des ursprünglichen Volumens, zum Nachweis des Acetons genommen.

Beim Auftreten einer Rotfärbung, welche eine Zeit lang von über 10 Sekunden bestehen bleibt, schliesst man für die Gegenwart von Aceton auf, weil bei unvollkommen rektifiziertem Alkohol, durch Zusatz von Eisessig, nur eine Rosafärbung auftritt, welche im Verlauf von 5 bis 10 Sekunden verschwindet.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.—Sur un paradoxe mécanique*, *par* ***Maurice Fréchet.***
Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Π. Ζερβοῦ.

Une réciproque inexacte.—Nous avons fait observer ailleurs[1] que la réciproque d'une propriété classique du wronskien est inexacte. A cet effet, nous avons donné[1] un exemple rappelé plus loin, montrant que le wronskien

$$\delta[y_1, y_2, \ldots y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \ldots & \frac{dy_n}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} & \ldots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

de n fonctions $y_1, y_2, \ldots y_n$ peut-être nul en tout point d'un intervalle I, sans qu'il existe des constantes non toutes nulles $C_1, C_2, \ldots C_n$ telles que l'on ait $C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) = 0$ sur *tout* l'intervalle I[(2)]. Et, bien que la réciproque ait un sens en supposant seulement l'existence en chaque point de I des dérivées qui figurent dans le wronskien, nous avons montré qu'on peut choisir l'exemple parmi des fonctions indéfiniment dérivables. Au contraire la réciproque deviendrait exacte[1] si l'on supposait les y holomorphes sur I.

Une exception cinématique.—Pourtant cette réciproque inexacte est utilisée fréquemment, par exemple, en Mécanique. On y admet généralement que si un point mobile (x, y) obéit dans un plan à la loi des aires et si sa vitesse initiale est nulle ou passe par le centre des aires ce mobile reste nécessairement sur la droite qui joint le centre des aires à la position ini-

* MAURICE FRÉCHET.—Ἐπὶ ἑνὸς μηχανικοῦ παραδόξου.

[1] Sur la limitation des conséquences de l'évanouissement d'un wronskien, *Bulletin mathématique des Facultés des Sciences*, 1937.

[2] Voir aussi: J. HADAMARD, Cours d'Analyse, t. II, 1930, p. 364.—P. APPELL-S. DAUTHEVILLE, Précis de Mécanique, Paris, 1918, p. 234.

tiale. En prenant le eentre des aires pour origine et en appelant t le temps, c'est dire que:

Si $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} =$ constante, et si, de plus cette constante est nulle, il existe entre x et y une relation à coefficients constants non tous deux nuls $ax + by = 0$ verifiée quelque soit t.

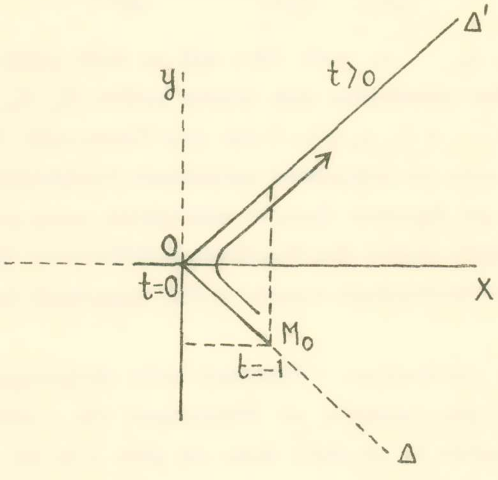
L'exemple mentionné plus haut et rappelé ci-dessous montre qu'il n'en est pas nécessairement ainsi, même si l'on suppose que les coordonnées x et y sont indéfiniment dérivables par rapport au temps. En prenant

$$x = u(t), \quad y = v(t), \qquad v(t) = u(t) \text{ pour } t > 0$$

$$v(t) = -u(t) \text{ pour } t \leqslant 0,$$

$$u(t) = e^{-\frac{1}{|t|}} \text{ pour } t \neq 0, \quad u(0) = 0$$

le point x, y *obéira à la loi des aires et aura*, par exemple pour $t = -1$, *une vitesse initiale dirigée vers le centre* O *des aires. Pourtant, il va décrire*, *non une ligne droite, mais un crochet* composé d'un segment M_0O décrit pour $-1 \leqslant t \leqslant 0$ et d'une demi-droite $O\Delta'$ (symétrique par rapport à Ox de la demi-droite $O\Delta$ qui porte OM_0) décrite pour $t \geqslant 0$:



C'est là une solution possible du point de vue cinématique.

Conservation partielle de la réciproque.— Nous avons montré[1] que si la réciproque contestée est inexacte, on peut cependant en conserver un résultat partiel:

Si le wronskien $\delta[y_1, \dots y_n]$ est nul sur un segment σ, il existe une

[1] Voir n. I.

suite finie ou infinie de sous-segments de σ: $S, S_1, \ldots S_p, \ldots$ ne chevauchant pas et tels que:

1° Les y soient liés sur chaque S_p par une dépendance linéaire.

