις ποὺ μπορεῖ νὰ δώσει κάθε παίκτης στὸν συμπαίκτη του, καὶ ὅτι ἀμφότεροι οἱ παῖκτες εἶναι βέβαιοι ὅτι ἔτσι δὲν θὰ καταλήξουν σὲ τιμὴ χαμηλότερη ἀπὸ αὐτήν.

Ὁ ρ ι σ μ ό ς. Ἕνα ἀποτέλεσμα ἑνὸς πίνακα (ὅπου εἶναι σημειωμένες μόνο οἱ ἀπολαβὲς τοῦ Ὀρέστη) καλεῖται *σαγματικὸ σημεῖο*, ἂν ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ εἶναι ὁ μικρότερος ἢ ἴσος τῆς ὁριζόντιας γραμμῆς στὴν ὁποία αὐτὸς ἀνήκει καὶ ὁ μεγαλύτερος ἢ ἴσος τῆς στήλης στὴν ὁποία ἀνήκει.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω προκύπτει ὅτι ἂν ὁ πίνακας ποὺ παριστάνει ἕνα παίγνιο ἔχει ἕνα σαγματικὸ σημεῖο, τότε ἀμφότεροι οἱ παῖκτες πρέπει νὰ ἐπιλέξουν τὶς στρατηγικὲς ποὺ παρέχουν τὸ σαγματικὸ αὐτὸ σημεῖο.

Ἂν ἕνα παίγνιο ἔχει σαγματικὸ σημεῖο, τότε ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτὸ καλεῖται *ἡ τιμὴ τοῦ παιγνίου* (the value of the game).

Ἕνα παίγνιο μπορεῖ νὰ ἔχει περισσότερα ἀπὸ ἕνα σαγματικὰ σημεῖα, *οἱ ἀριθμητικὲς ὅμως τιμὲς αὐτῶν εἶναι μεταξύ τους ἴσες*. Στὸ παρακάτω παίγνιο ὑπάρχουν τέσσερα σαγματικὰ σημεῖα (ΠΙΝΑΚΑΣ 5).

		ΚΩΣΤΑΣ			
		Α	Β	Γ	Δ
	Α	4	**2**	5	**2**
ΟΡΕΣΤΗΣ	Β	2	1	-1	-20
	Γ	3	**2**	4	**2**
	Δ	-16	0	16	1

Τὰ τέσσερα σαγματικὰ σημεῖα (**2**) τοῦ Πίνακα 5 εἶναι καὶ τὰ μοναδικὰ σαγματικὰ σημεῖα. Τὸ ἀποτέλεσμα «2» ἤτοι ΟΒ – ΚΑ δὲν εἶναι σαγματικὸ σημεῖο.

Τὰ σαγματικὰ αὐτὰ σημεῖα εὑρίσκονται στὶς κορυφὲς ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, ἰσχύει δὲ ἡ ἰδιότητα αὐτὴ γιὰ κάθε παίγνιο τὸ ὁποῖο παριστάνεται μὲ πίνακα καὶ ἔχει πολλαπλὰ σαγματικὰ σημεῖα. Ἐπίσης ἰσχύει ὅτι ἂν *οἱ ἀντίπαλοι Ὀρέστης καὶ Κώστας ἐπιλέγουν στρατηγικὲς οἱ ὁποῖες περιλαμβάνουν σαγματικὰ σημεῖα, τὸ ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι πάντα ἕνα σαγματικὸ σημεῖο.*

Γιὰ νὰ ἐλέγξουμε ἂν ἕνα παίγνιο ἔχει σαγματικὰ σημεῖα καὶ στὴν περίπτωση ποὺ ὑπάρχουν γιὰ νὰ τὰ βροῦμε ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Γράφουμε στὸ κάτω μέρος τοῦ πίνακος τὸν μεγαλύτερο ἀριθμὸ κάθε στήλης, σημειώνουμε τὸν μικρότερο ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς καὶ τὸν ὀνομάζουμε minimax. Στὴ συνέχεια, δεξιὰ κάθε ὁριζόντιας γραμμῆς, γράφουμε τὸν μικρότερο ἀριθμὸ τῆς γραμμῆς αὐτῆς, σημειώνουμε τὸν μεγαλύτερο ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς καὶ τὸν ὀνομάζουμε maximin. Ἂν συμβεῖ νὰ ἔχουμε:

$$\text{minimax} = \text{maximin} = \sigma$$

τότε ὁ ἀριθμὸς σ εἶναι ἕνα σαγματικὸ σημεῖο (ΠΙΝΑΚΑΣ 6).

Παράδειγμα

		ΚΩΣΤΑΣ				
		Α	Β	Γ	Δ	Ἐλάχιστα γραμμῶν
	Α	4	3	2	5	2 ←maximin
ΟΡΕΣΤΗΣ	Β	-10	2	0	-1	-10
	Γ	7	5	2	3	2 ←maximin
	Δ	0	8	-4	-5	-5
	Μέγιστα στηλῶν	7	8	2	5	
				↑ minimax		

Στὸν Πίνακα 6, τὰ δύο σαγματικὰ σημεῖα εἶναι ΟΑ – ΚΓ, ΟΓ – ΚΓ.

Μικτὴ στρατηγική.

Στὸ παράδειγμα ποὺ ἀκολουθεῖ (ΠΙΝΑΚΑΣ 7), τὸ ὁποῖο εἴχαμε δώσει καὶ στὴν ἀρχὴ τῆς ὁμιλίας, παρατηροῦμε ὅτι ἔχουμε minimax ≠ maximin, ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ παίγνιο αὐτὸ δὲν ἔχει σαγματικὸ σημεῖο. Ἐξ ἄλλου, ἡ μὴ ὕπαρξη σαγματικοῦ σημείου εἶναι καὶ ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖο οἱ ἐπιλογὲς συνεχίζονταν ἐπ' ἀόριστον, χωρὶς ἰσόρροπο τελικὸ ἀποτέλεσμα.

