

Tests, vom 3. bis zum 18. Lebensjahr. Von diesen sind 60 alt, d. h. sie befinden sich bei *Binet* od. *Terman*. Die übrigen 26 sind neu vom Verfasser hinzugefügt. Diese Untersuchungen sind in den letzten sechs Jahren unter Leitung des Verfassers am Laboratorium für experimentelle Pädagogik der Athener Universität ausgeführt worden.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ. — **Sur les fonctions doublement convexes et les fonctions doublement sousharmoniques***, par *Paul Montel*¹.

¹Ανεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλιέζου.

1. On dit qu'une fonction $f(x)$ de la variable réelle x est convexe lorsque chacun des arcs de la courbe représentative de cette fonction est situé au-dessous de la corde qui joint ses extrémités ou coïncide avec cette corde. Une droite représente une fonction harmonique d'une variable: on peut donc dire qu'une fonction convexe est sousharmonique, en entendant par cette expression que tout arc de la courbe représentative est au-dessous de la courbe harmonique qui passe par ces extrémités, ou coïncide avec elle. On est ainsi conduit, pour les fonctions de deux variables, à l'extension de la notion de fonction convexe qui est due à M. F. Riesz: une fonction de deux variables est sousharmonique lorsque toute portion de la surface représentative de cette fonction est située au-dessous de la surface harmonique qui passe par le contour limitant cette portion ou coïncide avec elle; ou, plus généralement, lorsque la surface représentative est située au dessous de toute surface harmonique passant au-dessus du contour limite.

Une fonction convexe d'une variable est nécessairement continue dans l'intérieur de son intervalle de définition: il n'en est plus de même pour une fonction sousharmonique de deux variables. Les fonctions sousharmoniques de deux variables, continues par rapport à l'ensemble de ces variables, forment une classe particulière de fonctions sousharmoniques.

On a généralisé dans différentes directions, pour les fonctions de plusieurs variables, la notion de fonction convexe. Par exemple, on a considéré les fonctions de deux variables telles que toute section de la surface représentative $z = f(x, y)$ par un plan parallèle à l'axe des z soit une courbe

* PAUL MONTEL. — Ἐπὶ τῶν συναρτήσεων τῶν διπλῶς κυρτῶν καὶ τῶν συναρτήσεων τῶν διπλῶς ὑποαρμονικῶν.

convexe. De telles fonctions sont sousharmoniques et continues: on peut les appeler fonctions convexes de deux variables¹.

On a considéré aussi les fonctions pour lesquelles les sections parallèles aux plans des xz et des yz sont des courbes convexes: en d'autres termes, la fonction $f(x,y)$ est convexe en x , quel que soit y ; et convexe en y , quel que soit x . Nous avons appelé *doublement convexes* les fonctions de cette catégorie²; les fonctions convexes de deux variables du type précédent sont des fonctions doublement convexes mais la réciproque n'est pas vraie: par exemple, la fonction doublement convexe

$$z = x^2 + y^2 - 3xy$$

n'est pas convexe par rapport aux deux variables x et y , car la section de la surface par le plan $x=y$ est une courbe concave. Les fonctions doublement convexes s'introduisent naturellement dans l'étude du module des fonctions analytiques de deux variables complexes et d'autres problèmes relatifs à ces fonctions.

J'ai démontré qu'une fonction doublement convexe est sousharmonique³, la réciproque n'est pas exacte: la fonction sous-harmonique

$$z = 2x^2 - y^2$$

n'est pas doublement convexe.

2. M. Th. Varopoulos m'a posé la question de savoir si une fonction doublement convexe est continue par rapport à l'ensemble des variables (x,y) . Cette fonction est assurément continue par rapport à chacune des variables puisque les fonctions d'une variable obtenues en donnant à x ou à y une valeur constante sont convexes, et par conséquent continues. Mais il est nécessaire de démontrer que cette continuité partielle s'étend à l'ensemble des deux variables. Nous répondrons affirmativement à la question de M. Th. Varopoulos pour les points intérieurs au domaine de définition de la fonction. Après avoir donné la démonstration, je ferai quelques remarques sur les fonctions convexes considérées et leur extension.

¹ Voir, par exemple, HENRY BLUMBERG, On convex functions, *Transactions of the American Mathematical Society*, **20**, N° 1, p. 40-44, 1919, La définition de M. Blumberg est moins restrictive.—GEORGES VALIRON, Remarques sur certaines fonctions convexes, *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan*, **13**, 1931, série 3, N° 1, 19-38 1931.

