ΔΗΜΟΣΙΑ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 15ΗΣ ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2003

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ ΛΟΓΙΚΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΚΑΙ Η ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*

ΟΜΙΛΙΑ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ κ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΑΡΤΕΜΙΑΔΗ

Μερικοὶ μεγάλοι στοχαστὲς τοῦ 20οῦ αἰ. ἀπέδειξαν ὅτι ἀκόμα καὶ στὸν τόσο αὐστηρὸ κόσμο τῶν Μαθηματικῶν ἐνδημοῦν οἱ ἔννοιες τῆς «μὴ πληρότητας» καὶ τοῦ «τυχαίου». Τὴν σημασία τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν θὰ διασαφηνίσουμε ἀργότερα.

Ὅλοι γνωρίζουμε ὅτι ὁ Ὑπολογιστὴς εἶναι κάτι τὸ πολὺ πρακτικό, κάτι ποὺ εἶναι πιὰ ἀπαραίτητο γιὰ τὴν ὁμαλὴ λειτουργία τῆς σύγχρονης κοινωνίας. Ὅμως ὑπερβάλλοντας κάπως τὰ πράγματα, ἐπιτρέψτε μου νὰ πῶ, ὅτι αὐτὸ ποὺ καὶ οἱ ἴδιοι οἱ εἰδικοί, περὶ τὴν ἐπιστήμη τῶν ὑπολογιστῶν, δὲν θυμοῦνται εἶναι ὅτι: Ὁ Ὑπολογιστὴς ἐφευρέθηκε γιὰ νὰ βοηθήσει νὰ ἀπαντηθεῖ ἕνα φιλοσοφικὸ ἐρώτημα, τὸ ὁποῖο ἀφοροῦσε τὴν θεμελίωση τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

Πρόκειται γιὰ μιὰ συναρπαστικὴ ἱστορία, ἡ ὁποία ξεκινάει ἀπὸ τὸν David Hilbert, ἕνα διάσημο Γερμανὸ μαθηματικό, ὁ ὁποῖος κατὰ τὶς ἀρχὲς τοῦ 20οῦ αἰώνα εἶχε προτείνει τὴν ἐξεύρεση ἑνὸς τρόπου γιὰ τὴν πλήρη «τυποποίηση» τοῦ "*μαθηματικῶς συλλογίζεσθαι*". Γιὰ νὰ γίνουμε σαφέστεροι, ὁ Hilbert πρότεινε τὴν εὕρεση ἑνὸς μηχανισμοῦ σκέψης, ὁ ὁποῖος ἐφαρμοζόμενος ἑκάστοτε σὲ κάθε μαθηματικὴ πρόταση, σὲ κάθε πρόβλημα, νὰ μᾶς πληροφορεῖ, ἂν ἡ πρόταση αὐτὴ εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδής. Π.χ. στὸ ἐρώτημα ἂν σὲ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο,

*Ἡ ὁμιλία περιλαμβάνεται στὴν: http://www. nartemiadis.gr. (Ὅπως καὶ ἡ ὁμιλία «Ἡ θεωρία τῶν Ὑπερχορδῶν» περιλαμβάνεται καὶ αὐτὴ στὴν ἴδια ἱστοσελίδα).

τὸ τετράγωνο τῆς ὑποτείνουσας εἶναι πάντα ἴσο πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, νὰ ἀπαντᾶ ΝΑΙ ἢ ΟΧΙ. Στὴν περίπτωση αὐτὴ βέβαια θὰ ἀπαντοῦσε ΝΑΙ, διότι πρόκειται περὶ τοῦ περίφημου πυθαγορείου θεωρήματος.

Ὅπως θὰ δοῦμε, ἡ ἰδέα αὐτὴ τοῦ Hilbert, ἡ ὁποία συγκίνησε πολλοὺς καὶ συγκέντρωσε πολλὲς προσπάθειες ὑπὲρ τῆς πραγματοποίησής της, ἀποδείχθηκε ὅτι ἦταν ἀνέφικτη, ὅτι δηλ. ἡ τυποποίηση τῆς μαθηματικῆς σκέψης δὲν εἶναι δυνατή. Ἂν καὶ ἡ ἰδέα αὐτὴ κατὰ μία ἔννοια ἀπέτυχε, κατὰ κάποια ἄλλη ἔννοια μπορεῖ αὐτὴ νὰ θεωρηθεῖ ὡς μία τεράστια ἐπιτυχία, διότι ἡ προσπάθεια γιὰ τὴν «τυποποίηση» ἀπετέλεσε ἕνα ἀπὸ τὰ πλέον συναρπαστικὰ γεγονότα τοῦ 20οῦ αἰ., ὄχι ὅμως γιὰ τὰ Μαθηματικά, ἀλλὰ γιὰ τὸν προγραμματισμὸ καὶ τὴν τέχνη τοῦ *«ὑπολογίζειν»*. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ ἀποτελεῖ ἕνα μικρὸ ξεχασμένο κομμάτι τῆς πνευματικῆς ἱστορίας τοῦ ἀνθρώπου.

Θὰ προσπαθήσω νὰ συνδέσω τὴν μικρὴ αὐτὴ ξεχασμένη ἱστορία, ὅσο τὸ δυνατὸν πιὸ ἁπλά, μὲ τὸ θέμα μας παρακάμπτοντας ἕνα πολύπλοκο μαθηματικὸ ὑλικό, μὲ τὸ ὁποῖο φυσικὰ δὲν εἶναι ἐξοικειωμένο τὸ εὐρὺ κοινό. Ἡ προσπάθειά μου αὐτὴ θὰ ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νὰ μὲ ἐμποδίσει νὰ ἀναπτύξω σὲ πλῆρες βάθος τὸ ἔργο τῶν κυριοτέρων συντελεστῶν, οἱ ὁποῖοι συνέβαλαν στὴν ὡς ἄνω ἐπιτυχία, καὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι οἱ Bertrand Russel, Kurt Gödel καὶ Alan Turing. Ὅμως παρὰ ταῦτα νομίζω ὅτι ἕνας ὑπομονετικὸς ἀκροατὴς (συμβουλευόμενος καὶ τὸ κείμενο τῆς παρούσας ὁμιλίας, ποὺ θὰ περιληφθεῖ στὰ Πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν), θὰ μπορέσει νὰ ἀντιληφθεῖ τὴν οὐσία τῶν πραγμάτων.

Ἀναφερόμενος στὴν σωστὴ ἐκλαΐκευση θεμάτων, ποὺ ἐμπίπτουν στὴν ἐν γένει περιοχὴ τῆς ἐπιστήμης τῶν μαθηματικῶν, ὁμολογῶ ὅτι συχνὰ ἔχω τὴν αἴσθηση ὅτι ἕνα βαθὺ πολιτισμικὸ χάσμα διαχωρίζει ἕνα μαθηματικὸ ἀπὸ ἄτομα ποὺ ἀνήκουν στὸ εὐρύτερο κοινὸ καὶ τὰ ὁποῖα (ἄτομα) εἶναι πολὺ καλλιεργημένα ἀπὸ κάθε ἄλλη ἄποψη. Ἡ διαφορὰ αὐτὴ δὲν ἔγκειται στὴν ὕπαρξη περισσοτέρων ἢ ὀλιγοτέρων γνώσεων ἢ στὴν ὕπαρξη διαφορετικῆς τεχνικῆς ὑποδομῆς, ὅσο στὴν ὕπαρξη διαφορετικῶν προτύπων (patterns) σκέψης καὶ ἀνάλυσης.

Τὰ τελευταῖα 200 χρόνια πολλοὶ συγγραφεῖς μαθηματικῶν κειμένων προσπάθησαν νὰ πληρώσουν τὸ χάσμα αὐτό.

Τὰ Λογικὰ Παράδοξα τοῦ Russel

Ἀρχίζω ἀπὸ τὸν Bertrand Russel, ἕναν μαθηματικό, ὁ ὁποῖος ἀργότερα ἐστράφη πρὸς τὴν φιλοσοφία καὶ τελικὰ κατέληξε ἕνας «ἀνθρωπιστής». Ὁ Russel εἶναι τὸ πρόσωπο κλειδὶ στὴν ὑπόθεση αὐτή, διότι ἀνακάλυψε μερικὰ «ἐνοχλητικὰ» παράδοξα στὸν ἴδιο τὸν κλάδο τῆς «Λογικῆς». Μὲ ἄλλα λόγια ἀνακάλυψε περιπτώσεις, ὅπου οἱ γενόμενοι συλλογισμοί, ἂν καὶ φαίνονταν νὰ εἶναι ἀσφαλεῖς καὶ σωστοί, παρὰ ταῦτα, ὁδηγοῦσαν σὲ ἀντιφάσεις. Οἱ ἀπόψεις τοῦ Russel εἶχαν μεγάλη ἐπίδραση στὸ νὰ δημιουργηθεῖ σὲ πολλοὺς ἡ πεποίθηση ὅτι οἱ ἀντιφάσεις αὐτὲς ἀποτελοῦν σοβαρὴ κρίση στὸν κλάδο τῆς Λογικῆς καὶ ὅτι ἔπρεπε μὲ κάποιο τρόπο νὰ ἀντιμετωπισθοῦν ἀποτελεσματικά.