		ΚΩΣΤΑΣ		
		Α	Β	Ἐλάχιστα Γραμμῶν
	Α	2	-3	-3
ΟΡΕΣΤΗΣ	Β	0	2	0 ←maximin
	Γ	-5	10	5
	Μέγιστα στηλῶν	2	10	
		↑ minimax		

Στὰ παίγνια τοῦ εἴδους αὐτοῦ, ὅπου δὲν ὑπάρχει σαγματικὸ σημεῖο, εἶναι φυσικὸ κανένας ἀπὸ τοὺς δύο παῖκτες νὰ μὴν μπορεῖ νὰ ἐπιλέξει κάποια στρατηγικὴ μὲ βεβαιότητα, διότι ὁ συμπαίκτης του μπορεῖ νὰ ἐπωφεληθεῖ ἀπὸ τὴν ἐπιλογὴ αὐτή. Εἴχαμε πεῖ στὴν ἀρχὴ τῆς ὁμιλίας ὅτι στὶς περιπτώσεις αὐτὲς (ὅταν δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει σαγματικὸ σημεῖο) ὁ παίκτης ἀκολουθεῖ τὴ λεγόμενη *μικτὴ στρατηγική*. Ὅταν ὑπάρχει σαγματικὸ σημεῖο τότε ἡ ἀκολουθούμενη στρατηγικὴ καλεῖται *καθαρὴ στρατηγική*. Ἰδοὺ ἕνα παράδειγμα παιγνίου ὅπου θὰ ἀκολουθήσουμε τὴ μικτὴ στρατηγικὴ (ΠΙΝΑΚΑΣ 8).

		ΚΩΣΤΑΣ		
		Α	Β	Ἐλάχιστα Γραμμῶν
	Α	2	-3	-3
ΟΡΕΣΤΗΣ	Β	0	3	0 ←maximin
	Μέγιστα στηλῶν	2	3	
		↑ minimax		

Ἔχουμε $2 = \text{minimax} \neq \text{maximin} = 0$

Ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει σαγματικὸ σημεῖο, ἡ μόνη λογικὴ ὁδός, ποὺ ἐναπομένει στὸν παίκτη γιὰ νὰ ἐπιλέξει τὴ στρατηγική του, εἶναι νὰ χρησιμοποιήσει κάποιο τυχαῖο μηχανικὸ τρόπο. Μπορεῖ π.χ. ὁ Κώστας νὰ ρίξει κάποιο νόμισμα (κορώνα-γράμματα) καὶ νὰ ἀποφασίσει νὰ ἐπιλέξει τὴ στρατηγικὴ ΚΑ, ἂν ἔρθει κορώνα καὶ ΚΒ, ἂν ἔρθει γράμματα. Ἕνας τέτοιος τρόπος ἐνεργείας ἀποτελεῖ ἀνάμειξη στρατηγικῶν οἱ ὁποῖες ἐξαρτῶνται ἀπὸ δεδομένες πιθανότητες καὶ καλεῖται *μικτὴ στρατηγική*. Ἡ ἀνάλυση τοῦ ἀποτελέσματος ποὺ προκύπτει, ὅταν οἱ παῖκτες χρησιμοποιοῦν μικτὲς στρατηγικές, ἐπιτυγχάνεται μὲ τὴν χρήση τῆς ἐννοίας τῆς «ἀναμενόμενης τιμῆς» (expected value). Δίνουμε τὸν ἀκόλουθο ὁρισμό, τὸν ὁποῖο θὰ διασαφηνίσουμε ἀμέσως παρακάτω, ἐργαζόμενοι στὸ παίγνιο τοῦ Πίνακα 8.

Ὁρισμός.

Ἡ ἀναμενόμενη τιμὴ γιὰ νὰ προκύψουν οἱ ἀπολαβὲς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\chi$, μὲ ἀντίστοιχες πιθανότητες $p_1, p_2, \ldots, p_\chi$ εἶναι $p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+\ldots+p_\chi\alpha_\chi$.

Ἂν ὁ Κώστας χρησιμοποιεῖ σταθερὰ (καθ' ὅλη τὴν διάρκεια τοῦ παιγνίου) τὴν μέθοδο «κορώνα – γράμματα», τότε θὰ ἐπιλέξει ΚΑ μὲ πιθανότητα 1/2 καὶ ΚΒ μὲ πιθανότητα 1/2. Ἑπομένως, ἂν ὁ Ὀρέστης ἐπιλέξει ΟΑ, τότε θὰ ἔχει ἀπολαβὴ 2 μὲ πιθανότητα 1/2 καὶ ἀπολαβὴ -3 μὲ πιθανότητα 1/2. Ἑπομένως, ἀπὸ τὸν παραπάνω ὁρισμὸ προκύπτει, ὅτι ἡ ἀναμενόμενη ἀπολαβὴ γιὰ τὴν ἐπιλογὴ ΟΑ εἶναι 1/2 (2) + 1/2 (3) = -1/2, ἐνῶ ἡ ἀναμενόμενη ἀπολαβὴ γιὰ τὴν ΟΒ εἶναι 1/2 (0) + 1/2 (-3) = 3/2.

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἂν ὁ Ὀρέστης εἶναι βέβαιος ὅτι ὁ Κώστας θὰ παίξει σταθερὰ τὴ μικτὴ στρατηγικὴ 1/2 Α, 1/2 Β (τὴν στρατηγικὴ δηλαδὴ κορώνα-γράμματα), τότε ὁ Ὀρέστης πρέπει νὰ ἐπιλέξει ΟΒ, ποὺ τοῦ ἀποφέρει κέρδος 3/2.

Ὁ συλλογισμὸς αὐτὸς τοῦ Ὀρέστη εἶναι γνωστὸς μὲ τὴν ὀνομασία «Ἀρχὴ τῆς ἀναμενόμενης τιμῆς» καὶ διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

«Ἂν γνωρίζεις ὅτι ὁ ἀντίπαλός σου παίζει καὶ θὰ συνεχίσει νὰ παίζει μιὰ δοθεῖσα μικτὴ στρατηγική, ἀνεξάρτητα μὲ τὸ τί ἐσὺ κάνεις, τότε ἐσὺ πρέπει νὰ ἐπιλέξεις τὴ στρατηγικὴ ἐκείνη ἡ ὁποία ἔχει τὴ μεγαλύτερη ἀναμενόμενη τιμή».

Ἂς ἐξετάσουμε τώρα τὰ πράγματα ἀπὸ τὴν σκοπιὰ τοῦ Κώστα. Εἴδαμε ὅτι ἂν ὁ Κώστας χρησιμοποιεῖ σταθερὰ τὴ μικτὴ στρατηγικὴ 1/2 Α, 1/2 Β καὶ ὁ Ὀρέστης μαντεύσει τὴν ἐνέργεια αὐτὴ τοῦ Κώστα, τότε ὁ Ὀρέστης ἐπωφελεῖται τῆς γνώσης αὐτῆς καὶ ἀποκτᾶ τὴν ἀπολαβὴ 3/2.

Ὁ Κώστας, ὅμως, σκεπτόμενος ὡριμότερα, μπορεῖ νὰ χρησιμοποιήσει μιὰ μεικτὴ στρατηγικὴ μὲ διαφορετικὲς πιθανότητες ἀπὸ 1/2 Α, 1/2 Β. Μπορεῖ π.χ.