² PAUL MONTEL, Sur les fonctions convexes et les fonctions sousharmoniques, (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1928, p. 29-60).

³ loc. cit. p. 37.

Soit $f(x,y)$ une fonction doublement convexe: nous allons établir que c'est une fonction continue de l'ensemble des variables (x,y) .

Désignons par $P_{h,k}$ le parabolöide hyperbolique dont les plans directeurs sont les plans des xz et des yz , et qui contient le quadrilatère ABCD ayant pour sommets les points

$$\begin{array}{ll} A [x,y, f(x,y)], & B [x+h, y, f(x+h,y)], \\ C [x,y+k, f(x,y+k)], & D [x+h, y+k, f(x+h, y, +k)], \end{array}$$

en supposant par exemple h et k positifs. Les axes étant rectangulaires, ce quadrilatère se projette sur le plan des xy suivant un rectangle de sommets a, b, c, d dont les côtés ont pour longueurs h et k . La portion de la surface (S) , représentative de la fonction $f(x,y)$, qui se projette à l'intérieur du rectangle est située au-dessous de $P_{h,k}$ ou sur ce parabolöide: il suffit, pour le voir de couper la surface et le parabolöide par des plans parallèles à l'un des plans directeurs. On peut remarquer aussi que la fonction linéaire en x et en y qui représente la cote d'un point du parabolöide est une fonction harmonique dont le contour, formé par le quadrilatère ABCD, est situé au-dessus de la surface (S) : or, $f(x,y)$ est une fonction sousharmonique, donc, dans l'intérieur du rectangle, les points de (S) ne sont pas au-dessus des points de $P_{h,k}$.

En remplaçant h par $-h$, et k par $-k$, on obtient des résultats analogues pour les points de (S) qui se projettent dans les rectangles symétriques de $abcd$ par rapport aux axes des x et des y . On voit donc que, dans le voisinage du point A, les points de (S) sont situés, par rapport aux surfaces des parabolöides $P_{h,k}$, du même côté que la demi-droite Az' parallèle à l'axe des z dans le sens des z négatifs. Si donc $f(x,y)$ n'était pas continue au point (x,y) , il existerait une suite infinie de points $D_n [h_n, k_n, f(h_n, k_n)]$ ayant pour limite un point A' de Az' situé au-dessous de A. Ne conservons, parmi les points D_n , que ceux pour lesquels h_n et k_n ont tous les mêmes signes; nous supposons par exemple que les h_n , comme les k_n , sont tous positifs.

Soit le parabolöide $P_{h,k'}$ correspondant à une valeur négative et fixe de k' . Je dis que les points de ce parabolöide sont au-dessous de $P_{h,k}$ ou sur $P_{h,k}$ pour les valeurs de X, Y , vérifiant les inégalités

$$x \leq X \leq x+h, \quad y \leq Y.$$

Il suffit, pour s'en assurer, de faire une figure, en remarquant que les

sections de (S) par des plans parallèles aux plans des xz sont des courbes convexes. Nous en donnerons une vérification analytique qui pourra s'étendre au cas d'une fonction de plus de deux variables. Désignons par $\Delta_h f(x,y)$ ou $\Delta_h, \Delta_k, \Delta_{hk}^2$, les différences première et seconde de $f(x,y)$ pour des accroissements h et k donnés à x et à y . L'équation du parabolôïde $P_{h,k}$ est

$$Z = z + \frac{\Delta_h}{h} (X - x) + \frac{\Delta_k}{k} (Y - y) + \frac{\Delta_{hk}^2}{hk} (X - x) (Y - y),$$

ou

$$Z - z + \frac{\Delta_h}{h} (X - x) + \frac{(Y - y)}{h} \left[(x + h - X) \frac{\Delta_k f(x,y)}{k} + (X - x) \frac{\Delta_k f(x + h, y)}{k} \right].$$

Si on donne à X, Y , des valeurs fixes vérifiant les inégalités

$$x \leq X \leq x + h, \quad y \leq Y,$$

on voit que Z est une fonction croissante de k , car les rapports $\frac{\Delta_k f(x,y)}{k}$ et $\frac{\Delta_k f(x + h, y)}{k}$ décroissent avec k , la fonction $f(x,y)$ étant convexe en y .

