ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. — **Σχέσεις τῶν πρωτευουσῶν ἀκτίνων καμπυλότητος καὶ τοῦ μοναδιαίου διανύσματος τῆς καθέτου εὐθείας εἰς σημεῖον ἐπιφανείας,** *ὑπὸ* ***Νείλου Σακελλαρίου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου.

Σύνολον σημείων εἰς τὸν Εὐκλείδειον χῶρον (x_1, x_2, x_3) λέγομεν ὅτι εἶναι ἐπιφάνεια (ἢ μικρὸν μέρος αὐτῆς) (ε) καὶ τάξεως c^n, ὅταν εἶναι $n \geqslant 1$, ἂν εἶναι ὁ τόπος τῶν ἄκρων διανύσματος, παριστανομένου ὑπὸ διανυσματικῆς συναρτήσεως $x(u_1, u_2)$, ἐχούσης μερικὰς παραγώγους n τάξεως (n ἀκέραιος καὶ θετικός), ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} \times \frac{\partial x}{\partial u_2} \neq o,$$

(τοῦ $\times$ παριστάνοντος διανυσματικὸν γινόμενον).

Ἂν ἡ (ε) εἶνε τάξεως c''', ἡ καμπυλότης τοῦ Gauss $K(u_1, u_2)$ καὶ ἡ μέση καμπυλότης $H(u_1, u_2)$ εἰς σημεῖον αὐτῆς (u_1, u_2) εἶναι τάξεως c', καὶ θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστὸν

$$H = k_1 + k_2 = (GL - 2FM + EN)/(EG - F^2),$$
$$K = (LN - M^2)/(EG - F^2),$$
$$EG - F^2 - (GL - 2FM + EN)R + (LN - M^2)R^2 = o,$$
$$k = {}^1/R \;, \quad k_i = {}^1/R_i \;, \quad (i = 1,2),$$
$$k^2 - Hk + K = o, \qquad H^2 - 4K \geqslant o.$$

Ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ (ε) στερεῖται σφαιρικῶν (ἢ ὀμφαλικῶν) σημείων, ὅτε εἶναι $H^2 - 4K > o$, αἱ k_1, k_2 εἶναι διάφοροι (ὡς καὶ αἱ R_1, R_2) καὶ ἑκάστη τάξεως c', τοὐλάχιστον δ' ἓν τῶν k_1, k_2 εἶναι διάφορον τοῦ 0 εἰς τὸ (u_1, u_2) καὶ εἰς (μικρὰν) περιοχὴν τούτου. Αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς (ε) ὁρίζονται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$(FL - EM) + (GL - EN)\frac{du_2}{du_1} + (GM - FN)\left(\frac{du_2}{du_1}\right)^2 = o,$$

ἢ ὑπὸ τῶν

$$\frac{du_2}{du_1} = f_1(u_1, u_2), \quad f_2(u_1, u_2), \quad \text{τάξεως } c'.$$

Ἂν $\zeta(u_1, u_2)$ εἶναι τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τῆς καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὴν (ε) (εἰς τὸ (u_1, u_2)), ἔχομεν (κατὰ Rodrigues), ἐὰν αἱ γραμμαὶ $u_2 =$ σταθ., $u_1 =$ σταθ. εἶναι γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς (ε),

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} + R_1 \frac{\partial \zeta}{\partial u_1} = o,$$
$$\frac{\partial x}{\partial u_2} + R_2 \frac{\partial \zeta}{\partial u_2} = o,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial\zeta}{\partial u_2} = o, \text{ (ὑποτίθεται ὅτι εἶναι } R_1, R_2 \neq o).$$

Ἔστω ὅτι

$$\xi = x\ (u_1, u_2) + \lambda . \zeta\ (u_1, u_2) \tag{1}$$

εἶναι ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις σμήνους εὐθειῶν, 2ρ ἡ ἀπόστασις δύο ἑστιακῶν σημείων ἐπὶ μιᾶς ἀκτῖνος, $x\ (u_1, u_2)$ τὸ διάνυσμα τὸ ὁρίζον τὸ μέσον σημεῖον, $\zeta\ (u_1, u_2)$, τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τῆς ἀκτῖνος τοῦ (1), u_i $(i = 1, 2)$ αἱ παράμετροι τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν τοῦ (1) καὶ

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u_1}\right)^2 = e, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial\zeta}{\partial u_2} = f, \quad \left(\frac{\partial\zeta}{\partial u_2}\right)^2 = g$$