νὰ χρησιμοποιήσει κάποιο μηχανικὸ τρόπο, βάσει τοῦ ὁποίου ἡ πιθανότητα νὰ ἐπιλέξει τὴν στρατηγικὴ ΚΑ νὰ εἶναι 1/3, ἡ δὲ πιθανότητα νὰ ἐπιλέξει τὴ στρατηγικὴ ΚΒ νὰ εἶναι 2/3. Ὁπότε γεννᾶται τὸ ἐρώτημα, ἂν μπορεῖ ὁ Κώστας νὰ ἐπιλέξει τὶς πιθανότητες ἔτσι ὥστε ὁ Ὀρέστης νὰ μὴν μπορέσει νὰ ἐπωφεληθεῖ ἀπὸ τὴν ἐπιλογή του, ὅπως ἔκανε στὴν περίπτωση 1/2 Α, 1/2 Β. Γιὰ νὰ ἀπαντήσουμε στὸ ἐρώτημα αὐτό, ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ Κώστας ἐπιλέγει τὴν μικτὴ στρατηγικὴ μὲ πιθανότητα x γιὰ τὸ Α καὶ 1 - x γιὰ τὸ Β, ὅπου $0 < x < 1$. Ἂς ὑπολογίσουμε τώρα τὶς ἀναμενόμενες τιμὲς γιὰ τὸν Ὀρέστη, οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν στὶς ἐπιλογὲς ΟΑ καὶ ΟΒ. Ἔχουμε, λαμβάνοντας ὑπόψη τὸν παραπάνω ὁρισμό:

Ὀρέστης Α: $x\,(2) + (1\text{-}x)\,(-3) = -3 + 5x$

Ὀρέστης Β: $x\,(0) + (1\text{-}x)\,(3) = 3 - 3x$

Ὁ Ὀρέστης δὲν θὰ ἔχει ὄφελος ἀπὸ τὴ μικτὴ στρατηγικὴ τοῦ Κώστα, ἂν οἱ δύο ἀναμενόμενες τιμὲς εἶναι ἴσες ἤτοι $-3 + 5x = 3 - 3x$, ἂν δηλαδὴ $x = 3/4$.

Ἔτσι, ἂν ὁ Κώστας ἀκολουθήσει τὴ μικτὴ στρατηγικὴ 3/4 Α, 1/4 Β, τότε εἶναι βέβαιος ὅτι ὁ Ὀρέστης, ὅ,τι καὶ ἂν παίξει, κερδίζει κατὰ μέσο ὅρο ὄχι περισσότερες ἀπὸ 3/4 μονάδες ἀνὰ παίγνιο. Ἤτοι:

Ὀρέστης Α: $3/4\,(2) + 1/4\,(-3) = 3/4$

Ὀρέστης Β: $3/4\,(0) + 1/4\,(3) = 3/4$

Εἶναι εὔλογο νὰ θέσει κανεὶς τὸ ἐρώτημα μὲ ποιὸ μηχανικὸ τρόπο θὰ μπορεῖ ὁ Κώστας νὰ ἐπιλέγει τὴ στρατηγικὴ ΚΑ μὲ πιθανότητα 3/4 καὶ τὴν Β μὲ πιθανότητα 1/4. Στὴν περίπτωση ποὺ οἱ ἀντίστοιχες πιθανότητες ἦταν 1/2 καὶ 1/2 εἶχε χρησιμοποιήσει τὴ μέθοδο «κορώνα-γράμματα». Ἡ ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα αὐτὸ εἶναι ὅτι ὑπάρχουν τέτοιοι πολλοὶ μηχανικοὶ τρόποι τοὺς ὁποίους μπορεῖ νὰ χρησιμοποιήσει ὁ Κώστας. Ἰδοὺ μερικοὶ ἀπὸ αὐτούς:

i) Ρίχνει δύο νομίσματα. Ἂν καὶ οἱ δύο ἐνδείξεις εἶναι γράμματα, τότε παίζει ΚΒ, ἂν ὄχι, τότε παίζει ΚΑ.

ii) Ἀπὸ μιὰ τράπουλα (ἀνακατεμένη) τραβάει ἕνα χαρτί. Ἂν αὐτὸ εἶναι σπαθί, τότε παίζει ΚΒ, ἂν ὄχι, τότε παίζει ΚΑ.

iii) Βάζει μέσα σὲ ἕνα καπέλο τρία χαρτιὰ στὸ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἔχει σημειώσει Α, καὶ ἕνα χαρτὶ στὸ ὁποῖο ἔχει σημειώσει Β. Τραβάει ἕνα χαρτί. Ἂν ἡ ἔνδειξη εἶναι Β, τότε παίζει ΚΒ, ἂν εἶναι Α, τότε παίζει ΚΑ.

Ἂς ἐξετάσουμε τώρα τὸ παίγνιο τοῦ Πίνακα 8 ἀπὸ τῆς σκοπιᾶς τοῦ Ὀρέστη καὶ ἂς προσπαθήσουμε νὰ βροῦμε μιὰ μικτὴ στρατηγικὴ xA, (1-x) B τοῦ Ὀρέστη, ἀπὸ τὴν ὁποία ὁ Κώστας δὲν μπορεῖ νὰ ἀντλήσει κανένα ὄφελος. Ὁ Ὀρέστης κάνοντας τὸ ἴδιο εἶδος συλλογισμῶν ποὺ ἔκανε ὁ Κώστας καταλήγει:

Κώστας A: $x\,(2) + (1\text{-}x)\,(0) = 2x$

Κώστας B: $x\,(-3) + (1\text{-}x)\,(3) = 3\text{-}6x$

Θέτοντας καὶ αὐτὸς $2x = 3\text{-}6x$ εὑρίσκει $x = 3/8$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, ἂν ὁ Ὀρέστης παίξει τὴν μικτὴ στρατηγικὴ 3/8 A, 5/8 B, τότε εἶναι βέβαιος ὅτι κατὰ μέσο ὅρο, ὅτι καὶ ἂν παίξει ὁ Κώστας, θὰ κερδίσει τουλάχιστον 3/4 μονάδες, διότι:

Κώστας $A = 3/8\,(2) + 5/8\,(0) = 3/4$

Κώστας $B = 3/8\,(-3) + 5/8\,(3) = 3/4$

Ἂν συγκρίνουμε τὸ τελευταῖο αὐτὸ ἀποτέλεσμα μὲ τὸ ἀνάλογο ἀποτέλεσμα ποὺ προέκυψε προηγουμένως γιὰ τὸν Κώστα, παρατηροῦμε ὅτι ὑπάρχει μεγάλη ὁμοιότητα μὲ τὴν περίπτωση παιγνίου ὅπου ὑπάρχει σαγματικὸ σημεῖο. Μὲ ἄλλα λόγια ὁ Ὀρέστης ἔχει μιὰ μικτὴ στρατηγική, ἡ ὁποία τοῦ ἐξασφαλίζει μιὰ αναμενόμενη ἀπολαβὴ τουλάχιστον 3/4, ὁ δὲ Κώστας ἔχει καὶ αὐτὸς μιὰ μικτὴ στρατηγική, ἡ ὁποία τοῦ ἐξασφαλίζει μιὰ ἀναμενόμενη ἀπολαβὴ ὄχι περισσότερο ἀπὸ 3/4.