Soit D'_n le point du parabolôïde $P_{h_n, k'}$ qui a pour coordonnées h_n, k_n sur les axes des x et des y : le point D'_n est au-dessous de D_n , donc tous les points limites de la suite D'_n sont situés sur Az' et aucun n'est au-dessus de A' . Mais ce résultat est impossible, car le parabolôïde $P_{h_n, k'}$ a pour limite, lorsque n augmente indéfiniment, le parabolôïde $P_{0, k'}$ défini par la corde dont les extrémités sont A et le point $C' [x, y + k', f(x, y + k')]$ et par les demi-tangentes en A et C' aux sections de la surface par les plans $Y = y$ et $Y = y + k'$, dirigées dans le sens des x positifs. Dans ces conditions, la convergence des cotes de $P_{h_n, k'}$ et $P_{0, k'}$ étant uniforme dans le voisinage de A , le point D'_n a pour unique limite le point A . Il y a contradiction, donc $f(x,y)$ est continue.

On peut le voir autrement: le plan $X = x + h_n$ coupe la surface (S) suivant une courbe convexe; dans ce plan, la corde ayant pour équations

$$X = x + h_n \quad Z - z = \frac{\Delta_{k'}}{k'} f(x + h_n, y) (Y - y),$$

coupe la parallèle à Az' menée par D_n , au point

$$D'_n \left[x + h_n, y + k_n, z + k_n \frac{\Delta_{k'}}{k'} f(x + h_n, y) \right],$$

Or,

$$\frac{\Delta_{k'}}{k'} = \frac{f(x + h_n, y + k') - f(x + h_n, y)}{k'}$$

a pour limite $\frac{\Delta_{k'}}{k'}$, $f(x, y)$ car $f(x, y)$ est continue en x lorsque y est fixe, donc $k_n \frac{\Delta_{k'} f(x+h_n, y)}{k'}$ a pour limite zéro et D'_n a pour limite A .

Les raisonnements précédents supposent que le point A n'est pas situé à la frontière du domaine dans lequel $f(x, y)$ est définie. Dans ce cas, le résultat n'est plus exact. Prenons par exemple une demi-sphère (S) limitée par une circonférence (C) dont le plan est parallèle au plan des x, y . Déplaçons (C) parallèlement à l'axe des z et remplaçons-la par une circonférence (C') placée au dessus de (C) . La fonction $f(x, y)$ qui représente les cotes des points intérieurs à la demi-sphère (S) et celles des points de (C') est une fonction convexe en x et en y , et même convexe par rapport à l'ensemble x, y . Elle est discontinue en tout point de la frontière.

3. L'ensemble E_0 de toutes les fonctions sousharmoniques de deux variables contient un sous-ensemble E_1 formé par la réunion des fonctions sousharmoniques et continues. Cet ensemble E_1 contient le sous-ensemble E_2 des fonctions doublement convexes et l'ensemble E_2 contient le sous-ensemble E_3 des fonctions convexes de deux variables.

Chacun des ensembles E_0, E_1, E_2, E_3 , est invariant par rapport aux opérations de l'addition et du passage à la limite.

En d'autres termes, la somme d'un nombre fini ou d'un infinié dénombrable de fonctions appartenant à l'ensemble E_i ($i = 0, 1, 2, 3$) appartient aussi à l'ensemble E_i . Dans le cas où la somme contient une infinié de termes, la convergence est supposée uniforme pour les ensembles E_0 et E_1 . Pour les ensembles E_2 et E_3 , la convergence simple suffit.

Pour la démonstration, prenons par exemple deux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ appartenant à E_2 : Je dis que $f+g$ appartient à E_2 . En effet, $f(x, y_0)$ et $g(x, y_0)$ étant convexes en x , lorsque y_0 est fixe, leur somme $f(x, y_0) + g(x, y_0)$ est convexe en x ; de même, $f(x_0, y) + g(x_0, y)$ est convexe en y . Donc, $f+g$ est doublement convexe. Démontrons aussi que si $f_n(x, y)$ est doublement convexe et a pour limite $f(x, y)$ pour n infini, $f(x, y)$ est doublement convexe. En effet, $f_n(x, y_0)$ étant convexe en x , sa limite $f(x, y_0)$ est convexe en x ; de même, $f(x_0, y)$ est convexe en y .