2° Si deux S_p sont contigus, soient S_p et S_q il n'existe pas une même dépendance linéaire entre les y sur le segment formé de S_p et de S_q.

3° Tout point n'appartenant à aucun des S_p est point limite d'une infinité des S_p.

4° En un tel point, l'un au moins des wronskiens de moins de n des fonctions y est nul.

Dans le cas de $n=2$, un wronskien de moins de deux des fonctions y_1, y_2 ne peut-être nul en un point que si y_1 ou y_2 est nul en ce point. Si $x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}$ reste nul de $t=\alpha$ à $t=\beta$, on peut écrire $\varrho^2\frac{d\vartheta}{dt}=0$ et si à un instant t_0, ϱ est $\neq 0$, tant que ϱ ne sera pas devenu nul, θ sera constant. Donc x et y seront liés par une *même* relation linéaire tant que x et y ne s'annulleront pas *simultanement.*

Interprétation cinématique.— Traduits ici en langage cinématique ces résultats s'expriment ainsi:

Si un point mobile M: x(t), y(t), obéit à la loi des aires dans un intervalle de temps $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ et si sa vitesse initiale est nulle ou dirigée vers le centre des aires O:

D'une part, il est inexact d'en conclure que si le point ne reste pas immobile, il va rester sur une droite fixe de $t=\alpha$ à $t=\beta$.

D'autre part, cependant, on peut affirmer que dans l'intervalle de temps $\alpha\beta$ il existe une suite finie ou infinie d'intervalles de temps $S, S_1, \ldots S_p, \ldots$ ne chevauchant pas et tels que:

1° Dans chaque intervalle S_p, M reste en O ou reste sur une droite fixe M partant de O au début de S_p pour revenir en O à la fin de S_p.

2° Si deux des intervalles, soient S_p et S_q, sont contigus on ne peut les remplacer par un seul, c'est à dire que: M ne peut rester au repos pendant S_p et pendant S_q et M ne peut se déplacer sur une droite pendant S_p et encore la même pendant S_q.

3° Une position qui n'est prise dans aucun des intervalles S_p est nécessairement confondue avec l'origine.

Inversement, pour tout mouvement de cette nature, $x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}$ reste nul pendant (α, β).

Tel serait, par exemple, le mouvemeut d'un point $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$ avec

$$\theta = \theta_n.$$

$$\varrho = \frac{1}{2^n}\left\{\sin^2\left[\left(t - 1 + \frac{1}{2^n}\right)2^{n+1}\pi\right]\right\}$$

pour

$$1 - \frac{1}{2^n} \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

On peut supposer que $2\pi\theta_1$, $2\pi\theta_2, \ldots 2\pi\theta_n, \ldots$ est la suite des nombres rationnels compris entre zéro et un.

On voit que x, y seront dérivables pour $0 < t < 1$ et tels que $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$ reste nul. Pourtant le mobile va décrire une sorte d'étoile, parcourant (aller et retour) une suite de segments de longueurs décroissantes issues de l'origine et dont les directions sont respectivement aussi proches que l'on voudra de toutes les directions possibles. En remplaçant dans l'expression de ϱ le carré du sinus par son cube, on aurait pour x, y des fonctions ayant chacune une dérivée seconde même à l'origine, c'est-à-dire que *le mobile aurait une accélération déterminée et continue même en passant d'un rayon vecteur à un autre.* Mais, naturellement, à ces moments l'accélération serait nulle de même que la vitesse.

On pourrait même modifier cet exemple de façon à rendre x et y indéfiniment dérivables.

Interprétation dynamique. — Délaissant la cinématique (où ces mouvements si singuliers sont compatibles avec l'identité $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 0$) pour la dynamique, on peut réduire la possibilité de ces mouvements paradoxaux en faisant appel à un principe d'inertie entendu de la façon suivante:

Si la résultante F des forces agissant sur un mobile est nulle à un instant où la vitesse de ce mobile est nulle, le mobile restera en équilibre c'est-à-dire au repos. (Ceci sous une réserve précisée plus loin.)

Or $F = m\gamma$, m étant la masse de la particule et γ son accélération: Quand γ et v seront simultanément nuls, F sera aussi nul, le mobile devra rester ultérieurement au repos.

Quand on sait que $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}$ reste nul, alors tant que M se déplace sans passer par O, il reste sur une droite fixe; il ne peut quitter celle-ci qu'en passant par O. Si à ce moment il devait repartir sur une autre droite sa vitesse devrait être nulle pour ne pas être dirigée au même instant sur deux directions différentes; il en serait de même de son accélération, et alors en vertu du principe de l'inertie, le mobile devrait s'arrêter.