Ἀκολουθώντας τὸ ἴδιο σκεπτικὸ ὅπως στὴν περίπτωση τοῦ σαγματικοῦ σημείου, οἱ θεωρητικοὶ μελετητὲς τῆς ΘΠ ἀποφαίνονται ὅτι:

- 3/4 εἶναι ἡ ἀξία τοῦ παιγνίου.
- 3/4 A, 1/4 B εἶναι ἡ βέλτιστη (optimal) στρατηγικὴ τοῦ Κώστα.
- 3/8 A, 5/8 B εἶναι ἡ βέλτιστη (optimal) στρατηγικὴ τοῦ Ὀρέστη.

Ἡ τιμὴ 3/4 καὶ οἱ παραπάνω δύο βέλτιστες στρατηγικὲς φέρουν τὴν ὀνομασία «ἡ λύση τοῦ παιγνίου».

Τὸ ἀκόλουθο θεμελιῶδες θεώρημα βεβαιώνει ὅτι κάθε παίγνιο ποὺ παριστάνεται μὲ πίνακα ἔχει μιὰ τέτοια λύση.

Θεώρημα Minimax (John von Neumann-1928).

Κάθε παίγνιο τὸ ὁποῖο παριστάνεται μὲ πίνακα μὲ mxn στοιχεῖα ἔχει μιὰ λύση. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει ἕνας μοναδικὸς ἀριθμὸς υ, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται «ἡ τιμὴ τοῦ παιγνίου», καὶ ὑπάρχουν ἐπίσης βέλτιστες (καθαρὲς ἢ μικτὲς) στρατηγικὲς γιὰ τὸν Ὀρέστη καὶ γιὰ τὸν Κώστα τέτοιες ὥστε:

i) Ἂν ὁ Ὀρέστης παίξει τὴν βέλτιστή του στρατηγική, τότε ὅπως καὶ ἂν παίξει ὁ Κώστας, ἡ ἀναμενόμενη ἀπολαβὴ τοῦ Ὀρέστη εἶναι $\geq \upsilon$.

ii) Ἂν ὁ Κώστας παίξει τὴν βέλτιστή του στρατηγική, τότε ὅπως καὶ ἂν παίξει ὁ Ὀρέστης, ἡ ἀναμενόμενη ἀπολαβὴ τοῦ Κώστα εἶναι $\leq \upsilon$.

Τὸ δίλημμα τοῦ φυλακισμένου.

Τὰ μέχρι τώρα θεωρηθέντα παίγνια ἦταν παίγνια μὲ δύο παῖκτες καὶ μηδενικοῦ ἀθροίσματος.

Παρακάτω δίνουμε ἕνα παράδειγμα παιγνίου μὲ δύο παῖκτες τὸ ὁποῖο ἂν καὶ δὲν εἶναι μηδενικοῦ ἀθροίσματος ἔχει ἕνα μοναδικὸ ἰσόρροπο ἀποτέλεσμα. Πρόκειται γιὰ τὸ παίγνιο ποὺ ἀναφέραμε καὶ προηγουμένως, «Τὸ δίλημμα τοῦ φυλακισμένου». Εἶναι ἕνα παίγνιο ποὺ ἔχει εὐρέως μελετηθεῖ καὶ ἐμπίπτει στὴν περιοχὴ τῶν κοινωνικῶν ἐπιστημῶν:

«Ἡ ἀστυνομία συλλαμβάνει δύο ὑπόπτους, τὸν Ὀρέστη καὶ τὸν Κώστα, γιὰ κάποιο ἔγκλημα, καὶ τοὺς τοποθετεῖ σὲ ξεχωριστὰ κελιὰ ὥστε ἡ ἐπικοινωνία μεταξύ τους νὰ εἶναι ἀδύνατη. Ἂν καὶ τὰ ἄτομα αὐτὰ εἶναι ἔνοχοι ὁ εἰσαγγελέας δὲν μπορεῖ νὰ τοὺς καταδικάσει χωρὶς τὴν ὁμολογία τοῦ ἑνὸς τουλάχιστον ἐξ αὐτῶν ὅτι εἶναι ἔνοχος.

Ὁ εἰσαγγελέας σὲ μιὰ προσπάθεια νὰ προκαλέσει τὴν ὁμολογία τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν ὑπόπτων ἐξηγεῖ στὸν κάθε κρατούμενο τὶς ἀκόλουθες συνέπειες τῶν ἀπὸ κοινοῦ ἐνδεχομένων ἐνεργειῶν των.

α) Ἂν ὁ ἕνας ἐκ τῶν ὑπόπτων ὁμολογήσει τὴν ἐνοχή του καὶ ὁ ἄλλος δὲν τὴν ὁμολογήσει, τότε ὁ ὁμολογήσας θὰ ἀφεθεῖ ἐλεύθερος ὁ δὲ ἄλλος θὰ καταδικασθεῖ σὲ φυλάκιση 10 ἐτῶν.

β) Ἂν ἀμφότεροι ὁμολογήσουν τὴν ἐνοχή τους, τότε ὁ καθένας θὰ καταδικασθεῖ σὲ φυλάκιση 5 ἐτῶν.

γ) Ἂν ἀμφότεροι παραμείνουν σιωπηλοί (δὲν ὁμολογήσουν), τότε ὁ καθένας θὰ καταδικασθεῖ σὲ φυλάκιση ἑνὸς ἔτους.

Τὸ «Δίλημμα τοῦ Φυλακισμένου» μπορεῖ νὰ παρασταθεῖ μὲ ἕναν πίνακα 2×2 ὅπου, 4 θὰ εἶναι τὸ μέγιστο κέρδος ἑνὸς ὑπόπτου, 3 τὸ ἑπόμενο κέρδος, 2 τὸ ἑπόμενο καὶ 1 τὸ ἐλάχιστο κέρδος.