On raisonnerait de la même manière pour des fonctions appartenant à l'ensemble E_3 . Si $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont convexes par rapport aux deux variables x, y , les fonctions $f(x, mx+h)$ et $g(x, mx+h)$ sont convexes en x

quelles que soient les valeurs des constantes m et h ; donc $f(x, mx+h) + g(x, mx+h)$ est convexe en x dans les mêmes conditions et $f+g$ est convexe en x, y . De même, si $f_n(x, y)$ est convexe par rapport à l'ensemble (x, y) et a pour limite $f(x, y)$, cette fonction appartient à E_3 car, $f_n(x, mx+h)$ étant convexe en x quel que soit n , $f(x, mx+h)$ est convexe en x dans les mêmes conditions.

Pour l'ensemble E_0 , la proposition est connue et pour l'ensemble E_1 , il suffit de remarquer que l'addition et la convergence uniforme conservent la continuité.

4. Dans chacun des ensembles E_i se trouvent des fonctions dont le logarithme possède la même propriété, fonctions qui interviennent fréquemment dans l'étude des fonctions analytiques. *Les fonctions dont le logarithme appartient à E_i forment un sous-ensemble e_i invariant par rapport à l'addition, la multiplication et la passage à la limite.*

Cette proposition résultera immédiatement du théorème suivant:

Pour que le logarithme d'une fonction positive $f(x, y)$ appartienne à l'ensemble E_i , il faut et il suffit, que $e^{\alpha x + \beta y} f(x, y)$ appartienne à cet ensemble quels que soient α et β .

Pour les ensembles E_0 et E_1 , j'ai démontré la proposition dans le cas où $f(x, y)$ admet des dérivées partielles des deux premiers ordres¹: elle a été étendue au cas général par M. T. Radó².

Considérons maintenant l'ensemble E_2 : il faut que $\log f(x, y)$ soit convexe en x et convexe en y . Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $e^{\alpha x} f$ soit convexe en x quel que soit y , donc aussi $e^{\alpha x + \beta y} f$; et que $e^{\beta y} f$ soit convexe en y quel que soit x , donc aussi $e^{\alpha x + \beta y} f$. Par conséquent, il faut et il suffit que $e^{\alpha x + \beta y} f$ appartienne à E_2 quels que soient α et β . En particulier, en faisant $\alpha = \beta = 0$, on voit que f appartient à E_2 . Donc e_2 est contenu dans E_2 .

Le raisonnement est tout à fait semblable pour les fonctions de l'ensemble E_3 .

Il résulte de la condition précédente que si f et g appartiennent à e_i , il en est de même de $f+g$; que si f_n appartient à e_i et a pour limite f , la fonction f appartient à e_i . D'autre part, d'après la définition même, si f et g

¹ Loc. cit. p. 39.

² T. RADÓ, Remarque sur les fonctions subharmoniques, *Comptes-Rendus des séances de l'Acad. des Sciences*, **186**, 1928, p. 346-348.

appartiennent à E_i , fg lui appartient aussi, car si $\log f$ et $\log g$ appartiennent à E_i , $\log f + \log g$ ou $\log (fg)$ appartient aussi à E_i .

5. Nous nous sommes bornés aux fonctions de deux variables; les résultats obtenus s'étendent aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Une fonction de p variables $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$, convexe par rapport à chacune d'elles, est continue par rapport à l'ensemble des p variables. Pour $p = 3$, par exemple, la démonstration est la même qu'au paragraphe 2, en remplaçant les paraboloides $P_{h,k}$ par les multiplicités correspondantes:

$$T = t + \frac{\Delta_h}{h} (X - x) + \frac{\Delta_k}{k} (Y - y) + \frac{\Delta_l}{l} (Z - z) + \frac{\Delta_{kl}^2}{kl} (Y - y) (Z - z) + \\ + \frac{\Delta_{lh}^2}{lh} (Z - z) (X - x) + \frac{\Delta_{hk}^2}{hk} (X - x) (Y - y) + \frac{\Delta_{hkl}^3}{hkl} (X - x) (Y - y) (Z - z);$$

$t = f(x, y, z)$ désignant l'équation de la surface (S) correspondant à la fonction $f(x, y, z)$.

