ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. – Περὶ ἑνὸς θεωρήματος τοῦ Γεωργίου Ρεμούνδου, *ὑπὸ τοῦ κ.* ***Θ. Βαροπούλου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κ. Μαλτέζου.

Προτίθεμαι ν' ἀνακοινώσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν περίληψιν τῶν ἐξαγομένων εἰς ἃ ἤχθην ἐπὶ ἑνὸς ζητήματος ὅπερ ὁ Γ. Ρεμοῦνδος θέτει εἰς τὸ ἐσχάτως ἐκδοθὲν ἐν Παρισίοις βιβλίον του.

«Extension aux fonctions multiformes du théoréme de m. Picard et de ses généralisations» τῆς συλλογῆς «Mémorial des Sciences mathèmatiques» fascicule XXIII.

Τὰ ἐξαγόμενα εἰς ἃ ἤχθην ἀποτελοῦν τὸ θέμα ἑνὸς ὑπομνήματος ὅπερ δημοσιεύεται εἰς τὸ Bulletin de la Societé Mathématique de France τοῦ τρέχ. ἔτους.

1. Κατόπιν τῶν ἔργων τοῦ κ. P. Montel τῶν ἐκτεθειμένων εἰς τὸ βιβλίον του «Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications» τῆς Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de m. Emile Borel (Paris, Gauthier-Villars, 1927) ἐὰν θεωρήσωμεν μίαν ἀλγεβροειδῆ

$$u^{\nu}+f_1(x)u^{\nu-1}+\ldots+f_{\nu}(x)=0$$

καὶ μίαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ ν μὲ σταθεροὺς συντελεστὰς τῆς μορφῆς

$$\lambda_0 u^{\nu}-C_{\nu}^1\lambda_1 u^{\nu-1}+C_{\nu}^2\lambda_2 u^{\nu-2}-\ldots+(-1)^{\nu}\lambda_{\nu}=0$$

ἔχουσαν ρίζας (διακεκριμένας ἢ μὴ) $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ τότε αἱ τιμαὶ τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας οἱ κλάδοι τῆς συναρτήσεως $u_1, u_2, \ldots, u_{\nu}$ εἶναι *en involution* ὡς πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ δίδονται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως

$$\lambda_0+\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\ldots+\lambda_{\nu}f_{\nu}(x)=0$$

ἡ περίπτωσις τῶν ἐξαιρετικῶν τιμῶν τῶν ἀλγεβροειδῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν σχέσιν

$$\alpha=\beta=\ldots=\lambda.$$

ὅπως δὲ ἀπέδειξε ὁ κ. Montel *ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξαιρετικῶν involutions μιᾶς ἀλγεβροειδοῦς ἀκεραίας δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ* $2\nu-1$, ν *δηλοῦντος τὸν ἀριθμὸν τῶν κλάδων τῆς ἀλγεβροειδοῦς.*

Ἡ στενὴ σχέσις τῶν ἐξαιρετικῶν τιμῶν καὶ τῶν involutions μιᾶς ἀλγεβροειδοῦς ἤγαγε τὸν Γ. Ρεμοῦνδον εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ὕπαρξις τοιούτων involutions δύναται νὰ μᾶς ἐπιτρέψῃ ὅπως ὑποβιβάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐξαιρετικῶν τιμῶν εἰς δὲ τὴν σελίδα 33 τοῦ ἄνω μνημονευθέντος βιβλίου του δίδει, χωρὶς νὰ τὸ ἀποδείξῃ, τὴν ἑξῆς πρότασιν

Ὅταν μιᾶς ἀλγεβροειδοῦς μὲ ν κλάσεως ὑπάρχουν ν—1 involutions ἐξαιρετικαὶ διακεκριμέναι τοῦ α'. τύπου τότε ὑπάρχουν ἐν γένει ν—1 τιμαὶ ἐξαιρετικαὶ διακεκριμέναι τῆς πρώτης κατηγορίας.