Κάθε φυλακισμένος μπορεῖ νὰ ἐπιλέξει μεταξὺ δύο στρατηγικῶν ἤτοι τῆς «ὁμολογίας» ἢ τῆς «σιωπῆς». Ἔτσι οἱ τέσσερις δυνατὲς περιπτώσεις γιὰ κάθε φυλακισμένο εἶναι:

- Νὰ ἀφεθεῖ ἐλεύθερος (4)
- Φυλάκιση ἑνὸς ἔτους (3)
- Φυλάκιση πέντε ἐτῶν (2)
- Φυλάκιση δέκα ἐτῶν (1)

Ἔχουμε τὸν ἀκόλουθο ΠΙΝΑΚΑ 9:

		ΚΩΣΤΑΣ	
		Σιωπὴ	Ὁμολογία
ΟΡΕΣΤΗΣ	Σιωπὴ	(3, 3)	(1, 4)
	Ὁμολογία	(4, 1)	(2, 2)

Τὸ τελικὸ ἀποτέλεσμα ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐπιλογὴ τῶν παικτῶν. Ἂν ἀμφότεροι ἐπιλέξουν τὴ στρατηγικὴ «σιωπή», τότε καρποῦνται τὸ (3, 3). Ὅμως ὁ κάθε φυλακισμένος ἔχει τὸ κίνητρο ποὺ τὸν ὠθεῖ νὰ ξεφύγει ἀπὸ τό (3, 3) καὶ νὰ ἀποκτήσει τὸ (4, 1) ἢ τὸ (1, 4), ἂν ὁ ἄλλος ἐπιλέξει «σιωπή». Ἐπιλέγοντας ὅμως τὴ στρατηγικὴ «ὁμολογία» ὁδηγοῦνται στὸ (2, 2), ποὺ εἶναι χειρότερο ἀπὸ τὸ (3, 3).

Κατὰ τὴν ΘΠ στὴν προκειμένη περίπτωση ἡ δεσπόζουσα στρατηγικὴ εἶναι ἡ στρατηγικὴ «ὁμολογία» καὶ τοῦτο διότι ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐπιλογὴ αὐτὴ εἶναι ἡ πιὸ συμφέρουσα γιὰ τὸν κάθε παίκτη ἀνεξαρτήτως τοῦ τί θὰ ἐπιλέξει ὁ ἄλλος παίκτης, παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι στὴν περίπτωση αὐτὴ καταλήγουν καὶ οἱ δύο στὸ ἀποτέλεσμα ποὺ χαρακτηρίζεται «ἀντίθεσις» καὶ παρέχει τὰ κέρδη (2, 2).

Ἡ στρατηγικὴ τῶν δύο ὑπόπτων κατὰ τὴν ὁποίαν καὶ οἱ δύο ὁμολογοῦν εἶναι τὸ λεγόμενο «σημεῖο ἰσορροπίας τοῦ Nash» (ἰσόρροπο ἀποτέλεσμα) διότι κανένας ἀπὸ αὐτοὺς δὲν μπορεῖ ἀλλάζοντας στρατηγικὴ νὰ βελτιώσει τὴν θέση του. Τὸ παράδοξο στὴν ὑπόθεση αὐτὴ εἶναι ὅτι, ἂν καὶ οἱ δύο εἶχαν ἀρνηθεῖ τὴν ἐνοχή τους (σιωπή), θὰ καταδικάζονταν ὁ καθένας σὲ ἑνὸς ἔτους φυλάκιση. Ἡ κοινὴ ὅμως λογικὴ τοὺς ἀναγκάζει νὰ ὁμολογήσουν καὶ νὰ καταδικασθοῦν σὲ φυλάκιση πέντε ἐτῶν.

Ἡ σπουδαιότητα τοῦ «Διλήμματος τοῦ φυλακισμένου» ἔγκειται στὸ ὅτι πολλὰ κοινωνικὰ φαινόμενα, τὰ ὁποῖα παρατηροῦνται στὴν καθημερινή μας ζωή, φαίνεται νὰ ἐμπεριέχουν στὸν πυρήνα τους τὸ «Δίλημμα τοῦ Φυλακισμένου». Ὑποθέστε ὅτι δύο μεγάλα καταστήματα συναγωνίζονται μεταξύ τους καὶ προβληματίζονται ἂν πρέπει νὰ ἐλαττώσουν τὶς τιμὲς τῶν εἰδῶν τους ἢ ὄχι. Ἂν τὸ ἄλλο κατάστημα δὲν ἐλαττώσει τὶς τιμές (σκέπτεται τὸ ἕνα κατάστημα), τότε μπορῶ νὰ προσελκύσω τοὺς πελάτες του ἐλαττώνοντας τὶς τιμές. Ἂν ὅμως τὸ ἄλλο κατάστημα ἐλαττώσει τὶς τιμές, τότε πρέπει ἐγὼ νὰ ἐλαττώσω ἀκόμη περισσότερο τὶς τιμὲς ὥστε νὰ μὴν χάσω τὴν πελατεία μου.

Παρατηροῦμε ὅτι ἂν καὶ τὰ δύο καταστήματα σκεφθοῦν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο καὶ ἐλαττώσουν τὶς τιμές, τότε οἱ ἀπολαβὲς ἐλαττώνονται καὶ εἶναι κατώτερες ἀπὸ ἐκεῖνες ποὺ θὰ εἶχαν ἂν καὶ τὰ δύο καταστήματα δὲν εἶχαν ἐλαττώσει τὶς τιμές τους.

Ἂν δύο κράτη συναγωνίζονται μεταξύ τους καὶ προσπαθεῖ τὸ καθένα νὰ ἐξοπλισθεῖ περισσότερο ἀπὸ τὸ ἄλλο, οἱ ἀντίστοιχες στρατηγικὲς μπορεῖ νὰ εἶναι «ἐξοπλισμὸς» καί «ὄχι ἐξοπλισμός», ὁπότε ὁδηγούμασε στὸ σκεπτικὸ τοῦ προηγούμενου παραδείγματος.

Ὅπως εἴδαμε, οἱ παῖκτες στὶς παραπάνω καταστάσεις μπορεῖ νὰ εἶναι κράτη, ἑταιρεῖες κ.λπ. Κάθε παίκτης προσπαθεῖ νὰ ἐνεργήσει κατὰ τρόπο συμφερότερο γι' αὐτὸν ἀκολουθώντας μιὰ συμπεριφορὰ ἀπὸ τὴν ὁποία λείπει ἡ συνεργασία, λείπει ὁ συμβιβασμός. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συμπεριφορᾶς αὐτῆς καταλήγει νὰ εἶναι χειρότερο, πιὸ ἀσύμφορο ἀπὸ ὅ,τι θὰ ἦταν ἂν οἱ παῖκτες εἶχαν συνεργασθεῖ, κάτι δηλαδὴ ἀνάλογο μὲ αὐτὸ ποὺ συνέβη μὲ τοὺς δύο ὑπόπτους στό «Δίλημμα τοῦ Φυλακισμένου».