Une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$, convexe par rapport à chaque variable, est sousharmonique par rapport à tout groupe de q de ces variables ($q \leq p$). La démonstration est tout à fait semblable à celle qui concerne le cas de deux variables. Par exemple, $f(x, y, z)$ est sousharmonique par rapport aux couples y, z ; z, x ; x, y ; et par rapport à l'ensemble des trois variables x, y, z . D'ailleurs, l'inégalité

$$f(x_0, y_0, z_0 + r \cos \vartheta) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0 + r \sin \vartheta \cos \varphi, y_0 + r \sin \vartheta \sin \varphi, z_0 + r \cos \vartheta) d\varphi,$$

relative à la fonction $f(x, y, z)$ sousharmonique en x, y , jointe à l'inégalité

$$f(x_0, y_0, z_0) \leq \frac{1}{2r} \int_{z_0-r}^{z_0+r} f(x_0, y_0, z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(x_0, y_0, z_0 + r \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta,$$

relative à la fonction $f(x_0, y_0, z)$ convexe en z , entraîne

$$f(x_0, y_0, z_0) \leq \frac{1}{4\pi} \iint f(x_0 + r \sin \vartheta \cos \varphi, y_0 + r \sin \vartheta \sin \varphi, z_0 + r \cos \vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta,$$

l'intégrale étant étendue à la sphère de rayon un. On en déduit que: *une fonction continue de trois variables, convexe par rapport à l'une d'elles et sousharmonique par rapport aux deux autres, est sousharmonique par rapport aux trois variables.*

6. Ce résultat conduit à énoncer des problèmes du type suivant: une

fonction continue de p variables, est sousharmonique par rapport à différents groupes de ces variables, dans quels cas pourra-t-on affirmer que cette fonction est sousharmonique par rapport à l'ensemble des p variables?

Le problème est aisé à résoudre lorsque la fonction f admet des dérivées secondes par rapport à chacune des variables.

Par exemple, si $f(x, y, z)$ est convexe en x, y, z , on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \geq 0,$$

on en déduit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \geq 0,$$

donc $f(x, y, z)$ est sousharmonique en x, y, z .

Si f est sousharmonique en $y, z; z, x; x, y$; on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geq 0,$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \geq 0,$$

et f est sousharmonique en x, y, z .

Si $f(x, y, z, t)$ est sousharmonique en x, y et en z, t , elle est sousharmonique en x, y, z, t car les inégalités

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \geq 0,$$

entraînent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \geq 0,$$

Pour passer au cas général où f est supposée seulement continue, nous utiliserons une transformation due à M. T. Radó¹.

Soit $f(x, y, z)$ une fonction continue dans un domaine (D) et soit (D') un domaine simplement connexe complètement intérieur à (D) : appelons ρ la distance des deux frontières. En chaque point A de (D') remplaçons f par sa valeur moyenne f_h dans un cube de centre A , d'arêtes parallèles aux axes, dont le côté a pour longueur $2h$ avec $h < \frac{\rho}{\sqrt{3}}$. On a:

$$f_h(x, y, z) = \frac{1}{8h^3} \iiint f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) d\xi d\eta d\zeta;$$

¹ loc. cit.

l'intégrale triple est étendue au volume du cube. La fonction $f_h(x, y, z)$ possède les propriétés suivantes faciles à vérifier :

1° f_h est continue dans (D') et admet des dérivées partielles du premier ordre;

2° f_h pour limite f lorsque h tend vers zéro et la convergence est uniforme dans (D') ;

3° f_h possède les mêmes propriétés de sousharmonicité que f , par rapport aux mêmes groupes de variables.

Répetons la même opération pour une fonction f_h considérée, dans un domaine (D') complètement intérieur à (D) et désignons encore par ϱ un nombre inférieur aux distances des frontières de (D) et de (D') et des frontières de (D) et de (D') . Soit $2h'$ la longueur du côté du cube relatif à f_h et supposons que l'on ait à la fois $h < \frac{\varrho}{\sqrt{3}}$ et $h' < \frac{\varrho}{\sqrt{3}}$. La valeur moyenne $F_{h'}$ de f_h possède les propriétés suivantes :

1° $F_{h'}$ est continue dans (D') et possède des dérivées partielles des deux premiers ordres;

2° $F_{h'}$ a pour limite f_h lorsque h' tend vers zéro et la convergence est uniforme dans (D') ;

3° $F_{h'}$ possède les mêmes propriétés de sousharmonicité que f , par rapport aux mêmes variables.