Ἂν καὶ τὰ παράδοξα ποὺ ἀνακάλυψε ὁ Russel προσελκύσανε σὲ μεγάλο βαθμὸ τὴν προσοχὴ τῆς μαθηματικῆς κοινότητας, ὅμως, ὅλως περιέργως, σὲ ἕνα μόνο ἀπὸ τὰ παράδοξα αὐτὰ δόθηκε τὸ ὄνομα τοῦ Russel. Γιὰ νὰ ἀντιληφθοῦμε αὐτὸ ποὺ ὀνομάζομε «τὸ παράδοξο τοῦ Russel», θὰ θεωρήσουμε τὸ σύνολο ὅλων ἐκείνων τῶν συνόλων, κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι στοιχεῖο τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ στὴ συνέχεια θὰ θέσουμε τὸ ἐρώτημα, ἂν τὸ σύνολο αὐτό, εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ ἑαυτοῦ του. Ἂν εἶναι στοιχεῖο τοῦ ἑαυτοῦ του, τότε δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι στοιχεῖο τοῦ ἑαυτοῦ του, καὶ ἀντιστρόφως! Ὅπως διατυπώθηκε τὸ ὡς ἄνω παράδοξο, στὴ γλώσσα τῆς θεωρίας τῶν συνόλων, εἶναι μᾶλλον δυσνόητο γιὰ τὸν ἀκροατὴ ποὺ δὲν εἶναι ἐξοικειωμένος μὲ τὰ θέματα αὐτά. Ὅμως, τὸ ἴδιο παράδοξο διατυπωμένο ὑπὸ ἄλλη μορφὴ εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ παράδοξο τοῦ Russel καὶ ἀσφαλῶς πολὺ πιὸ κατανοητὸ ἀπὸ τὸ εὐρὺ κοινό. Πράγματι, ἡ φράση «τὸ σύνολο ὅλων τῶν συνόλων», ποὺ ἀναφέρθηκε στὸ παράδοξο τοῦ Russel μπορεῖ νὰ παρομοιασθεῖ (ἂς μὴν ἐξετάσομε πῶς) μὲ τὸν κουρέα ἑνὸς μικροῦ ἀπομακρυσμένου χωριοῦ ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: *Ὁ κουρέας ξυρίζει ὅλους τοὺς ἄνδρες τοῦ χωριοῦ, οἱ ὁποῖοι δὲν ξυρίζονται μόνοι τους καὶ μόνο αὐτούς.* Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς τοῦ κουρέα τοῦ χωριοῦ φαίνεται ἐκ πρώτης ὄψεως φυσιολογικός, ὅτι δὲν ἔχει τίποτε τὸ παράλογο. Ἂν ὅμως θέσουμε τὸ ἐρώτημα : «Ὁ κουρέας αὐτὸς ξυρίζεται μόνος του;» καταλήγουμε εὔκολα στὸ συμπέρασμα ὅτι «ὁ κουρέας ξυρίζεται μόνος του τότε καὶ μόνο τότε ὅταν δὲν ξυρίζεται μόνος του». Βέβαια μπορεῖ κάποιος νὰ παρατηρήσει: «Τί μᾶς ἐνδιαφέρει αὐτὸ ποὺ συμβαίνει στὸν ἐν λόγῳ κουρέα; Τὸ ὅλο θέμα φαίνεται νὰ εἶναι ἕνα λογοπαίγνιο». Ὅταν ὅμως ἔχουμε νὰ κάνουμε μὲ τὴν μαθηματικὴ ἔννοια τοῦ συνόλου, τότε δὲν μποροῦμε νὰ ἀντιπαρέλθομε τὸ προκῦπτον «λογικὸ» πρόβλημα. Τὸ παράδοξο τοῦ Russel εἶναι ἡ ἠχώ, ποὺ φτάνει στὴν περιοχὴ τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων, ἑνὸς πολὺ παλαιότερου παράδοξου γνωστοῦ στοὺς Ἀρχαίους Ἕλληνες μὲ τὴν ὀνομασία τὸ «παράδοξο τοῦ Ἐπιμενίδη». Τὸ παράδοξο αὐτὸ ἔχει ὡς ἑξῆς: Ὁ Ἐπιμενίδης συνήθιζε νὰ λέγει: «Ἡ παροῦσα πρόταση εἶναι ψευδὴς» καὶ ἔθετε τὸ ἐρώτημα «εἶναι ἡ πρόταση τοῦ Ἐπιμενίδη ψευδής; Ἂν ἡ πρόταση τοῦ Ἐπιμενίδη εἶναι ψευδὴς, αὐτὸ σημαίνει ὅτι εἶναι ἀληθής. Ὅμως ἂν εἶναι ἀληθής, τότε πρέπει νὰ εἶναι ψευδής. Μὲ ἄλλα λόγια, ὅ,τι καὶ ἂν ποῦμε ὡς πρὸς τὴν ἀλήθεια τῆς πρότασης τοῦ Ἐπιμενίδη, ὁδηγούμαστε σὲ ἀδιέξοδο.

Μία ἄλλη διατύπωση τοῦ παράδοξου τοῦ Ἐπιμενίδη, ἀποτελούμενη ἀπὸ δύο προτάσεις εἶναι ἡ ἑξῆς:

«Ἡ πρόταση ποὺ ἀκολουθεῖ εἶναι ἀληθής. Ἡ προηγουμένη πρόταση εἶναι ψευδής».

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὶς δύο αὐτὲς προτάσεις ἔχει ἔννοια, συνδυαζόμενες ὅμως αὐτὲς καὶ λαμβανόμενες μαζὶ μᾶς δίδουν μία πρόταση ἡ ὁποία δὲν ἔχει ἔννοια. Μποροῦμε βέβαια, ὅπως εἶπα προηγουμένως, νὰ ἀγνοήσομε κάτι τέτοιες προτάσεις καὶ νὰ τὶς θεωρήσομε ὅτι ἀποτελοῦν λογοπαίγνια στερούμενα σημασίας. Ὅμως μερικὲς ἀπὸ τὶς μεγαλύτερες πνευματικὲς προσωπικότητες τῆς Ὑφηλίου ἀντέδρασαν καὶ ἀσχολήθηκαν πολὺ σοβαρὰ μὲ τὰ θέματα αὐτά.

Μία ἀπὸ τὶς ἀντιδράσεις στὴν παρουσιασθεῖσα αὐτὴ κρίση στὸν χῶρο τῆς «Λογικῆς» ὑπῆρξε καὶ ἡ ἰδέα τοῦ Hilbert νὰ καταφύγει στὴν «τυποποίηση» ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω, στὸν λεγόμενο «φορμαλισμό».

Τὸ σκεπτικό, πίσω ἀπὸ τὴν ἰδέα αὐτή, ἦταν τὸ ἑξῆς: «Ἂν οἱ συλλογισμοὶ ποὺ κάνει κανείς, καὶ ποὺ νομίζει ὅτι εἶναι σωστοί, τὸν ὁδηγοῦν σὲ ἀδιέξοδο, τότε γιὰ νὰ βγεῖ ἀπὸ τὸ ἀδιέξοδο πρέπει νὰ χρησιμοποιήσει τὴν λεγομένη «συμβολικὴ λογική», μὲ τὴν ὁποία νὰ δημιουργήσει μία τεχνητὴ γλώσσα ὁρίζοντας μὲ μεγάλη προσοχή, φροντίδα καὶ ἀκρίβεια τοὺς κανόνες τῆς γλώσσας αὐτῆς, ἔτσι ὥστε νὰ μὴν προκύπτουν ἀντιφάσεις σὰν κι αὐτὲς ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω. Ἂς μὴν ξεχνᾶμε ὅτι ἡ γλώσσα ποὺ χρησιμοποιοῦμε στὴν καθημερινή μας ζωὴ εἶναι ἀσαφής. Συχνὰ δὲν ξέρουμε ποιὸ εἶναι τὸ ὑποκείμενο μιᾶς ἀντωνυμίας. Ἂς γίνομε ὅμως σαφέστεροι.

Ἡ ἰδέα τοῦ Hilbert

Ὁ Hilbert πρότεινε τὴν δημιουργία μιᾶς τέλειας τεχνητῆς γλώσσας, ἡ ὁποία θὰ χρησίμευε στὸ πῶς πρέπει νὰ συλλογιζόμαστε, πῶς νὰ ἐργαζόμαστε στὰ μαθηματικά, πῶς νὰ συνάγομε συμπεράσματα. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸ ἐξῆρε τὴν σπουδαιότητα τῆς ἀξιωματικῆς μεθόδου, κατὰ τὴν ὁποίαν ξεκινάει κανεὶς ἀπὸ ἕνα σύνολο βασικῶν ἀξιωμάτων καὶ ἀπὸ σαφῶς ὁριζόμενους κανόνες ἐξαγωγῆς συμπερασμάτων καὶ καταλήγει σὲ ἰσχύοντα θεωρήματα. Ἡ μέθοδος αὐτὴ ἐργασίας στὰ μαθηματικά μᾶς εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνες καὶ εἰδικότερα ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη καὶ τὴν γεωμετρία του, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἕνα ὡραῖο καὶ σαφὲς μαθηματικὸ σύστημα. Μὲ ἄλλα λόγια, ὁ Hilbert πρότεινε τὴν «κατασκευὴ» κανόνων, ὁρισμῶν, βασικῶν ἀρχῶν, γραμματικῆς καὶ γλώσσας, οἱ ὁποῖοι νὰ εἶναι ἀπόλυτα ἀκριβεῖς καὶ συγκεκριμένοι, ἔτσι ὥστε νὰ συμφωνοῦν ὅλοι στὸ πῶς πρέπει νὰ διεξάγεται καὶ νὰ προχωρεῖ ἡ ἐπιστήμη τῶν μαθηματικῶν. Στὴν πράξη, βέβαια, ἕνα τέτοιο ἀξιωματικὸ σύστημα θὰ ἦταν δύσχρηστο γιὰ τὴν ἀνάπτυξη τῶν μαθηματικῶν, ὅμως ἀπὸ φιλοσοφικῆς πλευρᾶς θὰ ἦταν αὐτὸ σημαντικό.

Ἡ πρόταση τοῦ Hilbert ἔγινε κατ' ἀρχὴν ἀποδεκτή. Στὸ κάτω-κάτω τῆς γραφῆς ὁ Hilbert ἀκολούθησε μὲ τὴν πρότασή του τὴν μαθηματικὴ παράδοση, τὴν ὁποίαν εἶχαν ἀκολουθήσει στὶς ἐργασίες τους ὁ Leibniz, ὁ Boole, ὁ Frege καὶ ὁ Peano. Ὅμως ὁ Hilbert ἤθελε κάτι περισσότερο, ἤθελε νὰ τυποποιήσει ΟΛΗ τὴν ἐπιστήμη τῶν Μαθηματικῶν. Γι' αὐτὸ ἀπετέλεσε μεγάλη ἔκπληξη τὸ γεγονὸς ὅτι κάτι τέτοιο ἦταν ἀδύνατο νὰ γίνει. Ἡ πρόταση τοῦ Hilbert ἀπεδείχθη μὲν μὴ πραγματοποιήσιμη, ὑπῆρξε ὅμως πολὺ ὠφέλιμη, πολὺ καρποφόρα. Κάνοντας τὴν πρόταση αὐτὴ ὁ Hilbert ἔγινε ἡ αἰτία νὰ δημιουργηθεῖ ἕνας τελείως νέος κλάδος τῶν μαθηματικῶν, ὁ ὁποῖος φέρει τὴν ὀνομασία «Μεταμαθηματικά», ἕνας κλάδος ἐνδοσκοπικός, ποὺ ἐλέγχει τὸν ἴδιο τὸν ἑαυτό του, καὶ ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀντικείμενο μελέτης, τὸ τί μπορεῖ νὰ κατορθωθεῖ μὲ τὰ Μαθηματικὰ καὶ τί δὲν μπορεῖ.