Συνεχίζων ἐκφράζεται (p. 33) ὡς ἑξῆς

Il y a là une étude assez delicate qui reste a faire

Τὴν μελέτην ταύτην ἔκαμα καὶ κατέληξα εἰς τὰ ἑξῆς ἐξαγόμενα:

Α'. ΑΛΓΕΒΡΟΕΙΔΕΙΣ ΑΚΕΡΑΙΟΙ

2. Θεωρῶ μίαν ἀλγεβροειδῆ τάξεως $\nu=3$ (πρὸς ἁπλοποίησιν τῆς γραφῆς τῶν συμβόλων) ἀκεραίαν

$$f(x, u) = u^3+f_1(x)u^2+f_2(x)u+f_3(x)$$

καὶ ὑποθέτω ὅτι δέχεται δύο ἐξαιρετικὰς involutions τοῦ πρώτου τύπου

$$G_1 \equiv \lambda_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = P_1(x)$$

$$G_2 \equiv \mu_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 = P_2(x)$$

P_1, P_2 εἶναι πολυώνυμα.

Θὰ δείξω ὅτι ἡ ἀλγεβροειδὴς δέχεται $\nu-1=2$ ἐξαιρετικὰς τιμὰς τοῦ πρώτου τύπου δηλαδὴ δύο τιμὰς $u=\mathbf{u}$ τοιαύτας ὥστε

$$f\,(x, \mathbf{u}) = \text{polynome ou constante}$$

Πρὸς τοῦτο παρατηρῶ ὅτι ἡ παράστασις

$$G=\alpha G_1+\beta G_2+\gamma$$

(α, β, γ σταθεροὶ) εἶναι ἐξαιρετικὸς συνδιασμὸς διὰ τὴν ἀλγεβροειδῆ ἀλλὰ

$$G \equiv (\alpha\lambda_0+\beta\mu_0+\gamma)+(\alpha\lambda_1+\beta\mu_1)f_1+(\alpha\lambda_2+\beta\mu_2)f_2+(\alpha\lambda_3+\beta\mu_3)f_3 = \alpha P_1+\beta P_2+\gamma$$

ὥστε ἵνα ἡ τιμὴ $u=u_0$ εἶναι ἐξαιρετικὴ τοῦ πρώτου τύπου πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\alpha\lambda_1+\beta\mu_1 = pu_0^2$$

$$\alpha\lambda_2+\beta\mu_2 = pu_0$$

$$\alpha\lambda_3+\beta\mu_3 = p$$

$$\alpha\lambda_0+\beta\mu_0+\gamma = pu_0^3$$

Ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὑποθέσωμεν $p=1$ ἔπεται ὅτι u_0 ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν

$$R \equiv \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & u_0^2 \\ \lambda_2 & \mu_2 & u_0 \\ \lambda_3 & \mu_3 & 1 \end{vmatrix} \equiv A u_0^2 + B u_0 + \Gamma = 0$$

τὰ Α, Β, Γ δὲν εἶναι πάντα μηδὲν διότι αἱ παραστάσεις G_1, G_2 εἶναι ἀνεξάρτητοι καὶ κατὰ συνέπειαν ἔχωμεν ἐν γένει δύο τιμὰς τοῦ u_0 τουτέστιν δύο ἐξαιρετικὰς τιμὰς τοῦ α'. τύπου διὰ τὴν ἀλγεβροειδῆ.

Ἡ μέθοδος αὕτη ἰσχύει προφανῶς διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ ν καὶ ἔχομεν τὸ ἑξῆς

I. Θεώρημα. — *Ἐὰν μία ἀλγεβροειδὴς τάξεως ν δέχηται ν — 1 ἐξαιρετικὰς involutions τοῦ πρώτου τύπου, αὕτη δέχεται ἐπίσης ν — 1 ἐξαιρετικὰς τιμὰς τοῦ πρώτου τύπου.*

II. Θεώρημα. — *Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις* $R = 0$ *ἔχει πολλαπλᾶς ῥίζας ἡ ἀλγεβροειδὴς δέχεται ἐξαιρετικὰς τιμὰς βαθμοῦ ἀνωτέρου τῆς μονάδος.*

Ὡς γνωστὸν μία τιμὴ $u = \mathbf{u}$ εἶναι ἐξαιρετικὴ τάξεως $k+1$ ἂν εἶναι ἐξαιρετικὴ διὰ τὰς ἀλγεβροειδεῖς τὰς ὁριζομένας ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$f(x, u) = 0,\quad f'_u(x, u) = 0,\quad f''_{u^2}(x, u) = 0, \ldots,\quad f^{(k)}_{u^k}(x, u) = 0$$

3. *Αἱ ἐξαιρετικαὶ τοῦ Γ. Ρεμούνδου*

Εἰς τὴν σελίδα 51 τοῦ ὡς ἄνω βιβλίου του τοῦ Memorial ὁ Ρεμοῦνδος εἰσάγει νέαν ἔννοιαν τῶν ἐξαιρετικῶν τιμῶν διὰ τὰς ἀκεραίας καὶ ἀλγεβροειδεῖς συναρτήσεις.