Donnons-nous un nombre positif ε arbitrairement petit, on peut lui faire correspondre un nombre h tel que

$$|f - f_h| < \varepsilon,$$

uniformément dans (D') , donc dans (D') . Prenons de même h' assez petit pour que l'on ait

$$|f_h - F_{h'}| < \varepsilon,$$

uniformément dans (D') On aura, dans le même domaine,

$$|f - F_{h'}| < 2\varepsilon.$$

Soit F_n une fonction correspondant à $\varepsilon = \frac{1}{2n}$, n désignant un entier naturel: la suite

$$F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$$

converge uniformément vers f dans (D') ; elle est composée de fonctions admettant des dérivées des deux premiers ordres et possédant les mêmes propriétés de sousharmonicité que f . Réciproquement, f possède les mêmes

propriétés d'harmonicité que les fonctions F_n de la suite, car ces propriétés se conservent à la limite.

On voit que, en répétant le même procédé on peut supposer que F_n admette des dérivées partielles d'ordre aussi élevé que l'on veut par rapport à chacune des variables.

Les propriétés établies au début de ce paragraphe sont vraies pour les fonctions F_n : elles sont donc vraies aussi pour la fonction f , dans (D'), donc dans (D).

On obtient aisément des propositions semblables en supposant f sousharmonique par rapport à certains groupes de variables et surharmonique par rapport à d'autres groupes. Par exemple, si $f(x, y, z)$ est sousharmonique en x, z et en y, z , et concave en z , f est sousharmonique en x, y, z . Si $f(x, y, z, t)$ est sousharmonique en x, y, z et en x, y, t , et surharmonique en x, y , f est sousharmonique en x, y, z, t .

7. Soit $\varphi(U)$ une fonction convexe de la variable U ; remplaçons U par une fonction harmonique $U(x, y, z)$ par exemple, définie dans un domaine (D). Supposons que les valeurs correspondantes de U demeurent dans l'intervalle de définition de la fonction $\varphi(U)$. La fonction $\varphi[U(x, y, z)]$ est sousharmonique dans (D)¹.

Voici une démonstration très simple de ce fait due à M. Pólya².

Si $\varphi(U)$ est convexe, on a

$$\varphi\left(\frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n}\right) \leq \frac{\varphi(U_1) + \varphi(U_2) + \dots + \varphi(U_n)}{n},$$

d'où l'on déduit

$$\varphi\left(\frac{1}{2\pi} \int U d\sigma\right) \leq \frac{1}{2\pi} \int \varphi(U) d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue à la surface d'une sphère de centre x_0, y_0, z_0 dont $d\sigma$ désigne l'élément d'aire. Si U désigne une fonction harmonique, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int U d\sigma = U(x_0, y_0, z_0),$$

donc

$$\varphi[U(x_0, y_0, z_0)] \leq \frac{1}{2\pi} \int \varphi[U(x, y, z)] d\sigma.$$

Par conséquent $\varphi[U(x, y, z)]$ est sousharmonique.

¹ Voir, P. MONTEL, loc. cit. p. 42.

² M. PÓLYA m'a communiqué cette démonstration dans une lettre du 26 juin 1930.

Réciproquement, si $\varphi(U)$ est sousharmonique et si U est harmonique, la fonction $\varphi(U)$ est convexe¹. Je donnerai une démonstration de cette réciproque due à M. S. Saks².

Supposons que, lorsque le point x, y, z varie dans (D) , U prenne des valeurs pour lesquelles $\varphi(U)$ est définie et continue: Si $\varphi(U)$ n'était pas convexe dans un intervalle, il existerait une corde de la courbe représentative telle que cette courbe ait des points au-dessus de la corde. Comme on peut ajouter à $\varphi(U)$ une fonction linéaire de U sans changer les conditions de l'énoncé, on peut supposer que cette corde soit située sur l'axe des U : soient a et b les abscisses des extrémités ($a < b$); le maximum de $\varphi(U)$ dans l'intervalle (a, b) est un nombre positif M ; on a d'ailleurs $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Soit c l'abscisse du premier point de (a, b) pour lequel $\varphi(c) = M$, c est distinct de a et de b et, dans l'intervalle (a, c) , on a toujours $\varphi(U) < M$. Il existe un point $A(x_0, y_0, z_0)$ intérieur à (D) tel que $U(x_0, y_0, z_0) = c$. La fonction harmonique U ne peut être maximum en x_0, y_0, z_0 ; elle prend donc, dans le voisinage de ce point, des valeurs voisines de c et inférieures à lui. Donc, en tous les points de la surface d'une sphère assez petite de centre A , on a

$$\varphi(U) \leq M,$$

et, en certains points de cette sphère, on a

$$\varphi(U) < M;$$

donc, la valeur M de $\varphi(U)$ en A ne peut être inférieure ni égale à la valeur moyenne de $\varphi(U)$ sur la sphère et la fonction $\varphi(U)$ ne serait pas sousharmonique.