Ἡ βασικὴ ἀρχὴ τῶν «Μεταμαθηματικῶν» εἶναι ἡ ἀκόλουθη: Ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ ἐντάσσομε τὰ μαθηματικὰ σὲ μία τεχνητὴ γλῶσσα, ὅπως ἀπαιτεῖ ἡ πρόταση τοῦ Hilbert, ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ θεμελιώνομε ἕνα τυπικὸ ἀξιωματικὸ σύστημα, ἀπὸ τὴν στιγμὴ ἐκείνη, πρέπει νὰ ξεχάσομε ἂν τὸ σύστημα αὐτὸ ἔχει κάποιο φυσικὸ νόημα, καὶ νὰ τὸ θεωρήσομε ὡς ἕνα παιχνίδι, τὸ ὁποῖο παίζεται μὲ διάφορα σύμβολα σημειωμένα πάνω στὸ χαρτί, καὶ τὸ ὁποῖο μᾶς ἐπιτρέπει μὲ τὴν χρήση του νὰ συνάγομε θεωρήματα ξεκινώντας ἀπὸ ἀξιώματα. Βέβαια, ὁ λόγος γιὰ τὸν ὁποῖο ἀσχολεῖται κανεὶς μὲ τὰ μαθηματικὰ εἶναι διότι αὐτὰ ἔχουν κάποιο νόημα, κάποια σημασία. Ὅμως, ἂν θέλομε νὰ μπορέσομε νὰ μελετήσομε τὰ μαθηματικὰ χρησιμοποιώντας μαθηματικὲς μεθόδους, πρέπει νὰ ἀγνοήσομε τὸ ἂν αὐτὰ ἔχουν κάποιο φυσικὸ νόημα, καὶ νὰ ἐξετάσομε μόνο τὴν τεχνητὴ γλῶσσα ποὺ ἔχουμε στὴν διάθεσή μας καὶ ἡ ὁποία ἔχει ἀπόλυτα συγκεκριμένους καὶ σαφεῖς κανόνες. Ἐνώπιον, ὅμως, ἑνὸς τέτοιου συστήματος διερωτᾶται κανεὶς τί εἴδους ἐρωτήματα μποροῦμε νὰ θέσομε; Ἕνα ἀπὸ τὰ ἐρωτήματα αὐτὰ εἶναι λ.χ., ἂν μπορεῖ κανεὶς νὰ ἀποδείξει ὅτι 0=1. (Ἂς ἐλπίσομε πὼς ΟΧΙ). Καὶ ἀκόμα γενικότερα, ἂν Α εἶναι μία ὁποιαδήποτε πρόταση, μποροῦμε νὰ θέσομε τὸ ἐρώτημα ἂν ἡ Α ἢ ἡ ἀντίθετη τῆς Α μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ ἐντὸς τοῦ συστήματος.

Ἕνα ἀξιωματικὸ σύστημα θεωρεῖται «πλῆρες» ἂν σὲ αὐτὸ εἶναι δυνατὸν μία ὁποιαδήποτε πρόταση Α νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι ἀληθὴς ἢ ὅτι εἶναι ψευδής.

Ὁ Hilbert δηλαδὴ ἤλπιζε ὅτι δημιουργώντας κανόνες πολὺ ἀκριβεῖς, κάθε προσπάθεια ἀποδείξεως μιᾶς προτάσεως θὰ μποροῦσε νὰ τεθεῖ στὴν διαδικασία ἑνὸς μηχανισμοῦ σκέψεως ὁ ὁποῖος θὰ ἀπαντοῦσε ὡς ἑξῆς: Π.χ. «Ἡ ἀπόδειξη ποὺ ἐπιχειρεῖτε νὰ κάνετε ὑπακούει στοὺς κανόνες τοῦ συστήματος», ἢ θὰ ἀπαντοῦσε λέγοντας «Στὸν στίχο 4 τῆς ἀποδείξεως ὑπάρχει κάποιο λάθος» ἢ θὰ ἀπαντοῦσε «Αὐτὸ ποὺ στὸν στίχο 4 ἡ ἀπόδειξη ἰσχυρίζεται ὅτι προκύπτει ἀπ' τὸν στίχο 3, δὲν προκύπτει». Οἱ δὲ ἀπαντήσεις αὐτὲς τοῦ συστήματος θὰ ἦταν τελεσίδικες.

Ἂς σημειωθεῖ ὅτι ὁ Hilbert δὲν πρότεινε ὅτι τὰ μαθηματικὰ πρέπει νὰ μελετῶνται μὲ τὸν τρόπο ποὺ μόλις περιγράψαμε. Ὁ Hilbert πρότεινε ὅτι ἂν μελετήσομε τὰ μαθηματικὰ κατὰ τὸν προαναφερθέντα τρόπο, τότε θὰ μποροῦμε νὰ χρησιμοποιοῦμε τὰ μαθηματικά, γιὰ νὰ μελετήσομε τὴν ἰσχύ τους, τὴν δύναμη δηλαδὴ τῶν μαθηματικῶν. Πίστευε δὲ ὁ Hilbert ὅτι κάτι τέτοιο ἦταν κατορθωτό.

Ἔχοντας λοιπὸν ὑπόψη αὐτὰ ποὺ μόλις ἀναφέραμε, φαντάζεσθε πόσο συγκλονιστικὸ ἦταν τὸ γεγονὸς (1931) ὅταν ἕνας Αὐστριακὸς μαθηματικὸς ὀνόματι Kurt Gödel ἀπέδειξε ὅτι αὐτὸ ποὺ πρότεινε ὁ Hilbert ἦταν ἀδύνατο νὰ πραγματοποιηθεῖ.

Ἡ Μὴ - πληρότητα (Gödel)

Ὁ Gödel ἀνέτρεψε τὸ σχέδιο τοῦ Hilbert, ἀποδεικνύοντας ὅτι αὐτὸ ἦταν μὴ πραγματοποιήσιμο, τὸ 1931, ὅταν ὑπηρετοῦσε στὸ Πανεπιστήμιο τῆς Βιέννης. Ὁ Gödel καταγόταν ἀπὸ τὴν (ὅπως ὀνομάζεται σήμερα) Τσεχικὴ Δημοκρατία (πρώην αὐτοκρατορία τῆς Αὐστροουγγαρίας), ἀπὸ τὴν πόλη Brno.

Ἐπαναλαμβάνω καὶ πάλι ὅτι ἡ καταπληκτικὴ ἀνακάλυψη τοῦ Gödel ἦταν ὅτι ἡ ἰδέα τοῦ Hilbert ἦταν τελείως ἀνέφικτη: *Δὲν ὑπάρχει τρόπος νὰ κατασκευασθεῖ ἕνα τυποποιημένο ἀξιωματικὸ σύστημα γιὰ τὸ σύνολο τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, στὸ ὁποῖο σύστημα νὰ ἀποδεικνύεται σαφῶς, ὅτι μία ὁποιαδή-*

ποτε πρόταση εἶναι ἢ ὀρθὴ ἢ ἐσφαλμένη. Πιὸ συγκεκριμένα, αὐτὸ ποὺ ὁ Gödel ἀνακάλυψε ἦταν ὅτι, τὸ σχέδιο τοῦ Hilbert εἶναι μὴ πραγματοποιήσιμο, ἀκόμα καὶ ἂν περιορισθεῖ κανεὶς στὸ στοιχειῶδες ἀριθμητικὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν 0,1,2,3... μὲ τὶς γνωστὲς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ πολλαπλασιασμοῦ.

Ὁποιοδήποτε τυποποιημένο σύστημα, τὸ ὁποῖο ἐπιχειρεῖ νὰ περιλάβει ὅλες τὶς ἀληθεῖς προτάσεις καὶ μόνο αὐτὲς καὶ οἱ ὁποῖες (προτάσεις) ἀναφέρονται στὶς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν 0,1,2,3,..., εἶναι κατ' ἀνάγκην μὴ πλῆρες. Ἕνα τέτοιο σύστημα εἴτε εἶναι ἀσυνεπὲς (περιλαμβάνει δηλαδὴ προτάσεις ἀντιφάσκουσες μεταξύ τους) εἴτε εἶναι μὴ πλῆρες. Κατὰ συνέπεια, ἂν ὑποθέσομε ὅτι τὸ σύστημα αὐτὸ μᾶς λέει πάντα τὴν ἀλήθεια, τότε τὸ σύστημα δὲν λέγει ὅλη τὴν ἀλήθεια. Εἰδικότερα, ἂν ὑποθέσομε ὅτι τὰ ἀξιώματα καὶ οἱ κανόνες ἐξαγωγῆς συμπερασμάτων δὲν μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ ἀποδείξουμε ἐσφαλμένα θεωρήματα, τότε θὰ ὑπάρχουν ὀρθὰ (ἀληθῆ) θεωρήματα, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποδειχθοῦν μέσα στὸ σύστημα.

Ἡ ἀπόδειξη ποὺ δίδει ὁ Gödel γιὰ τὴν «μὴ πληρότητα» ἑνὸς συστήματος εἶναι πολὺ εὐφυής, πολὺ ἔξυπνη καὶ συγχρόνως πολὺ παράδοξη καὶ σχεδὸν «παράλογη».