Ἐφαρμογὴ στὴν Φιλοσοφία. Τὸ πρόβλημα τοῦ Newcomb καὶ ἡ Ἐλευθερία τῆς Βουλήσεως

Ἕνα ἀπὸ τὰ πιὸ πολυσυζητημένα προβλήματα ποὺ ἀπασχολοῦν τὴ φιλοσοφία εἶναι τὸ Πρόβλημα τῆς Ἐλευθερίας τῆς Βουλήσεως. Εἶναι ἡ βούληση τοῦ ἀνθρώπου ἐλεύθερη ἢ οἱ πράξεις μας εἶναι προκαθορισμένες; Ἕνας τρόπος προσεγγίσεως τοῦ προβλήματος αὐτοῦ εἶναι νὰ ἐξετάσουμε ἂν εἶναι δυνατὸν νὰ προβλέψουμε τὴν ἀπόφαση κάποιου ἀτόμου ὑπὸ τελείως κανονικὲς συνθῆκες.

Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ζητῶ ἀπὸ κάποιον νὰ ἐπιλέξει μεταξὺ δύο δοθέντων ἀντικειμένων καὶ τοῦ λέγω συγχρόνως ὅτι ἔχω προβλέψει καὶ σημειώσει σὲ κάποιο χαρτὶ τὴν ἐπιλογή του. Καὶ τίθεται τὸ ἐρώτημα: εἶναι δυνατόν, κατ' ἀρχήν, νὰ γνωρίζω ἐγὼ ἀρκετὰ πράγματα γιὰ τὸ ἄτομο αὐτὸ γιὰ νὰ κάνω μιὰ πρόβλεψη ἡ ὁποία νὰ μὴν εἶναι τυχαία; Μπορεῖ ἕνα ἀνώτερο ΟΝ νὰ κάνει μιὰ τέτοια πρόβλεψη; Ἂν οἱ ἀνθρώπινες πράξεις εἶναι προκαθορισμένες, ἀκριβὴς πρόβλεψη μπορεῖ νὰ εἶναι δυνατή. Ἂν ἡ ἀνθρώπινη βούληση εἶναι ἐλεύθερη, ἡ ἐλεύθερη βούληση τοῦ ἐν λόγῳ ἀτόμου μπορεῖ νὰ διαψεύσει τὴν δική μου πρόβλεψη ἢ ἐκείνη τοῦ ἀνωτέρου ΟΝΤΟΣ.

Τὸ 1960 ὁ William Newcomb, ἕνας φυσικὸς στὸ Livermore Radiation Laboratory στὴν California, ἔθεσε ἕνα πρόβλημα ἐπιλογῆς τὸ ὁποῖο μπορεῖ νὰ διατυπωθεῖ στὴν ΘΠ καὶ τὸ ὁποῖο ρίχνει ἀρκετὸ φῶς στὸ πρόβλημα τῆς Ἐλευθερίας τῆς Βουλήσεως. Παραθέτουμε τὴν περιγραφὴ τοῦ θέματος ἀπὸ τὸν φιλόσοφο Robert Nozick (1969).

Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε δύο κιβώτια κατασκευασμένα ἀπὸ ἀδιαφανὲς ὑλικό. Τὸ Κιβώτιο #1 περιλαμβάνει 1.000 εὐρώ. Τὸ Κιβώτιο #2 περιλαμβάνει ἢ 1.000.000 εὐρὼ ἢ τίποτα, κάτι ποὺ ἐξαρτᾶται ἀπὸ ὁρισμένες συνθῆκες τὶς ὁποῖες θὰ ἀναφέρουμε ἀμέσως παρακάτω.

Ἐσεῖς ἔχετε τὴν δυνατότητα νὰ κάνετε μόνο τὶς ἑξῆς δύο ἐπιλογές:

i) μπορεῖτε νὰ πάρετε καὶ τὰ δύο κιβώτια, ἢ

ii) μπορεῖτε νὰ πάρετε μόνο τὸ Κιβώτιο #2.

Οἱ συμπληρωματικὲς συνθῆκες ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω εἶναι οἱ ἑξῆς: Χθὲς ἕνα ἀνώτερο ΟΝ τὸ ὁποῖο πιστεύεται ὅτι ἔχει ἀνώτερες δυνάμεις πρόβλεψης, προέβλεψε τὸ τί θὰ κάνετε σήμερα. Ἂν προέβλεψε ὅτι θὰ πάρετε καὶ τὰ δύο κιβώτια, τότε ἄφησε τὸ Κιβώτιο #2 κενό. Ἂν προέβλεψε ὅτι θὰ πάρετε μόνο τὸ Κιβώτιο #2, τότε ἔβαλε μέσα στὸ Κιβώτιο #2 1.000.000 εὐρώ.

Τώρα ἐσεῖς σκεφθεῖτε τί θὰ κάνετε. Θὰ πάρετε καὶ τὰ δύο κιβώτια ἢ μόνο τὸ Κιβώτιο #2;

Παρατηροῦμε ὅτι πρόκειται γιὰ ἕνα παίγνιο μὲ δύο παῖκτες, ὅπου ὁ Ὀρέστης εἶστε ΕΣΕΙΣ καὶ ὁ Κώστας τὸ ἀνώτερο ΟΝ. Ἔχουμε τὸν ΠΙΝΑΚΑ 10:

		ΟΝ	
		Προλέγει θὰ πάρετε καὶ τὰ δύο Κιβώτια	Προλέγει θὰ πάρετε μόνο τὸ Κιβώτιο #2
ΕΣΕΙΣ	Παίρνετε καὶ τὰ δύο κιβώτια	1.000 εὐρώ	1.001.000 εὐρώ
	Παίρνετε μόνο τὸ κιβώτιο #2	0	1.000.000 εὐρώ

Τὸ ΟΝ ἔκανε τὴ δική του ἐπιλογή (πρόβλεψη), τὴν ὁποία ἐσεῖς δὲν γνωρίζετε καὶ εἶναι ἡ σειρά σας νὰ ἐπιλέξετε. Ποιὰ στρατηγικὴ θὰ ἐπιλέξετε;

Ἰδοὺ δύο ἰσχυρὰ ἐπιχειρήματα γιὰ νὰ κάνετε ἀντιστοίχως τὴ μιὰ ἢ τὴν ἄλλη ἐπιλογή.