Ἐὰν ἡ παράστασις

$$f(x, \mathbf{u}) = g_1(x)e^{\lambda_1(x)} + g_2(x)e^{\lambda_2(x)} + \ldots + g_n(x)e^{\lambda_n(x)} \qquad (1)$$

ὅπου g_i εἶναι συναρτήσεις ἀκέραιοι τάξεως κατωτέρας τοῦ ρ καὶ λ_i πολυώνυμα βαθμοῦ ρ καὶ $n \geqq 2$ (ρ δηλοῖ τὴν τάξιν τῆς ἀλγεβροειδοῦς) τότε αἱ τιμαὶ $\mathbf{u}$ δέον νὰ θεωρηθῶσιν ἐξαιρετικαί.

Ἰδοὺ δύο θεωρήματα ἀφορῶντα τὰς ἐξαιρετικὰς τιμὰς τοῦ Γ. Ρεμούνδου.

III. Θεώρημα. — *Ἐὰν μία ἀλγεβροειδὴς τάξεων ν δέχηται* ν — 1 *involutions ἐξαιρετικὰς τοῦ* ***δευτέρου*** *τύπου τότε αὕτη δέχεται ἀναγκαίως* ν — 1 *ἐξαιρετικὰς τιμὰς τοῦ Γεωργίου Ρεμούνδου* [μορφῆς (1)]

IV. Θεώρημα. — *Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις* $R = 0$ *ἡ ὁρίζουσα τὰς ἐξαιρετικὰς τιμὰς δέχηται ῥίζας πολλαπλᾶς τότε θὰ ὑπάρχουν ἐξαιρετικαὶ τιμαὶ τοῦ Ρεμούνδου τάξεως ἀνωτέρας τῆς πρώτης.*

Β'. ΑΛΓΕΒΡΟΕΙΔΕΙΣ ΤΥΧΟΥΣΑΙ

4. Τίθεται ἤδη τὸ ζήτημα νὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν δίδεται ἀλγεβροειδὴς τάξεως ν τυχούσης ἥτις δέχεται Κ ἐξαιρετικὰς *involutions*

V. Θεώρημα.—*Ἐὰν* $K < \nu$ *ἡ ἀλγεβροειδὴς ἐν γένει δὲν δέχεται ἐξαιρετικὰς τιμὰς τῆς πρώτης κατηγορίας*

Παραδείγματος χάριν ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἀλγεβροειδῆ

$$u^3+f_1(x)u^2+f_2(x)u+f_3(x)=0$$

τὴν δεχομένην τὴν *involution*

$$G=\lambda_0+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3 \equiv P(x)$$

ὅπου

$$\lambda_2^2 \neq \lambda_1 \lambda_3$$

αὕτη εἶναι ἀδύνατον νὰ δέχηται ἐξαιρετικὰς τιμὰς τοῦ πρώτου τύπου.

Γνωρίζωμεν[1] ὅτι ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἀλγεβροειδῆ

$$u^\nu+f_1 u^{\nu-2}+\ldots+f_\nu=0$$

καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὸ σύστημα $f_1, f_2, \ldots, f_\nu$ ὑπὸ ἑνὸς ἄλλου συστήματος $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ τοιοῦτον ὥστε

$$g_1=\alpha_0^1+\alpha_1^1 f_1+\ldots+\alpha_\nu^1 f_\nu$$

$$g_2=\alpha_0^2+\alpha_1^2 f_1+\ldots+\alpha_\nu^2 f_\nu$$

$$g_\nu=\alpha_0^\nu+\alpha_1^\nu f_1+\ldots+\alpha_\nu^\nu f_\nu$$

ἔνθα

$$\Lambda=\begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_\nu^1 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_1^\nu & \ldots & \alpha_\nu^\nu \end{vmatrix} \neq 0$$

εὑρίσκομεν νέαν ἀλγεβροειδῆ τῆς *αὐτῆς τάξεως*.