Ὁ Gödel ξεκινάει μὲ τὸ παράδοξο τοῦ ψεύτη, δηλ. μὲ τὴν πρόταση: «ψεύδομαι», ἡ ὁποία δὲν εἶναι οὔτε ἀληθὴς οὔτε ψευδής. Οὐσιαστικά, αὐτὸ ποὺ κάμνει ὁ Gödel εἶναι ὅτι κατασκευάζει μία πρόταση ἡ ὁποία ἀναφέρεται στὸν ἑαυτό της καὶ λέγει: «Εἶμαι μὴ ἀποδείξιμη». Τώρα, ἂν καταφέρει κανεὶς νὰ κατασκευάσει μία τέτοια πρόταση στὴν στοιχειώδη θεωρία ἀριθμῶν, δηλαδὴ στὴν ἀριθμητική, ἡ ὁποία (πρόταση) νὰ περιγράφει ἑαυτήν, πρέπει βέβαια νὰ εἶναι πολὺ εὐφυής. Ἂν ὅμως καταφέρει νὰ κάνει κάτι τέτοιο, θὰ ἀντιληφθεῖ εὔκολα ὅτι ἔχει περιέλθει σὲ μία πολὺ δύσκολη κατάσταση. Γιατί; Διότι ἂν ἡ πρόταση αὐτὴ εἶναι ἀποδείξιμη, εἶναι κατ' ἀνάγκη λανθασμένη, ποὺ σημαίνει ὅτι ἀποδεικνύει κάποιες λανθασμένες προτάσεις. Ἂν ἡ πρόταση δὲν εἶναι ἀποδείξιμη, ὅπως αὐτὴ ἡ ἴδια μᾶς βεβαιώνει γιὰ τὸν ἑαυτό της ὅτι δὲν εἶναι, τότε εἶναι ἀληθής, ὁπότε τὸ μαθηματικὸ σύστημα εἶναι μὴ πλῆρες.

Ἡ ἀπόδειξη ποὺ ἔδωσε ὁ Gödel περιλαμβάνει πολλὲς πολύπλοκες τεχνικὲς λεπτομέρειες. Ἂν ὅμως ἐξετάσει κανεὶς τὴν πρωταρχική του ἐργασία ἐπὶ τοῦ θέματος, ἀναγνωρίζει σ' αὐτὴν κάτι παρόμοιο μὲ αὐτό, ποὺ σήμερα καλοῦμε ἕνα εἶδος προγραμματισμοῦ Η/Υ, ὁ ὁποῖος (προγραμματισμὸς) εἶναι γνωστὸς στὴν ἀγγλικὴ ὁρολογία ὡς LISP programming (LISP = List Processor). Ἀναφέρω τὴν λεπτομέρεια αὐτὴ γιὰ νὰ τονίσω ὅτι μολονότι τὸ 1931 δὲν ὑπῆρχαν ἀκόμα ὑπολογιστές, παρατηροῦμε ὅτι στὸν κορμὸ τῆς πρωταρχικῆς ἐργασίας τοῦ Gödel ὑπάρχει μία προγραμματικὴ γλῶσσα.

Ἕνας ἄλλος διάσημος μαθηματικὸς τῆς ἐποχῆς ἐκείνης (ὁ ὁποῖος ἐνεθάρρυνε τὴν δημιουργία καὶ τὴν ἀνάπτυξη τῆς τεχνολογίας τῶν ὑπολογιστῶν στὶς ΗΠΑ) καὶ ὁ ὁποῖος ἀμέσως ἀντιλήφθηκε καὶ ἐξετίμησε τὸ ἔργο τοῦ Gödel, ἦταν ὁ John Von Neumann. Ὁ Neumann ὅμως δὲν εἶχε ποτὲ ἀντιληφθεῖ ὅτι ἡ πρόταση τοῦ Hilbert ἦταν ἐπισφαλής. Ἔτσι ὁ Gödel ἀποδείχθηκε ὄχι μόνο ὅτι ἦταν φοβερὰ εὐφυής, ἀλλὰ ὅτι εἶχε καὶ τὸ θάρρος νὰ φαντασθεῖ ὅτι ὁ Hilbert ἔσφαλε.

Πολλοὶ ἦταν οἱ ἐπιστήμονες, οἱ ὁποῖοι θεώρησαν ὅτι τὸ συμπέρασμα στὸ ὁποῖο εἶχε καταλήξει ὁ Gödel ἦταν ἀπόλυτα καταστρεπτικὸ γιὰ τὶς ἐπικρατοῦσες γιὰ τὸ θέμα αὐτὸ ἀντιλήψεις. Ὁλόκληρη ἡ ἕως τότε ἐπικρατοῦσα φιλοσοφία τῶν μαθηματικῶν σωριάζονταν σὲ ἐρείπια μπροστά τους. Ὅμως τὸ 1931 στὴν Εὐρώπη ὑπῆρχαν καὶ πολλὰ ἄλλα πολὺ ἀνησυχητικὰ προβλήματα.

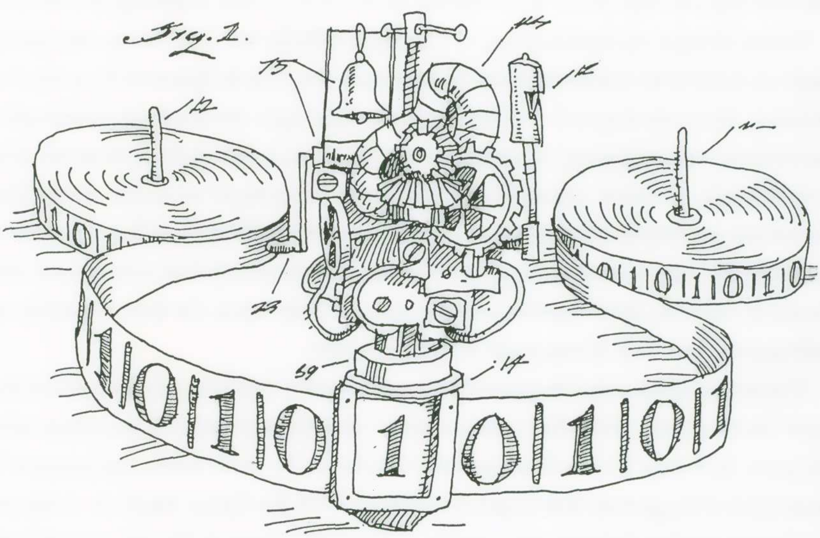
Ὑπῆρχε μία μεγάλη οἰκονομικὴ κρίση, οἱ δὲ κίνδυνοι ἑνὸς νέου παγκοσμίου πολέμου ἦταν πολὺ ὁρατοί.

Ἡ Μηχανὴ τοῦ Turing

Τὸ ἑπόμενο μεγάλο βῆμα πρὸς τὰ ἐμπρός, στὸ θέμα ποὺ μᾶς ἀπασχολεῖ, συντελέστηκε πέντε χρόνια ἀργότερα στὴν Ἀγγλία μὲ μία ἀνακάλυψη τοῦ Alan Turing. Ὑπενθυμίζεται καὶ πάλι ὅτι ὁ Hilbert εἶχε προτείνει τὴν δημιουργία μιᾶς «μηχανικῆς διαδικασίας», ἡ ὁποία (ἐρωτώμενη) θὰ μᾶς πληροφοροῦσε ἂν ἡ ἀπόδειξη ποὺ χρησιμοποιοῦμε γιὰ κάποια πρόταση ὑπακούει στοὺς νόμους τοῦ συστήματος ἢ ὄχι. Ὅμως ὁ Hilbert δὲν διασαφήνισε ποτὲ τί ἀκριβῶς ἐννοοῦσε λέγοντας «μηχανικὴ διαδικασία». Ὁ Turing διευκρίνισε ὅτι οὐσιαστικὰ πρόκειται γιὰ μία μηχανὴ ἑνὸς εἴδους ποὺ σήμερα ἀποκαλοῦμε Μηχανὴ τοῦ Turing.

Πιὸ συγκεκριμένα πρόκειται γιὰ ἕνα ὑποθετικὸ μηχανισμὸ σκέψης, τὸν ὁποῖον εἰσήγαγε ὁ Ἄγγλος μαθηματικὸς καὶ λογικὸς Alan M. Turing τὸ 1936, καὶ ὁ ὁποῖος, μηχανισμὸς, στὴν ἀρχὴ ἐθεωρεῖτο ὡς μία «μηχανή», ὡς ἕνα μαθηματικὸ ἐργαλεῖο, τὸ ὁποῖο ἦταν σὲ θέση νὰ ἀναγνωρίζει, ἀλάνθαστα, τὶς μὴ ἀποδείξιμες προτάσεις δηλ. τὶς μαθηματικὲς ἐκεῖνες προτάσεις ἐντὸς ἑνὸς δοθέντος τυπικοῦ ἀξιωματικοῦ συστήματος, οἱ ὁποῖες δὲν μποροῦσαν νὰ ἀποδειχθοῦν ἐντὸς τοῦ συστήματος ἂν εἶναι ἀληθεῖς ἢ ψευδεῖς. Ὑπενθυμίζεται ὅτι ὁ Kurt Gödel εἶχε ἀποδείξει ὅτι τέτοιες μὴ-ἀποδείξιμες προτάσεις ὑπάρχουν σὲ κάθε ἀξιωματικὸ σύστημα τὸ ὁποῖο περιλαμβάνει τοὺς ἀριθμοὺς 0,1,2,... καὶ εἶναι ἐφοδιασμένο μὲ τὶς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὁ Turing ἀπέδειξε ὅτι δὲν μπορεῖ ποτὲ νὰ ὑπάρξει μία γενικὴ ἀλγοριθμικὴ μέθοδος ἡ ὁποία νὰ μᾶς βεβαιώνει ἂν μία πρόταση εἶναι μὴ ἀποδείξιμη. Ἂς σημειωθεῖ ὅτι ἡ ἀρχικὴ ἐργασία τοῦ Turing, ὅπως καὶ ἐκείνη τοῦ Gödel, περιλαμβάνει μιὰ προγραμματισμένη γλώσσα πιὸ στοιχειώδη ἐκείνης τοῦ Gödel, ἡ ὁποία, ὅπως ἀναφέραμε, ὁμοιάζει μὲ τὴν γλώσσα προγραμματισμοῦ LISP.