Soit maintenant $\varphi(U, V)$ une fonction doublement convexe en U et V ; si on remplace U et V par des fonctions harmoniques $U(x, y)$, $V(z, t)$, la fonction $\varphi[U(x, y), V(z, t)]$ est sousharmonique en x, y et en z, t , donc elle est sous-harmonique en x, y, z, t .

Réciproquement, considérons une fonction des variables x, y, z, t , sousharmonique en x, y et en z, t . Supposons que cette fonction garde une valeur constante lorsque le point x, y est situé sur une courbe $U(x, y) = C^{\text{te}}$ et le point z, t sur une courbe $V(z, t) = C^{\text{te}}$, U et V étant harmoniques.

¹ Voir, P. MONTEL, loc. cit. p. 43.

² Sur un théorème de M. Montel (*Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 187, 1928, p. 276).

Alors cette fonction peut se mettre sous la forme $\varphi(U, V)$, φ désignant une fonction doublement convexe.

Prenons comme exemple, une fonction $F(u, v)$ des deux variables complexes $u = x + iy$, $v = z + it$, holomorphe dans un domaine. La fonction $|F(u, v)|$ est sousharmonique en x, y et en z, t , donc en x, y, z, t .

Soit $M(r, r')$ le maximum du module de F , lorsque $|u| \leq r$, $|v| \leq r'$, la fonction M est sousharmonique en x, y et en z, t , car c'est le maximum, en chaque point, des valeurs de $|F(ue^{i\vartheta}, ve^{i\vartheta'})|$ lorsque ϑ et ϑ' varient de 0 à 2π . Or, M est constante lorsque x, y décrit une circonférence $\log r = C^{te}$ et z, t une circonférence $\log r' = C^{te}$; donc $M(r, r')$ est une fonction doublement convexe de $\log r$ et de $\log r'$: elle est continue par rapport à l'ensemble (r, r') . D'ailleurs, comme $r^\alpha r'^\beta M(r, r')$ est aussi doublement convexe pour toute les valeurs de α et β , on voit que $\log M(r, r')$ est doublement convexe en $\log r, \log r'$.

ΦΥΣΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ. – Zur Dispersion von Salzlösungen. Eine Beziehung zwischen Dispersion und osmotischen Koeffizienten, von Georg Karagunis. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Ζέγγελη.

Gelegentlich von Konzentrationsbestimmungen von Elektrolytlösungen mit Hilfe des tragbaren Zeissinterferometers nach Haber-Löwe¹ beobachteten wir eine mit zunehmender Salzkonzentration stattfindende Wanderung des Nullstreifens des Interferenzsystems, welche wohl schon früher aufgefallen ist² und mit der verschiedenen Dispersion von Lösung und des zur Kompensation des Gangunterschiedes dienenden Glaskompensators, in Zusammenhang gebracht worden ist. In aller Kürze³ seien diese Wanderungen folgendermassen erläutert:

Durch Überlagerung der roten (I) und blauen (II) Interferenzstreifen entsteht das im weissen Licht beobachtete Streifensystem (III) mit seinem farblosen Nullstreifen AB und den farbigen Streifen höherer Ordnung BC, AE u. s. v. Durch Verkürzung der optischen Weglänge, bei Einschalten einer Lösung mit grösserem Brechungsindex als Wasser, werden die Streifen nach rechts verschoben und zwar nach Massgabe der Dispersion

¹ F. HABER und F. LÖWE, *Z. f. Instrumentenkunde*, **30**, 1910, S. 321.

² R. MARC, *Chemiker-Ztg.* 1912, S. 537.

³ G. KARAGUNIS, A. HAWKINSON und G. DAMKÖHLER, *Z. f. Phys. Chem. Abt. A* 151 S. 448, 1930. Dort ist eine ausführliche Darstellung gegeben.