Ἐπιχείρημα 1. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι παίρνω καὶ τὰ δύο κιβώτια. Τότε τὸ ΟΝ θὰ ἔχει προβλέψει ὅτι θὰ πάρω καὶ τὰ δύο κιβώτια καὶ ὡς ἐκ τούτου θὰ ἔχει ἀφήσει τὸ Κιβώτιο #2 κενό, ποὺ σημαίνει ὅτι κερδίζω μόνο 1.000 εὐρώ. Ἂν ὅμως ὑποθέσουμε ὅτι παίρνω μόνο τὸ Κιβώτιο #2, τότε τὸ ΟΝ θὰ ἔχει προβλέψει ὅτι θὰ πάρω μόνο τὸ Κιβώτιο #2 καὶ θὰ ἔχει βάλει 1.000.000 εὐρὼ στὸ Κιβώτιο #2, ποὺ σημαίνει ὅτι κερδίζω 1.000.000 εὐρώ. Εἶναι προτιμότερο νὰ ἔχω 1.000.000 εὐρὼ παρὰ μόνο 1.000 εὐρώ, *ἄρα πρέπει νὰ πάρω μόνο τὸ Κιβώτιο #2.*

Ἐπιχείρημα 2. Τὸ ΟΝ ἔκανε τὴν πρόβλεψή του χθές, τὸ δὲ 1.000.000 εὐρὼ εἴτε εἶναι στὸ Κιβώτιο #2 ἢ δὲν εἶναι. Αὐτὸ ποὺ θὰ κάνω σήμερα δὲν ἀλλάζει τὴν κατάσταση αὐτή. Ἂν τὸ 1.000.000 εὐρὼ εἶναι ἐκεῖ δὲν θὰ ἐξαφανισθεῖ ἂν πάρω καὶ τὰ δύο κιβώτια, γι' αὐτὸ μὲ συμφέρει νὰ πάρω καὶ τὰ δύο κιβώτια ἀποκτώντας ἔτσι 1.000 εὐρὼ παραπάνω. Δὲν εἶμαι πλεονέκτης ἀλλὰ γιατί νὰ χάσω 1.000 εὐρώ; Ἂν τὸ 1.000.000 εὐρὼ δὲν εἶναι ἐκεῖ, εἶμαι πιὸ κερδισμένος ἂν πάρω καὶ τὰ δύο κιβώτια κερδίζοντας ἔτσι 1.000 εὐρὼ παρὰ τίποτα. Ἄρα καὶ στὶς δύο περιπτώσεις *πρέπει νὰ πάρω καὶ τὰ δύο κιβώτια.*

Τὰ ἐπιχειρήματα αὐτὰ μποροῦν νὰ ἀποτελέσουν ἀντικείμενο μελέτης τῆς ΘΠ. Τὸ Ἐπιχείρημα 1 ἀνήκει στὴν Ἀρχὴ τῆς Ἀναμενόμενης Τιμῆς, τὸ δὲ Ἐπιχείρημα 2 ἀνήκει στὴν Ἀρχὴ τῆς Δεσπόζουσας Στρατηγικῆς, διότι ἡ στρατηγικὴ «παίρνω καὶ τὰ δύο κιβώτια» δεσπόζει τῆς στρατηγικῆς «παίρνω μόνο τὸ Κιβώτιο #2».

Ὅμως δὲν θὰ προχωρήσουμε στὸ πῶς μελετᾶ τὸ θέμα ἡ ΘΠ. Θὰ προσθέσω μόνο μερικὰ ἀκόμα σχετικὰ μὲ τὸ θέμα σχόλια.

Ἐδῶ οἱ καταστάσεις ποὺ ἀντιμετωπίζουμε εἶναι πολὺ διαφορετικὲς ἀπὸ τὶς συνήθεις, ἡ δὲ διαφορὰ συνίσταται στὸ ὅτι ὁ παίκτης, ΕΣΕΙΣ, πιστεύετε ὅτι ὑπάρχει κάποια σχέση μεταξὺ τῆς δικῆς σας ἐπιλογῆς καὶ τῆς πρόβλεψης ποὺ κάνει τὸ ἀνώτερο ΟΝ καὶ ἀκριβῶς ἡ σχέση αὐτὴ εἶναι ἐκείνη ποὺ προκαλεῖ τὴν ὑπάρχουσα ἀντίθεση. Ὁ φιλόσοφος Nozick (1969) σχολίασε τὸ θέμα ὡς ἑξῆς, λέγοντας:

«Ἔθεσα τὸ πρόβλημα σὲ ἕνα πάρα πολὺ μεγάλο ἀριθμὸ ἀτόμων, τὰ ὁποῖα ἦταν φίλοι ἢ φοιτητές. Ὁ καθένας εἶχε μιὰ σαφῆ ἄποψη γιὰ τὸ θέμα, γιὰ τὸ τί δηλαδὴ ἔπρεπε νὰ γίνει. Ἡ δυσκολία ποὺ προέκυψε ἦταν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ἐρωτηθέντων φάνηκε νὰ χωρίζεται σὲ δύο σχεδὸν ἴσα μέρη μὲ ἀντίθετες ἀπόψεις, ὅπου πολλοὶ πίστευαν ὅτι ἡ ἄποψη τοῦ ἀντιθέτου ἡμίσεως ἦταν παράλογη ἢ ἀκόμα καὶ γελοία.

Ὁ Nozick δὲν ἦταν ὁ μόνος ὁ ὁποῖος διεπίστωσε παρόμοιες διαφορὲς ἀπόψεων μεταξὺ τῶν ἐρωτηθέντων.

Ἂς σημειωθεῖ ὅτι ὑπάρχει κάποια σχέση μεταξὺ τῆς πίστης ποὺ ἔχει ὁ ἄνθρωπος (τὸ συγκεκριμένο ἄτομο) στὴν ὕπαρξη τῆς Ἐλευθερίας τῆς Βουλήσεως ἀφ' ἑνὸς καὶ τῶν διαφόρων ἐπιλογῶν στὸ πρόβλημα τοῦ Newcomb ἀφ' ἑτέρου.

Ὅσο ἰσχυρότερη εἶναι ἡ πίστη τοῦ ἀνθρώπου στὴν ὕπαρξη τῆς Ἐλευθερίας τῆς Βουλήσεως, τόσο περισσότερο θὰ ἀντισταθεῖ στὴν ἰδέα ὅτι τὸ ΟΝ μπορεῖ νὰ προβλέψει τὴν ἐπιλογή του καὶ ὡς ἐκ τούτου θὰ ἔχει τὴν ἐπιθυμία νὰ πάρει καὶ τὰ δύο κιβώτια. Ὁ Nozick ὅπως καὶ ἄλλοι φιλόσοφοι ἐτόνισαν ὅτι ἡ σχέση μεταξὺ ντετερμινισμοῦ καὶ προβλεψιμότητας τῶν πράξεων τοῦ ἀνθρώπου εἶναι πολὺ λεπτὴ καὶ εὐπαθής, διότι καμμιὰ ἀπὸ τὶς δύο δὲν συνεπάγεται τὴν ἄλλη. Θὰ προσθέσουμε ὅμως ὅτι μολονότι μὲ τὰ μέσα ποὺ διαθέτει ἡ ΘΠ μέχρι σήμερα, τὸ πρόβλημα τῆς Ἐλευθερίας τῆς Βουλήσεως τοῦ Ἀνθρώπου δὲν ἀπαντήθηκε, νομίζεται ὅτι οἱ μέθοδοι τῆς ΘΠ μποροῦν νὰ ἀνοίξουν μία νέα καὶ πρωτότυπη ὁδὸ μελέτης τοῦ τόσο παλαιοῦ καὶ σπουδαίου φιλοσοφικοῦ αὐτοῦ προβλήματος.