οἱ συντελεσταὶ τῆς θεμελιώδους μορφῆς (δηλαδὴ τὰ θεμελιώδη ποσὰ τῶν Kummer)

$$e\ (du_1)^2 + 2f\ du_1 .\ du_2 + (du_2)^2.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ᾽ ἣν τὸ σμῆνος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς καθέτους εὐθείας ἐπὶ τὴν (ε), ἔχουσαν διανυσματικὴν ἐξίσωσιν $x = x\ (u_1, u_2)$, κατὰ μῆκος τῶν γραμμῶν καμπυλότητος αὐτῆς $u_2 =$ σταθ., $u_1 =$ σταθ., ἡ μὲν διανυσματικὴ ἐξίσωσις τοῦ σμήνους εἶναι

$$\zeta = \overline{x} + \lambda\ .\ \zeta\ (u_1, u_2) \tag{2},$$

ἡ δὲ τῆς μέσης ἐπιφανείας

$$\overline{x} = x + \frac{1}{2}(R_1 + R_2).\ \zeta\ (u_1, u_2),$$

ἐπειδὴ τὸ μὲν μέσον σημεῖον εἶναι τὸ $\frac{R_1 + R_2}{2}$ ἐπὶ τῆς καθέτου εὐθείας ἐπὶ τὴν (ε), ἔχομεν δὲ

$$f = \frac{\partial\zeta}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial\zeta}{\partial u_2} = \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_2} \frac{1}{R_1 R_2} = o.$$

Αἱ διανυσματικαὶ ἐξισώσεις τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν (ε_1^*), (ε_2^*) τοῦ σμήνους εἶναι διὰ τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν $\left(\rho = \frac{R_1 - R_2}{2}\right)$

$$x_1^* = \overline{x}\,(u_1, u_2) + \frac{R_1\ (u_1, u_2) - R_2\ (u_1, u_2)}{2} .\ \zeta\ (u_1, u_2) =$$

$$= x\ (u_1, u_2) + R_1\ (u_1, u_2).\ \zeta\ (u_1, u_2)$$

$$x_2^* = \overline{x}\ (u_1, u_2) - \frac{R_1(u_1, u_2) - R_2\ (u_1, u_2)}{2} .\ \zeta\ (u_1\ u_2) =$$

$$= x\ (u_1, u_2) + R_2\ (u_1, u_2).\ \zeta\ (u_1, u_2).$$

Αἱ ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις εἶναι, ὡς γνωστόν, αἱ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν κέντρων καμπυλότητος τῆς (ε), τῶν ἀντιστοίχων εἰς τὰς R_1, R_2. Ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial u_1} = \frac{\partial R_1}{\partial u_1} \cdot \zeta\,(u_1, u_2), \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial u_2} = \frac{\partial R_2}{\partial u_2} \cdot \zeta\,(u_1, u_2),$$

ἐκ τούτων δ' ἡ μὲν πρώτη ἐκφράζει ὅτι ἡ ἀκτὶς ἀντίστοιχος εἰς τὸ (u_1, u_2) μὲ μοναδιαῖον διάνυσμα τὸ $\zeta\,(u_1, u_2)$ ἐφάπτεται τῆς ἑστιακῆς γραμμῆς $u_2 =$ σταθ. εἰς τὸ σημεῖον x_1^* τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας (ε_1^*), ἡ δὲ δευτέρα ὅτι ἡ αὐτὴ ἀκτὶς ἐφάπτεται τῆς ἑστιακῆς γραμμῆς $u_1 =$ σταθ. εἰς τὸ σημεῖον x_2^* τῆς (ε_2^*).

Ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν σχέσεις συνδεούσας τὰ R_1, R_2 μὲ τὸ $\zeta\,(u_1, u_2)$ (διαφόρους τῶν τύπων τοῦ Rodrigues), χρησιμοποιοῦντες τὴν ἐφαρμοζομένην πορείαν διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ Guichard, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται ἡ λύσις τοῦ προβλήματος κατὰ τὸ ὁποῖον «δοθείσης τῆς σφαιρικῆς εἰκόνος τῶν ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ εὐθύγραμμον σμῆνος». Πράγματι, αἱ βοηθητικαὶ ἐξισώσεις, αἱ χρησιμοποιούμεναι διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως (Guichard)

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u_1 \partial u_2} + a.\frac{\partial \varrho}{\partial u_1} + b.\frac{\partial \varrho}{\partial u_2} + \left(\frac{\partial a}{\partial u_1} + \frac{\partial b}{\partial u_2} + f\right)\varrho = o, \tag{3}$$

ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζεται ἡ τιμὴ τοῦ ϱ, παριστάνουσα τὴν τετμημένην τοῦ ἑνὸς τῶν ἑστιακῶν σημείων, τοῦ κειμένου ἐπὶ τῆς (ε_1^*) κατὰ τὴν γενικὴν περίπτωσιν, εἶναι αἱ

$$\left(\frac{\partial R_1}{\partial u_1} - 2\frac{\partial \varrho}{\partial u_1}\right).\,f - \left(\frac{\partial R_2}{\partial u_2} + 2\frac{\partial \varrho}{\partial u_2}\right)e = 2\,(a.e + b.f)\,\varrho,$$

$$\left(\frac{\partial R_1}{\partial u_1} - 2\frac{\partial \varrho}{\partial u_1}\right).\,g - \left(\frac{\partial R_2}{\partial u_2} + 2\frac{\partial \varrho}{\partial u_2}\right)f = 2\,(a\,f + b.g).\varrho,$$