Ὅπως ἀνέφερα προηγουμένως, ἡ Μηχανὴ τοῦ Turing δὲν εἶναι μία «μηχανὴ» κατὰ τὴν συνήθη ἔννοια τοῦ ὅρου, ἀλλά, ἕνα ἰδεατὸ πρότυπο (ἕνα ἰδεατὸ μοντέλο), τὸ ὁποῖο ἀνάγει τὴν λογικὴ δομὴ οἱουδήποτε ὑπολογιστικοῦ μηχανισμοῦ στὰ οὐσιώδη αὐτοῦ συστατικά. Ἡ παρακάτω εἰκόνα δίνει μία ὀπτικὴ εἰκόνα τῆς Μηχανῆς Turing:



Ἡ μηχανὴ ἐκτελεῖ πράξεις κάνοντας κάθε φορὰ ἕνα βῆμα ἐπὶ μιᾶς ταινίας ἄπειρου μήκους. Ἡ μηχανὴ μπορεῖ νὰ διαβάσει αὐτὸ ποὺ ἀναγράφεται στὴν ταινία σὲ κάθε βῆμα. Ἀνάλογα μὲ τὸ τί ὑπάρχει στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ μηχανισμοῦ, ἀνάλογα δηλαδὴ μὲ τὴν διαταγὴ ποὺ θὰ λάβει ἀπὸ αὐτόν, ἡ μηχανὴ μεταβάλλει ἢ ἀφήνει ἀμετάβλητο αὐτὸ ποὺ εἶναι γραμμένο στὴν ταινία μετὰ ἀπὸ κάθε βῆμα μετακινώντας τὴν ταινία κατὰ ἕνα βῆμα δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ ἢ ἀφήνοντάς την ἀκίνητη, ἡ δὲ διαδικασία αὐτὴ συνεχίζεται ἐπ' ἄπειρον.

Ὁ Turing ἀπέδειξε ὅτι ἕνας τέτοιος αὐτόματος μηχανισμὸς μπορεῖ, χρησιμοποιώντας τὴν ἁπλὴ αὐτὴ διαδικασία, νὰ διεξαγάγει ὁποιοδήποτε ὑπολογισμὸ τοῦ δοθεῖ, ἂν βέβαια ἡ μηχανὴ λάβει ἐξ ἀρχῆς τὶς ἀπαραίτητες ὁδηγίες. Τὸ ἐξαγόμενο ποὺ δίνει ἡ μηχανὴ ἀποτελεῖ τὴν λύση τοῦ μαθηματικοῦ προβλήματος ποὺ τῆς ζητήσαμε, ἡ δὲ λύση αὐτὴ μπορεῖ βέβαια νὰ ἀναγνωσθεῖ ὅταν ἡ Μηχανὴ σταματήσει τὴν λειτουργία της. Ἀποδείχθηκε ὅμως ὅτι στὴν περίπτωση ποὺ θὰ ζητηθεῖ ἀπὸ τὴν Μηχανὴ νὰ δώσει ἀπάντηση στὶς μὴ ἀποδείξιμες προτάσεις τοῦ Gödel, τότε ἡ μηχανὴ δὲν σταματάει ποτέ. Τὸ τελευταῖο αὐτὸ φαινόμενο εἶναι τὸ λεγόμενο στὴν ἀγγλικὴ «halting problem».

Ἡ «Μηχανὴ Turing» ἀποτελεῖ τὴν βάση ὅλων τῶν ψηφιακῶν Η/Υ (σύστημα εἰσαγωγῆς-ἐξαγωγῆς, μνήμη, κεντρικὴ μονάδα ἐπεξεργασίας). Ἂς ἐξηγήσομε τώρα λεπτομερέστερα αὐτὸ ποὺ ὀνομάζεται στὴν ἀγγλικὴ «*halting problem*».

Ὅπως εἴπαμε προηγουμένως, ὁ Turing ἀπέδειξε ὅτι ἡ ἐν λόγῳ «μηχανὴ» μπορεῖ νὰ ἐκτελέσει ὁποιονδήποτε ὑπολογισμό, ποὺ ἕνα ἀνθρώπινο ὂν μπορεῖ νὰ ἐκτελέσει. Στὴν συνέχεια ὁ Turing ἔθεσε τὸ ἐρώτημα «ποιὲς εἶναι συνολικὰ οἱ δυνατότητες τῆς μηχανῆς, τί μπορεῖ αὐτὴ νὰ κάνει;» καὶ ἀμέσως ἀνακαλύπτει ἕνα πρόβλημα, τὸ ὁποῖο καμία Μηχανὴ Turing δὲν μπορεῖ νὰ λύσει. Αὐτὸ εἶναι τὸ «*halting problem*». Πρόκειται γιὰ τὸ ἀκόλουθο πρόβλημα : *Εἶναι δυνατὸν νὰ γνωρίσομε ἐκ τῶν προτέρων ἂν μία «Turing Machine» (ἢ ἕνα πρόγραμμα ὑπολογισμοῦ) κάποτε, ἀφοῦ περάσει κάποιο χρονικὸ διάστημα, θὰ βρεῖ τὴν λύση τοῦ προβλήματος ποὺ τῆς θέσαμε καὶ θὰ σταματήσει;*

Ἐὰν ἐπιτρέψομε στὴν Μηχανὴ ἕνα συγκεκριμένο (πεπερασμένο) χρονικὸ διάστημα λειτουργίας, τότε εἶναι πολὺ εὔκολο νὰ ἀπαντήσομε στὸ ἐρώτημα αὐτό. Πράγματι ἂς ποῦμε ὅτι ἐπιθυμοῦμε νὰ γνωρίζομε, ἂν τὸ ἐν λόγῳ πρόγραμμα θὰ σταματήσει στὸ χρονικὸ διάστημα ἑνὸς ἔτους. Τότε δὲν ἔχομε παρὰ νὰ τὸ ἀφήσομε νὰ λειτουργήσει ἐπὶ ἕνα ἔτος, ὁπότε ἢ θὰ σταματήσει ἢ δὲν θὰ σταματήσει. Αὐτὸ ποὺ ὁ Turing ἀπέδειξε εἶναι ὅτι ἀντιμετωπίζει κανεὶς ἀνυπέρβλητες δυσκολίες ἂν δὲν ἐπιβάλει κάποιο χρονικὸ ὅριο λειτουργίας στὴ Μηχανή, ἂν δηλαδὴ προσπαθήσει νὰ συναγάγει τὸ συμπέρασμα, ἂν ἡ μηχανὴ θὰ σταματήσει ἢ ὄχι, προτοῦ ὅμως τὴν βάλει σὲ ἐνέργεια, προτοῦ πειραματισθεῖ.

Ἰδοὺ πῶς σκέφτηκε ὁ Turing:

(α) Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι μποροῦμε νὰ κατασκευάσομε ἕνα πρόγραμμα γιὰ τὸν ὑπολογιστή, τοῦ ὁποίου προγράμματος ὁ προορισμὸς εἶναι νὰ ἐλέγχει, ἂν ἕνα δοθὲν πρόγραμμα γιὰ τὸν ὑπολογιστὴ θὰ σταματήσει κάποτε ἢ ὄχι. Ἂς καλέσομε τὸ πρόγραμμα αὐτὸ «πρόγραμμα TT» (Termination Tester). Μὲ ἄλλα λόγια, θεωρητικά, εἰσάγεται ἕνα οἱοδήποτε πρόγραμμα στὸ πρόγραμμα TT, πρὸς ἔλεγχο, καὶ αὐτὸ σᾶς δίνει τὴν ἀπάντηση: «Ναί, τὸ πρόγραμμα ποὺ εἰσαγάγατε κάποτε θὰ σταματήσει» ἢ σᾶς ἀπαντᾶ: «Ὄχι, θὰ συνεχίσει νὰ λειτουργεῖ καὶ ποτὲ δὲ θὰ σταματήσει».

(β) Δημιουργῆστε τώρα ἕνα 2ο πρόγραμμα, τὸ ὁποῖο χρησιμοποιεῖ τὸ πρόγραμμα TT, γιὰ νὰ ἀξιολογήσει ἕνα ὁποιοδήποτε ἄλλο πρόγραμμα, ἔστω αὐτὸ A, ποὺ τοῦ δίδεται. Τὸ 2ο αὐτὸ πρόγραμμα λειτουργεῖ ὡς ἑξῆς: Ἂν ἡ λειτουργία τοῦ προγράμματος κάποτε σταματᾶ (κάτι ποὺ θὰ μᾶς τὸ πεῖ τὸ πρόγραμμα TT), τότε τὸ 2ο πρόγραμμα εἶναι ρυθμισμένο ἔτσι ὥστε αὐτὸ (δηλ. τὸ 2ο πρόγραμμα) νὰ μὴ σταματᾶ ποτέ. Καὶ ἔρχομαι τώρα στὸ κρίσιμο σημεῖο τῆς ὅλης διαδικασίας.

(γ) Θέστε (τροφοδοτῆστε) τὸ 2ο πρόγραμμα μὲ ἕνα ἀντίγραφο τοῦ ἑαυτοῦ του. Τί θὰ συμβεῖ; Τί θὰ μᾶς πεῖ αὐτὸ γιὰ τὸν ἑαυτό του; Ὑπενθυμίζεται ὅτι τὸ 2ο πρόγραμμα ἔχει κατασκευασθεῖ ἔτσι ὥστε αὐτὸ δὲν θὰ σταματήσει ποτέ, ἂν τὸ πρόγραμμα A, τὸ ὁποῖο εἶναι ὑπὸ ἔλεγχο, σταματᾶ κάποτε. Ἐδῶ ὅμως τὸ ἐλεγχόμενο πρόγραμμα A εἶναι τὸ ἴδιο τὸ 2ο πρόγραμμα. Ἑπομένως, ἂν αὐτὸ σταματᾶ, τότε δὲν σταματάει ποτέ, ὁπότε ἔχομε μία ἀντίφαση. Ἐπίσης, ἂν αὐτὸ δὲν σταματᾶ, τότε τὸ πρόγραμμα TT θὰ τὸ δείξει αὐτό, ὁπότε τὸ πρόγραμμα θὰ σταματήσει, ὁπότε πάλι ὑπάρχει ἀντίφαση. Τὸ παράδοξο αὐτὸ ὁδήγησε τὸν Turing στὸ συμπέρασμα ὅτι ἕνα πρόγραμμα TT γενικῆς ἰσχύος, ὅπως τὸ περιγράψαμε παραπάνω, δὲν μπορεῖ νὰ κατασκευασθεῖ.