Θὰ τελειώσω τὴν ὁμιλία αὐτὴ μὲ μερικὲς σκέψεις καὶ ἀπόψεις ποὺ ἀφοροῦν στὴ σπουδαιότητα, τὴν ἀξία τῆς Θεωρίας Παιγνίων.

Στὴν ἐρώτηση «γιατί σᾶς ἀρέσουν τὰ μαθηματικά; Οἱ περισσότεροι ἀπαντοῦν «διότι τὰ μαθηματικὰ δίνουν ἀκριβεῖς καὶ σαφεῖς ἀπαντήσεις». Προσφέρουν ἄνεση καὶ σιγουριὰ σὲ ἀντίθεση μὲ ἄλλες ἐπιστῆμες, ὅπως οἱ ποιοτικὲς κοινωνικὲς ἐπιστῆμες, οἱ ἀνθρωπιστικὲς ἐπιστῆμες, οἱ ἱστορικὲς ἐπιστῆμες ὅπου οἱ ἀπαντήσεις εἶναι ἀσαφεῖς καὶ ἀμφίρροπες.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω θὰ συνεπέρανε κανεὶς ὅτι ἡ ΘΠ ὡς μαθηματικὴ θεωρία ἐφαρμοζόμενη στὶς ἀνθρώπινες σχέσεις προσφέρει πάντα ἀκριβεῖς ἀπαντήσεις. Αὐτὸ βέβαια συμβαίνει ὄχι ὅμως σὲ ὅλες τὶς περιπτώσεις. Τὸ πρῶτο μεῖζον ἀποτέλεσμα ποὺ ἀναφέραμε, αὐτὸ ποὺ ἀφορᾶ στὴν συμπεριφορὰ δύο παικτῶν σὲ μιὰ κατάσταση πλήρους ἀντιθέσεως ἀποτελεῖ ἀκριβῆ ἀπάντηση, τὴν ὁποία δίδει τὸ Minimax θεώρημα τοῦ John von Neumann. Ἡ ἀπάντηση εἶναι ὅτι οἱ παῖκτες πρέπει νὰ ἐπιλέξουν τὶς βέλτιστες καθαρὲς ἢ μεικτὲς στρατηγικὲς ἐπιτυγχάνοντας ἔτσι τὴν «τιμὴ τοῦ παιγνίου».

Ὑπάρχουν ὅμως ἄλλες περιπτώσεις ὅπως ἐκεῖνες ὅπου οἱ ἀντιθέσεις δὲν εἶναι πλήρεις (παρουσιάζονται δηλαδὴ συγχρόνως καὶ εὐκαιρίες συνεργασίας μεταξὺ τῶν παικτῶν) ἢ οἱ παῖκτες εἶναι περισσότεροι τῶν δύο καθὼς καὶ πολλὲς ἄλλες. Στὶς περιπτώσεις αὐτὲς οἱ ἀπαντήσεις τῆς ΘΠ δὲν εἶναι ἀκριβεῖς. Δὲν παρέχει δηλαδὴ αὐτὴ μιὰ καὶ μόνη μέθοδο πρὸς ἀνάλυση ἢ δράση. Αὐτὸ ὅμως δὲν θὰ ἔπρεπε νὰ θεωρεῖται ὅτι ἀποτελεῖ μειονέκτημα τῆς ΘΠ. Ἀντιθέτως ἡ θεωρία αὐτὴ ἀποδείχθηκε ὅτι ἀποτελεῖ χρήσιμο καὶ ἰσχυρὸ ἐργαλεῖο γιὰ νὰ ἀντιληφθοῦμε καλύτερα τὶς ἀνθρώπινες ὑποθέσεις.

Ἐξ ἄλλου ἡ ἄποψη ὅτι τὰ μαθηματικὰ μᾶς ἀρέσουν διότι δίνουν πάντα πλήρεις ἀπαντήσεις δὲν εἶναι ἀκριβής. Ἡ εὐχαρίστηση ποὺ παρέχουν τὰ μαθηματικὰ ὀφείλεται περισσότερο στὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖον αὐτὰ λειτουργοῦν, παρὰ στὸ ἀποτέλεσμα ποὺ προσφέρουν. Ἡ λύση ἑνὸς προβλήματος ἢ ἡ ἀπόδειξη ἑνὸς θεωρήματος προσφέρει πράγματι μιὰ ἐξαιρετικὴ ἱκανοποίηση, ὅμως ἡ μεγαλύτερη ἀνταμοιβὴ τοῦ ἐρευνητῆ εὑρίσκεται στὸ παιχνίδισμα τῶν διαφόρων ἰδεῶν, στοὺς νέους τρόπους ἀντιμετωπίσεως τοῦ θέματος, στὶς ἀπρόσμενες ἀποκαλύψεις ποὺ ἡ διαίσθηση μᾶς ἐπιφυλάσσει καὶ μᾶς ὁδηγεῖ στὴν ἀπάντηση ἢ στὴν ἐπιθυμητὴ ἀπόδειξη. Οἱ καταστάσεις αὐτὲς δὲν λείπουν ἀπὸ τὴν ΘΠ.

Στὴν μελέτη τῶν ἀνθρωπίνων ὑποθέσεων ὁ μεγαλύτερος ἐχθρὸς αὐτῆς εἶναι ὁ «δογματισμὸς» ἤτοι ἡ βεβαιότητα ὅτι ἀνακαλύψαμε τήν «ἁπλὴ καὶ σωστὴ ἀπάντηση» σὲ ἕνα θέμα τὸ ὁποῖο δὲν ἐπιδέχεται σωστὴ καὶ ἁπλὴ ἀπάντηση.

Ἡ μαθηματικὴ ἀνάλυση ἑνὸς θέματος τὴν ὁποίαν παρέχει ἡ ΘΠ εἶναι ὁ ἐχθρὸς τοῦ δογματισμοῦ.

Ἐλπίζεται ὅτι ἡ ὀρθότητα τῶν ἀπόψεων αὐτῶν θὰ ἀποδειχθεῖ μὲ τὴν ταχεία ἐξέλιξη τῆς θεωρίας αὐτῆς στὸ μέλλον.

Σημείωση. Τὸ κείμενο τῆς ὁμιλίας διαμορφώθηκε βάσει τοῦ συγγράμματος τοῦ P.D. Straffin: "Game Theory" AMS (2002), USA.