ὅπου εἶναι

$$a = \left(g.\frac{\partial e}{\partial u_2} - f.\frac{\partial g}{\partial u_1}\right) \Big/ 2\,(e.g - f^2)$$

$$b = \left(e.\frac{\partial g}{\partial u_1} - f.\frac{\partial e}{\partial u_2}\right) \Big/ 2\,(e.g - f^2).$$

Αἱ ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις διὰ τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν

$$\left(\varrho = \frac{R_1 - R_2}{2},\ f = o,\ a = \frac{\partial e}{\partial u_2} \Big/ 2.e\ ,\ b = \frac{\partial g}{\partial u_1} \Big/ 2\,g\right)$$

λαμβάνουν τὰς κατωτέρω μορφὰς

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial u_2} &= (R_2 - R_1)\ .\ a = (R_2 - R_1)\,\frac{1}{2e}\cdot\frac{\partial e}{\partial u_2} \\ \frac{\partial R_2}{\partial u_1} &= (R_1 - R_2)\ .\ b = (R_1 - R_2).\,\frac{1}{2g}\cdot\frac{\partial g}{\partial u_1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Οὕτω ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις (3) τοῦ Guichard λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 R_2}{\partial u_1 \partial u_2} + \left(\frac{\partial R_1}{\partial u_1} - \frac{\partial R_2}{\partial u_1}\right) . \, a + \left(\frac{\partial R_1}{\partial u_2} - \frac{\partial R_2}{\partial u_2}\right) b + \left(\frac{\partial a}{\partial u_1} + \frac{\partial b}{\partial u_2}\right)(R_1 - R_2) = o$$

ἡ ὁποία ἐπαληθεύεται διὰ τὰς τιμὰς

$$a = \frac{\partial R_1}{\partial u_2} \Big/ (R_2 - R_1), \; b = \frac{\partial R_2}{\partial u_1} \Big/ (R_1 - R_2). \tag{4'}$$

Αἱ (4) δυνατὸν νὰ τεθοῦν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$R_2 - R_1 = \frac{1}{a} . \frac{\partial R_1}{\partial u_2}, \; R_1 - R_2 = \frac{1}{b} . \frac{\partial R_2}{\partial u_1}$$

ἢ

$$\frac{1}{a} . \frac{\partial R_1}{\partial u_2} + \frac{1}{b} . \frac{\partial R_2}{\partial u_1} = o$$

ἢ

$$e . \frac{\partial R_1}{\partial u_2} : \frac{\partial e}{\partial u_2} + g . \frac{\partial R_2}{\partial u_1} : \frac{\partial g}{\partial u_1} = o.$$

Μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν (4) ἢ (4') εὑρίσκομεν τὴν ἔκφρασιν τῶν μεγεθῶν πρώτης καὶ δευτέρας τάξεως κλπ. τῶν ἐνειλιγμένων ἐπιφανειῶν (ε_1^*), (ε_2^*) τῆς (ε) διὰ τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν ἐκ τῶν τοιούτων διὰ τὰς ἑστιακὰς ἐπιφανείας σμήνους κατὰ τὴν γενικὴν περίπτωσιν. Οὕτω π. χ. ἐκ τοῦ

$$E_1^* = 4\left(b\varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial u_1}\right)^2, \text{ διὰ } \varrho = \frac{R_1 - R_2}{2}, \; b = \frac{\partial R_2}{\partial u_1} \Big/ (R_1 - R_2)$$

εὑρίσκομεν

$$E_1^* = \left(\frac{\partial R_1}{\partial u_1}\right)^2.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ

$$F_1^* = -4 a \varrho \left(b.\varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial u_1}\right), \text{ καὶ διὰ } a = \frac{\partial R_1}{\partial u_2} \Big/ (R_2 - R_1)$$

$$F_1^* = \frac{\partial R_1}{\partial u_1} . \frac{\partial R_1}{\partial u_2}.$$

Ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου διὰ τὸ G_1^*

$$G_1^* = 4\varrho^2 (a^2 + g)$$

εὑρίσκομεν

$$G_1^* = 4 . \frac{(R_1 - R_2)^2}{4}\left[\left(\frac{\partial R_1}{\partial u_2} .\right)^2 : (R_2 - R_1)^2 + (\zeta u_1)^2\right]$$

$$= \left(\frac{\partial R_1}{\partial u_2}\right)^2 + (R_1 - R_2)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 . \frac{1}{R_2^2}$$

$$= \left(\frac{\partial R_1}{\partial u_2}\right)^2 + \frac{(R_1 - R_2)^2}{R_2^2} . \, G.$$