(δ) Ἀπὸ τοὺς παραπάνω συλλογισμοὺς ὁ Turing συνήγαγε ἀμέσως καὶ τὸ ἀκόλουθο συμπέρασμα:

Ἐὰν δὲν ὑπάρχει τρόπος νὰ καθορίσομε ἐκ τῶν προτέρων, μὲ κάποιο ὑπολογισμό, ἐὰν ἕνα πρόγραμμα θὰ σταματήσει, τότε δὲν ὑπάρχει ἐπίσης κανένας τρόπος νὰ ἀποφασίσομε ἐκ τῶν προτέρων, κάνοντας συλλογισμοὺς μόνο (μὲ τὴν σκέψη δηλαδὴ) ὅτι τὸ πρόγραμμα θὰ σταματήσει. Κανένα τυπικὸ ἀξιωματικὸ σύστημα δὲν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ συμπεράνομε ἐὰν κάποτε ἕνα πρόγραμμα θὰ σταματήσει. Γιατί; Διότι, ἂν μπορούσαμε νὰ χρησιμοποιήσομε ἕνα τυπικὸ ἀξιωματικὸ σύστημα κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο, τὸ σύστημα αὐτὸ θὰ μᾶς παρεῖχε τὸ μέσο νὰ ὑπολογίσομε ἐκ τῶν προτέρων ἐὰν ἕνα πρόγραμμα θὰ σταματήσει ἢ ὄχι. Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι τότε καταλήγομε σὲ ἕνα παράδοξο ὅπως, «Ἡ πρόταση αὐτὴ εἶναι ψευδής». Μπορούμε δηλαδὴ νὰ δημιουργήσομε ἕνα πρόγραμμα τὸ ὁποῖο σταματάει τότε καὶ μόνο τότε ὅταν αὐτὸ δὲν σταματάει. Τὸ παράδοξο αὐτὸ μοιάζει μὲ ἐκεῖνο ποὺ ὁ Gödel ἀνακάλυψε στὴν ἔρευνά του τῆς θεωρίας τῶν ἀριθμῶν. (Θυμηθῆτε ὅτι ὁ Gödel μελετοῦσε ἕνα σύστημα ὄχι πιὸ πολύπλοκο ἀπὸ τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν 0,1,2,3,... ἐφοδιασμένο μὲ τὶς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Μὲ ἄλλα λόγια ὁ Turing ἀπέδειξε ὅτι κανένα τυπικὸ ἀξιωματικὸ σύστημα δὲν εἶναι πλῆρες.

Μετὰ τὴν λήξη τοῦ Β΄ Παγκοσμίου Πολέμου ὁ Turing ἄρχισε νὰ ἐργάζεται στὴν λεγόμενη «Κρυπτογραφία», στὴν κατασκευὴ δηλαδὴ καὶ τὴν ἐν γένει μελέτη κρυπτογραφικῶν κωδίκων (σχετικὴ μὲ τὴν κρυπτογραφία ὑπάρχει ὁμιλία μου ἀπὸ τοῦ βήματος αὐτοῦ στὰ πρακτικὰ τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν). Ὁ δὲ Von Neumann ἄρχισε νὰ ἐργάζεται σὲ θέματα ποὺ ἀφοροῦσαν τὴν ἀτομικὴ βόμβα καὶ ἔτσι τὸ θέμα τῆς μὴ-πληρότητας τῶν τυπικῶν ἀξιωματικῶν συστημάτων ξεχάσθηκε γιὰ ἕνα χρονικὸ διάστημα.

Καὶ ἔρχομαι τώρα στὴν ἔννοια τοῦ «τυχαίου» στὰ μαθηματικά, τὴν ὁποίαν ἀνέφερα στὴν ἀρχὴ τῆς ὁμιλίας μου καὶ στὸν συσχετισμὸ ποὺ θὰ προσπαθήσω νὰ κάνω τῆς ἐννοίας αὐτῆς μὲ τὴν ἔννοια τῆς «μὴ-πληρότητας» ἑνὸς συστήματος.

Ἡ περιοχὴ αὐτὴ τῶν μαθηματικῶν φαίνεται νὰ προσφέρεται γιὰ περαιτέρω ἔρευνα στοὺς μαθηματικοὺς οἱ ὁποῖοι ἀσχολοῦνται μὲ τὴν «θεμελίωση τῶν μαθηματικῶν», καθὼς καὶ σὲ ἐκείνους ποὺ ἀσχολοῦνται μὲ τὸ θεωρητικὸ μέρος τῆς ἐπιστήμης τῶν Ὑπολογιστῶν.

Θὰ ξεκινήσομε ἀπὸ μερικὰ θέματα τὰ ὁποῖα ὅμως δὲν ἀναφέρονται στὴν θεμελίωση τῶν μαθηματικῶν, ἀλλὰ στὴν θεμελίωση τῆς Φυσικῆς.

Ὅλοι ἔχομε ἀκούσει γιὰ τὴν Θεωρία τῆς Σχετικότητας γιὰ τὴν Κοσμολογία καὶ κάπως ἀργότερα γιὰ τὴν Κβαντικὴ Μηχανική. Ἔχουμε μάθει ὅτι τὰ πολὺ μικρὰ κομμάτια τῆς ὕλης, ὁ λεγόμενος «μικρόκοσμος», συμπεριφέρεται κατὰ τρόπο τελείως τρελό, ἀλόγιστο, τυχαῖο. Ἡ τυχαιότητα, τὸ χάος, ἡ μὴ-προβλεψιμότητα εἶναι ἰδιότητες σύμφυτες τοῦ μικρόκοσμου καὶ χαρακτηρίζουν τὰ φαινόμενα ποὺ παρατηροῦνται σ' αὐτόν. Εἶναι φυσικὸ νὰ διερωτηθεῖ κανεὶς ἂν ἡ ἔννοια τῆς τυχαιότητας ὑπάρχει ἐπίσης καὶ στὰ Καθαρὰ Μαθηματικὰ καὶ προχωρώντας ἀκόμα περισσότερο νὰ διερωτηθεῖ ἂν ἡ ἐνδεχόμενη ὕπαρξη τῆς τυχαιότητας στὰ Καθαρὰ Μαθηματικὰ εἶναι ἡ βαθύτερη αἰτία τοῦ φαινομένου τῆς μὴ-πληρότητας, πού, ὅπως εἴδαμε παραπάνω, ἀπέδειξε ὁ Gödel ὅτι ὑπάρχει σὲ κάθε τυπικὸ ἀξιωματικὸ σύστημα.

Πιὸ συγκεκριμένα, ἂς θεωρήσομε τὴν περιοχὴ τῶν Μαθηματικῶν, γνωστὴ μὲ τὴν ὀνομασία «Θεωρία Ἀριθμῶν», ὅπου ὑπάρχουν μερικὰ πολὺ δύσκολα προβλήματα. Ἂς θεωρήσουμε τοὺς «*πρώτους*» ἀριθμούς. Κάθε πρῶτος ἀριθμός, ἐξεταζόμενος χωριστὰ ὡς πρὸς τὴν δομή του, συμπεριφέρεται κατὰ τρόπο ἀπρόβλεπτο. Ὑπάρχουν βέβαια πληροφορίες γιὰ τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς στατιστικῆς φύσεως ὡς πρὸς τὸν τρόπο ποὺ κατανέμονται αὐτοὶ μέσα στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Μιὰ τέτοια πληροφορία παρέχει τὸ λεγόμενο «Θεώρημα τῶν πρώτων Ἀριθμῶν», τὸ ὁποῖο μᾶς λέγει πῶς γίνεται ἡ κατανομὴ τοῦ πλήθους τῶν πρώτων ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι μικρότεροι ἑνὸς ἀριθμοῦ x, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται, μᾶς λέγει δηλαδὴ ὅτι τὸ πλῆθος αὐτὸ ἀκολουθεῖ μία καθορισμένη κατεύθυνση. Ὅμως δὲν συμβαίνει κάτι παρόμοιο ἂν θεωρήσουμε μεμονωμένα τὸν κάθε πρῶτο ἀριθμὸ χωριστά. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, δοθέντος ἑνὸς πρώτου ἀριθμοῦ, ἡ ἀκριβὴς τιμὴ τοῦ ἑπόμενου πρώτου ἀριθμοῦ δὲν προκύπτει ἀπὸ καμιὰ γενικὴ θεωρία.

Στὸ σημεῖο αὐτὸ θὰ ἤθελα νὰ παρενθέσω τὴν ἀκόλουθη συγκλονιστικὴ ἱστορία, ἡ ὁποία παρουσιάζει ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον γιὰ τοὺς ἀσχολούμενους στὸν ἰατρικὸ καὶ βιολογικὸ κλάδο, καὶ ἐπιβεβαιώνει τὴν ἄποψη ὅτι ὄντως οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν, ἂν μή τι ἄλλο, ἀντικείμενο ὑψίστης περιεργείας.

Στὸ βιβλίο του «The Man Who Mistook His Wife for a Hat», ὁ νευρολόγος Oliver Sacks διηγεῖται μία παράξενη ἱστορία δύο διδύμων ἀδελφῶν, τοῦ John καὶ τοῦ Michael, τοὺς ὁποίους ἡ γενομένη ἰατρικὴ διάγνωση εἶχε χαρακτηρίσει, φαντασιόπληκτους, ψυχωτικοὺς καὶ ἄκρως διανοητικὰ καθυστερημένους. Ὅταν ὁ Sacks τοὺς συνάντησε γιὰ πρώτη φορὰ τὸ 1966, τὰ δίδυμα ἦταν περίπου 35 ἐτῶν καὶ εἶχαν διατελέσει τρόφιμοι διαφόρων ἱδρυμάτων ἀπὸ ἡλικίας 7 ἐτῶν. Μολονότι τὰ δίδυμα ἦταν ἀνίκανα νὰ κάνουν καὶ ἁπλές ἀκόμα ἀριθμητικὲς πράξεις, ἡ μνήμη τους ὅμως σχετικὰ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς ἦταν καταπληκτική, ἀφοῦ μποροῦσαν νὰ ἀπομνημονεύσουν καὶ νὰ ἐπαναλαμβάνουν ἕναν ἀκέραιο ἀριθμὸ μὲ 300 ψηφία.

Κάποια μέρα ὁ Sacks παρακολούθησε τὰ δίδυμα ποὺ καθισμένα σὲ μία γωνιὰ χαμογελοῦσαν, φαίνονταν πολὺ εὐτυχισμένα καὶ συζητοῦσαν στὴν γλώσσα τῶν ἀριθμῶν. Ὁ John ἀνέφερε ἕναν ἑξαψήφιο ἀριθμό, ὁ Michael κουνοῦσε τὸ κεφάλι, χαμογελοῦσε καὶ ἀπαντοῦσε μὲ κάποιο ἄλλο ἑξαψήφιο ἀριθμό. Τὰ δίδυμα φαίνονταν πολὺ εὐχαριστημένα μὲ τὸ παιχνίδι αὐτὸ τῆς ἀνταλλαγῆς ἀριθμῶν. Κατάπληκος ὁ Sacks προσπάθησε, ὅταν ἐπέστρεψε στὸ σπίτι του, νὰ ἐξακριβώσει τί ἦταν αὐτὸ ποὺ προξενοῦσε τέτοια εὐχαρίστηση στὰ δίδυμα. Ὠθούμενος ἀπὸ κάποια διαίσθηση, ἐξακρίβωσε τελικὰ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τοὺς ὁποίους ἀντήλλασσαν τὰ δίδυμα ἦταν πρῶτοι ἀριθμοί!!