Τούτου τεθέντος ἰδοὺ τὰ ἐξαγόμενα σχετικὰ μὲ τὸ τιθέμενον ζήτημα

VI. Θεώρημα· — *Ἐὰν μία ἀλγεβροειδὴς τυχοῦσα τάξεως δευτέρας δέχεται μίαν ἐξαιρετικὴν involution ὑπάρχουν ἀλγεβροειδεῖς ἐξαρτώμεναι ἐξ 7 παραμέτρων δεχόμεναι μίαν ἐξαιρετικὴν τιμὴν τῆς α'. κατηγορίας ἀνήκουσαι εἰς τὴν αὐτὴν τάξιν μὲ τὴν δοθεῖσαν.*

VII. Θεώρημα.— *Ἐὰν μία ἀλγεβροειδὴς τρίτης τάξεως δέχεται δύο ἐξαιρετικὰς involutions ὑπάρχουν ἀλγεβροειδεῖς τῆς αὐτῆς τάξεως ἐξαρτώμεναι ἐκ 14 παραμέτρων δεχόμεναι δύο ἐξαιρετικὰς τιμὰς τοῦ πρώτου τύπου.*

[1] P. Montel, loc. cit. p. 290.

VIII. Θεώρημα. — *Ἐὰν μία ἀλγεβροειδὴς τάξεως 3 δέχεται μίαν involution ἐξαιρετικὴν ὑπάρχουν ἐν τῇ αὐτῇ τάξει ἀλγεβροειδεῖς ἐξαρτώμεναι ἐκ 13 παραμέτρων δεχόμεναι μίαν τιμὴν ἐξαιρετικὴν τῆς α΄. κατηγορίας.*

IX. Θεώρημα Γενικὸν

Ἐὰν μία ἀλγεβροειδὴς τάξεως ν δέχεται $K \leqq \nu$ *ἐξαιρετικὰς involutions τοῦ πρώτου τύπου ὑπάρχουν ἐν τῇ αὐτῇ τάξει ἀλγεβροειδεῖς ἐξαρτώμεναι ἐκ*

$$\nu(\nu+1)+k$$

παραμέτρων δεχόμεναι K ἐξαιρετικὰς τιμὰς τοῦ πρώτου τύπου.

X. Θεώρημα. — *Ἐὰν μία ἀλγεβροειδὴς τάξεως ν δέχεται ν ἐξαιρετικὰς involutions τότε ὅλαι αἱ ἀλγεβροειδεῖς τῆς αὐτῆς τάξεως ἐξαρτώμεναι ἐκ*

$$\nu(\nu+2)$$

παραμέτρων δέχονται ν τιμὰς ἐξαιρετικάς.

XI. Θεώρημα. — *Ἐὰν ἡ ἀλγεβροειδὴς τάξεως ν δέχηται* $K \leqq \nu$ *ἐξαιρετικὰς involutions τοῦ δευτέρου τύπου τότε ὑπάρχουν ἀλγεβροειδεῖς ἐν τῇ αὐτῇ τάξει ἐξαρτώμεναι ἐκ*

$$\nu(\nu+1)+k$$

παραμέτρων δεχόμεναι K τιμὰς ἐξαιρετικὰς τοῦ Ρεμούνδου.

Ἐφαρμογὰς τῶν ὡς ἄνω θεωρημάτων εὑρίσκει τις εἰς τὸ λεπτομερὲς ὑπόμνημά μου τοῦ Bulletin de la Societé Mathématique de France.

XII. Θεώρημα. — *Ἔστω f ἀλγεβροειδὴς ἔχουσα ν κλάδους τάξεως p θεωρήσωμεν δὲ καὶ 2ν ἀλγεβροειδεῖς* f_i *τάξεως μικροτέρας τοῦ p μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων*

$$f = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2\nu)$$

μία τοὐλάχιστον ἔχει ἀπειρίαν ριζῶν

Τὸ θεώρημα τοῦτο ὅταν f_i εἶναι ποσότητες σταθεραὶ δίδει ὡς μερικὴν περίπτωσιν τὸ γνωστὸν τοῦ Ρεμούνδου. (Memorial, τεῦχος 23, σελ. 27 καὶ 28).