Τὴν ἑπομένη μέρα, ὅταν ὁ Sacks ξανασυνάντησε τὰ δίδυμα, τὰ βρῆκε νὰ παίζουν τὸ ἴδιο παιχνίδι. Τὰ πλησίασε τότε καὶ πρότεινε ἕναν ὀκταψήφιο πρῶτο ἀριθμὸ τὸν ὁποῖο, ψάχνοντας ὅλη νύχτα, εἶχε ἀνακαλύψει σὲ ἕνα πίνακα πρώτων ἀριθμῶν ἑνὸς κάποιου βιβλίου. Τὰ δίδυμα, μὲ μία ἔκφραση στὸ πρόσωπό τους μεγάλης αὐτοσυγκέντρωσης, στράφηκαν πρὸς αὐτόν, ἄρχισαν ὕστερα ἀπὸ λίγα δευτερόλεπτα νὰ χαμογελοῦν, καὶ ἀμέσως μετὰ κάλεσαν τὸν Sacks νὰ παίξει μαζί τους τὸ ἴδιο παιχνίδι! Ὕστερα ἀπὸ 5 λεπτὰ ὁ John ἀνέφερε ἕναν ἐννεαψήφιο πρῶτο ἀριθμό! Συνεχίζοντας κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο, τὰ δίδυμα κατέληξαν νὰ δώσουν ἕναν εἰκοσαψήφιο πρῶτο ἀριθμό! Ἂς σημειωθεῖ ὅτι ὁ κατάλογος τοῦ Sacks περιεῖχε μέχρι καὶ δεκαψήφιους μόνο πρώτους ἀριθμούς. Ὅταν, γιὰ πρώτη φορά, διάβασα τὴν ἱστορία αὐτή, μὲ κατέλαβε ἕνα αἴσθημα δέους καὶ καταπλήξεως ὡς πρὸς τὸν τρόπο ποὺ λειτουργεῖ ὁ ἐγκέφαλος τοῦ ἀνθρώπου. Διότι γνωρίζομε ὅτι χρειάσθηκε νὰ περάσουν αἰῶνες ὁλόκληροι γιὰ νὰ μπορέσουν οἱ μαθηματικοὶ νὰ ἀνακαλύψουν ἕνα τρόπο νὰ ἐπιτύχουν αὐτὸ ποὺ ὁ John καὶ ὁ Michael ἐπέτυχαν αὐθόρμητα, νὰ μποροῦν δηλαδὴ νὰ ἐντοπίζουν καὶ νὰ ἀναγνωρίζουν πρώτους ἀριθμοὺς τόσο μεγάλους. Ὅταν μετὰ δέκα χρόνια ὁ Sacks ξανασυνάντησε τὰ δίδυμα, αὐτὰ δὲν ἔμεναν μαζί. Τὰ εἶχαν χωρίσει, καὶ ἐκτελοῦσαν ἐργασίες ὑπηρετικοῦ προσωπικοῦ. Ἀλίμονο! Τὸ τίμημα τῆς ἐπιστροφῆς των στὴν «ὁμαλότητα» ὑπῆρξε ἡ ἀπώλεια τῶν θαυμαστῶν ἐκείνων ἱκανοτήτων τους σχετικὰ μὲ τοὺς πρώτους ἀριθμούς.

Μὲ τὸ θέμα τῆς *Τυχαιότητας* στὰ Μαθηματικὰ ἀσχολεῖται διεξοδικὰ ὁ Gregory J. Chaitin στὰ ἄρθρα ποὺ ἀναφέρομε στὴν βιβλιογραφία. Ἐδῶ θὰ ἀναφέρομε μόνο πολὺ συνοπτικὰ μερικὲς σκέψεις του. Ὁ Chaitin προσπαθεῖ πρῶτα νὰ ὁρίσει τὴν ἔννοια τῆς τυχαιότητας (randomness), τὴν ἔννοια τοῦ τυχαίου στὰ μαθηματικά, ξεκινώντας ἀπὸ τὸ παράδειγμα ποὺ δώσαμε καὶ ποὺ ἀφορᾶ τοὺς πρώτους ἀριθμούς. Ἀναφέραμε ὅτι ὁ τρόπος κατὰ τὸν ὁποῖον ὁ ἕνας πρῶτος ἀριθμὸς διαδέχεται τὸν ἄλλο εἶναι τυχαῖος καὶ ἀπρόβλεπτος. Ἂς θυμηθοῦμε ἐπίσης ὅτι ὁ Turing θεωροῦσε τὸν Ὑπολογιστὴ ὡς μία μαθηματικὴ ἔννοια ἢ μᾶλλον ὡς ἕνα λογικὸ μηχανισμό, ὁ ὁποῖος δὲν κάνει ποτὲ λάθη καὶ ἔχει στὴν διάθεσή του ὅσο χρόνο καὶ χῶρο χρειάζεται γιὰ νὰ φέρει σὲ πέρας τὸ ἔργο ποὺ τοῦ ἔχει ἀνατεθεῖ. Ἔχοντας λοιπὸν ὑπόψη αὐτὰ ποὺ εἶχε πεῖ ὁ Turing, τὸ ἑπόμενο λογικὸ βῆμα γιὰ ἕνα μαθηματικὸ ἦταν νὰ μελετήσει τὸν ἀπαιτούμενο χρόνο γιὰ τὸν Ὑπολογιστὴ γιὰ νὰ ἐκτελέσει τὸ ἔργο ποὺ τοῦ ἀνετέθη. Π.χ. δοθέντος ἑνὸς πρώτου ἀριθμοῦ νὰ θελήσει νὰ βρεῖ ποιὸς εἶναι ὁ ἑπόμενος πρῶτος ἀριθμός. Πράγματι, πρὸς τὴν κατεύθυνση αὐτὴ (τὴ μελέτη δηλαδὴ τοῦ χρόνου) ἡ ἔρευνα ἔχει προχωρήσει σημαντικά.

Ἡ ἰδέα ὅμως τοῦ Chaitin ἦταν νὰ μελετήσει ὄχι τὸν ἀπαιτούμενο χρόνο, ἀλλὰ τὸ μέγεθος τοῦ προγράμματος ποὺ δίδεται στὸν Ὑπολογιστή, τὴν ποσότητα δηλαδὴ πληροφορίας ποὺ τοῦ παρέχεται γιὰ νὰ ἐκτελέσει τὸ ἔργο του. Ὁ Chaitin αἰτιολογεῖ τὴν ἄποψή του αὐτή, νὰ μελετήσει δηλαδὴ τὸ μῆκος τοῦ προγράμματος ποὺ δίδεται στὸν ὑπολογιστὴ (τὸ progam- size complexity, ὅπως τὸ ἀποκαλεῖ) καὶ ὄχι τὸν ἀπαιτούμενο χρόνο, διότι τὸ μῆκος τοῦ προγράμματος συνδέεται στενὰ μὲ τὴν ἔννοια τῆς ἐντροπίας στὴ φυσικὴ (L. Boltzmann). Ὡς γνωστόν, ἡ ἐντροπία μετρᾶ τὸ μέγεθος τῆς ἀταξίας ποὺ ὑπάρχει σὲ ἕνα φυσικὸ σύστημα, τὸ μέγεθος τοῦ χάους, τὴν τυχαιότητα ποὺ ὑπάρχει στὸ σύστημα. Π.χ. ἕνας κρύσταλλος ἔχει χαμηλὴ ἐντροπία, ἐνῶ ἕνα ἀέριο (σὲ θερμοκρασία δωματίου) ἔχει ὑψηλὴ ἐντροπία. Κατ' ἀναλογίαν λοιπόν, λέγει ὁ Chaitin, μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι τὸ μῆκος τοῦ προγράμματος ποὺ δίδεται στὸν Ὑπολογιστὴ γιὰ νὰ ἐκτελέσει ἕνα ἔργο εἶναι ἀνάλογο μὲ τὸν βαθμὸ ἀταξίας ποὺ παρουσιάζει τὸ φυσικὸ σύστημα. Πράγματι, γιὰ τὸν ἐντοπισμὸ τῶν ἀτόμων ἑνὸς ἀερίου θὰ ἀπαιτηθεῖ ἕνα πρόγραμμα στὸν Ὑπολογιστὴ πολὺ μεγαλυτέρου μήκους ἀπὸ ἐκεῖνο ποὺ θὰ ἀπαιτηθεῖ γιὰ τὸν ἐντοπισμὸ τῶν ἀτόμων ἑνὸς κρυστάλλου, διότι ὁ κρύσταλλος ἔχει κανονικότερη δομὴ ἀπὸ ἐκείνη τοῦ ἀερίου.

Ἂς σημειωθεῖ ὅτι, ὅταν μιλοῦμε γιὰ κάποια θεωρία μὲ τὴν ὁποία προσπαθοῦμε νὰ ἐξηγήσουμε ἕνα πλῆθος φαινομένων, δεχόμαστε ὅτι ἡ ἁπλούστερη ἀπὸ τὶς θεωρίες ποὺ προσφέρονται εἶναι καὶ ἡ καλύτερη. Μὲ τὴ λέξη ὅμως «θεωρία», οὐσιαστικά, ἐννοοῦμε ἕνα πρόγραμμα στὸν ὑπολογιστή, τὸ ὁποῖο μᾶς βοηθάει στὸ νὰ κάνουμε προβλέψεις. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ καλύτερη θεωρία εἶναι ἐκείνη ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ πρόγραμμα τοῦ ἐλάχιστου δυνατοῦ μήκους, ἐκείνη, δηλαδή, ποὺ μπορεῖ νὰ περιορίσει (νὰ συμπιέσει) τὰ δεδομένα (data) σὲ ἕνα πολὺ μικρότερο σύνολο ὑποθέσεων καὶ κανόνων γιὰ τὴν ἐξαγωγὴ συμπερασμάτων.

Ὁ Chaitin εἶχε τὴν ἰδέα νὰ χρησιμοποιήσει τὸ μῆκος τοῦ προγράμματος ποὺ δίδεται στὸν ὑπολογιστὴ γιὰ τὴν ἐκτέλεση ἑνὸς ἔργου (program-size complexity) γιὰ νὰ ὁρίσει τὴν ἔννοια τῆς «τυχαιότητας» σὲ ἕνα ἀξιωματικὸ σύστημα. Ὅρισε τὴν τυχαιότητα ὡς κάτι ποὺ δὲν μπορεῖ καθόλου νὰ συμπιεσθεῖ, ὑπὸ τὴν ἔννοια ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω. Μὲ ἄλλα λόγια, ἂν τὸ ἐλαχίστου μήκους πρόγραμμα, τὸ ὁποῖο ἀναμένεται νὰ ἀναπαραγάγει ἕνα σύνολο δεδομένων (data), ἔχει τὸ ἴδιο μῆκος μὲ τὸ σύνολο τῶν δεδομένων, τότε στὰ δεδομένα αὐτὰ δὲν ὑπάρχει καμιὰ δομὴ (pattern) καὶ πρέπει αὐτὰ νὰ θεωροῦνται «τυχαῖα». Διότι ὁ μόνος τρόπος νὰ περιγράψει κανεὶς ἕνα τελείως τυχαῖο ἀντικείμενο ἢ ἀριθμὸ σὲ κάποιον, εἶναι ἁπλὰ νὰ τοῦ τὸ παρουσιάσει λέγοντάς του: «Αὐτὸ εἶναι». Διότι τὸ ἀντικείμενο ἢ ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δὲν ἔχει κάποια δομὴ (pattern)· δὲν ὑπάρχει πιὸ σύντομη ἀπὸ αὐτὴν περιγραφή.

Ἔτσι ὅταν ἀρχίσει κανεὶς νὰ ἐξετάζει τὸ μέγεθος ἑνὸς προγράμματος ποὺ δίδεται στὸν ὑπολογιστή, ὅταν δηλαδὴ ἀρχίσει νὰ ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἔννοια τοῦ program-size complexity, τότε διαπιστώνει ὅτι λαμβάνει χώραν κάτι τὸ πολὺ ἐνδιαφέρον: Ὁπουδήποτε καὶ ἂν στραφεῖ, διαπιστώνει τὴν «μὴ-πληρότητα» τοῦ συστήματος. Μετροῦμε τὴν πολυπλοκότητα ἑνὸς προγράμματος μὲ τὸ μέγεθος τοῦ ἐλαχίστου μήκους προγράμματος, ποὺ πρέπει νὰ δοθεῖ στὸν ὑπολογιστὴ γιὰ νὰ ὑπολογίσει τὸ πρᾶγμα αὐτό. Ὅπως ἀποδεικνύεται ὅμως δὲν εἴμαστε ποτὲ βέβαιοι ὅτι γνωρίζουμε ὅτι τὸ πρόγραμμα ποὺ δίνουμε στὸν ὑπολογιστὴ εἶναι τὸ ἐλαχίστου ἀπαιτουμένου μήκους. Συνεπῶς, δὲν εἶναι δυνατὸ νὰ ὑπολογίσουμε τὸ program-size complexity, ἀφοῦ δὲν γνωρίζουμε τὸ μέγεθος τοῦ ἐλαχίστου προγράμματος ποὺ τὸ ὑπολογίζει.

Τὸ πλῆθος τῶν ἀξιωμάτων, ποὺ οἱ μαθηματικοὶ χρησιμοποιοῦν σὲ μία θεωρία, εἶναι κατὰ κανόνα ἀρκετὰ μικρό. Σὲ ἀντίθετη περίπτωση, κανένας δὲν θὰ πίστευε στὰ ἀξιώματα αὐτά. Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι ἔχουμε ἐνώπιόν μας ἕνα «ἄπειρο» πλῆθος πληροφοριῶν ποὺ ἀφοροῦν τὰ μαθηματικά. Σὲ σχέση μὲ τὸν ὄγκο αὐτὸ τῶν πληροφοριῶν τὸ πλῆθος τῶν ἀξιωμάτων σὲ ἕνα ἀξιωματικὸ σύστημα εἶναι, ὅπως τονίσαμε παραπάνω, πολὺ μικρό. Οἱ τελευταῖες αὐτὲς σκέψεις ὁδήγησαν τὸν Chaitin στὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ μὴ-πληρότητα, ἡ ὁποία ὅπως ἀπέδειξε ὁ Gödel χαρακτηρίζει τὰ ἀξιωματικὰ συστήματα δὲν πρέπει νὰ θεωρεῖται οὔτε μυστηριώδης, οὔτε πολύπλοκη, ἀντιθέτως, πρέπει νὰ θεωρεῖται φυσιολογικὴ καὶ ἀναπόφευκτη καὶ ὀφείλεται στὴν "τυχαιότητα" ποὺ ὑπάρχει στὰ Μαθηματικά.

Μὲ τὰ παραπάνω ἐκτεθέντα ὁ ὁμιλῶν δὲν ἔχει τὴν ψευδαίσθηση ὅτι μπόρεσε νὰ δώσει σαφῆ εἰκόνα τῆς θεωρίας τοῦ Chaitin, ἡ ὁποία ἀφορᾶ τὴν μὴ-πληρότητα τῶν τυπικῶν ἀξιωματικῶν συστημάτων. Ἐλπίζει μόνο ὅτι ὁ ἀκροατὴς ἀντιλήφθηκε ἔστω καὶ διαισθητικὰ τὸ ὅλο θέμα.

Ἀνακεφαλαιώνοντας λοιπὸν ἔχομε:

1. Κάθε τυπικὸ ἀξιωματικὸ σύστημα εἶναι μὴ-πλῆρες. Ὑπάρχουν σ' αὐτὸ ἀληθεῖς προτάσεις, τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια δὲν μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ μὲ τὰ μέσα ποὺ παρέχει τὸ ἴδιο τὸ σύστημα (Gödel, Turing).

2. Τὸ παραπάνω γεγονὸς (ἡ μὴ -πληρότητα), μολονότι ἀποτελεῖ ἀπόδειξη ὅτι ἡ ἰδέα τοῦ Hilbert εἶναι ἀνέφικτη, ἀποτέλεσε βάση τῆς θεωρίας τῶν Ὑπολογιστῶν.
3. Ἡ μὴ-πληρότητα τῶν τυπικῶν ἀξιωματικῶν συστημάτων ὀφείλεται στὴν «τυχαιότητα» ποὺ παρατηρεῖται στὰ συστήματα αὐτὰ (G. Chaitin).

Τέλος, ἂς σημειωθεῖ ὅτι τὸ ἔργο τοῦ Gödel εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ὁδήγησε στὴν ἄποψη, ποὺ ἀρκετοὶ ἀσπάζονται, ὅτι ἡ "τυχαιότητα" εἶναι σύμφυτη στὰ Μαθηματικά, ἀκριβῶς ὅπως στὴ Φυσικὴ —ἄποψη (ἔννοια) μὲ τὴν ὁποία ὁ Albert Einstein διαφωνοῦσε.

Ὅμως παρὰ τὶς διαφωνίες τους ἐπὶ τοῦ θέματος αὐτοῦ, ὑπῆρχε μεταξὺ τῶν δύο ἀνδρῶν, τοῦ Gödel καὶ τοῦ Einstein, μία στενὴ φιλία. Στὴν παρακάτω φωτογραφία εἰκονίζονται οἱ δύο φίλοι, τὴν ἐποχὴ ποὺ ζοῦσαν στὸ Princeton :

Θὰ τελειώσω τὴν ὁμιλία μου μὲ μία παρατήρηση, διατυπωμένη ὑπὸ μορφὴ ἐρωτήματος:

Πῶς συμβαίνει, παρὰ τὸ γεγονὸς τῆς ὑπάρξεως τοῦ φαινομένου τῆς μὴ-πληρότητας στὰ Μαθηματικά, ἑνὸς φαινομένου ποὺ ἀποπνέει πεσιμιστικὰ αἰσθήματα ὡς πρὸς τὴν πρόοδο τῶν μαθηματικῶν, τὰ Μαθηματικὰ νὰ προοδεύουν σὲ τόσο μεγάλο βαθμό; Ἴσως οἱ νεώτερες γενιές τῶν μαθηματικῶν θὰ μποροῦσαν νὰ ἀποδείξουν ὅτι ἔτσι εἶναι, ὅτι ἔτσι πρέπει νὰ εἶναι, ὅτι δηλαδὴ τὰ Μαθηματικὰ θὰ προοδεύουν πάντα μὲ ὁλοένα αὐξανόμενο ρυθμό. Καὶ ἂς προσθέσω κάτι ἀκόμα, ποὺ ἀποτελεῖ ἄποψη τοῦ ὁμιλοῦντος, ὅτι τὰ Μαθηματικὰ εἶναι μία δημιουργικὴ δραστηριότητα τοῦ ἀνθρώπου, ὅπως εἶναι ἡ γλώσσα καὶ ἡ μουσική, δραστηριότητα ὑψίστης πρωτοτυπίας, ἡ ὁποία μέχρι στιγμῆς δὲν φαίνεται νὰ ἐπιδέχεται μία πλήρη λογικὴ καὶ ἀντικειμενικὴ ἀνάλυση.

Κυρίες καὶ Κύριοι, ξέρω ὅτι σᾶς κούρασα. Ἴσως ἔγραψα πολλά. Ὅμως δὲν εἶχα καιρὸ νὰ γράψω λιγότερα.

Σᾶς εὐχαριστῶ ποὺ μὲ ἀκούσατε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Casti, J. L., and W. DePauli 2000. Gödel: a Life of Logic: Cambridge, Mass.: Perseus Publishing.

Chaitin, G. J. 1975. Randomness and mathematical proof. Scientific American 232(5): 47-52.

Chaitin, G. J. 1988. Randomness in arithmetic. Scientific American 259 (1): 80-85.

Hofstadter, D. R. 1979. Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. New York: Basic Books.

Nagel, E., and J. R. Newman. 1956. Gödel's Proof. Scientific American 194(6): 71-86

Nagel, E., and J. R. Newman. 1958. Gödel's Proof. New York: New York University Press.