Mais ce principe d'inertie ne peut-être accepté sans limitation. Si un mobile est au repos en O et si la résultante des forces qui agissent sur lui appartient à un champ de force, le principe est admissible. Il ne l'est pas en général, car on peut toujours susciter une nouvelle force qui, agissant sur un point au repos et initialement nulle, le met cependant en mouvement.

Dès lors, nous aurons réduit en dynamique la possibilité des mouvements paradoxaux signalés en cinématique, en disant :

Quand la résultante F des forces agissant sur un mobile M est une force centrale issue d'un point O *et dépendant d'un champ de forces,* alors, quand le mobile est initialement au repos ou quand sa vitesse initiale est dirigée vers le centre des aires, il restera en repos au point O ou il restera constamment dans la suite sur la droite joignant au point O sa position initiale.

On pourrait d'ailleurs généraliser au cas où la force centrale, supposée indépendante du temps, dépend non seulement de la position du mobile mais aussi de sa vitesse, pourvu que la force s'annule encore au point O quand le mobile y a une vitesse nulle.

Nous venons d'indiquer un moyen de rétablir un énoncé classique. Mais peut-être, au contraire, conviendrait-il de renoncer à celui-ci si l'on se songe à l'opinion de M. Béghin suivant laquelle, quand des postulats ont été introduits en dynamique pour écarter la possibilité de mouvements jugés paradoxaux, ceux-ci se sont souvent révelés, plus tard, voisins de certains mouvements réels.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς τὴν Μηχανικὴν χρησιμοποιεῖται συνήθως ἡ ἑξῆς πρότασις: «Ἔστω ὅτι κινητὸν κινεῖται ἐν ἐπιπέδῳ συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τῶν ἐμβαδῶν καὶ ὅτι ἡ ἀρχικὴ του ταχύτης εἶναι μηδὲν ἢ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῶν ἐμβαδῶν τότε τὸ κινητὸν τοῦτο μένει κατ' ἀνάγκην ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὸ κέντρον τῶν ἐμβαδῶν μὲ τὴν ἀρχικὴν θέσιν». Ὁ συγγραφεὺς παρατηρεῖ ὅτι παραδόξως ἡ πρότασις αὕτη δὲν ἰσχύει πάντοτε. Ἤτοι ὅτι: «ἐὰν λάβωμεν ὡς ἀρχὴν O τὸ κέντρον τῶν ἐμβαδῶν καὶ ἐὰν $x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 0$ δὲν ἕπεται κατ' ἀνάγκην ὅτι ὑπάρχει ἰσότης τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta y = 0$ μὲ σταθεροὺς συντελεστὰς α, β οὐχὶ ἀμφοτέρους ἴσους πρὸς τὸ μηδέν, ἐπαληθευομένη διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ t».

Γενικώτερον ἔχει παρατηρήσει ὁ συγγραφεὺς ὅτι δυνατὸν ἡ βρονσκιανὴ ὁρίζουσα $\delta[y_1, y_2, \ldots y_n]$ νὰ εἶναι μηδὲν διὰ πᾶν σημεῖον διαστήματός τινος I χωρὶς νὰ ὑπάρχωσι σταθεραὶ $C_1, C_2, \ldots C_n$ οὐχὶ πᾶσαι ἴσαι πρὸς τὸ μηδὲν τοιαῦται ὥστε ἡ σχέσις

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \quad 0$$

νὰ ἰσχύῃ ἐφ' ὅλου τοῦ διαστήματος I. Ἵνα ὑπάρχωσι τοιαῦται σταθεραὶ ἔδωκεν ὁ συγγραφεὺς καταλλήλους συνθήκας.

Οὕτω διὰ τὴν ἐν ἀρχῇ θεωρηθεῖσαν μερικὴν περίπτωσιν δίδει ὁ συγγραφεὺς πρότασιν μὲ κινηματικὴν ἑρμηνείαν καθ' ἣν ἐὰν κινητὸν ἀκολουθῇ τὸν νόμον τῶν ἐμβαδῶν εἰς χρονικὸν διάστημα $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ καὶ ἐὰν ἡ ἀρχικὴ ταχύτης εἶναι μηδὲν ἢ διευθύνεται πρὸς τὸ κέντρον O ἀφ' ἑνὸς δὲν ἕπεται ἀπαραιτήτως ὅτι ἐὰν τὸ M δὲν μένῃ ἀκίνητον θὰ μένῃ ἐπὶ σταθερᾶς εὐθείας κατὰ τὸν χρόνον t ὅπου t μεταβάλλεται ἀπὸ α ἕως β· ἀφ' ἑτέρου ἀληθεύει ὅτι διὰ τὸ χρονικὸν διάστημα αβ ὑπάρχει ἀκολουθία πεπερασμένη ἢ ἄπειρος χρονικῶν διαστημάτων $S, S_1, \ldots S_p, \ldots$ τοιαύτη ὥστε εἰς ἕκαστον τούτων S_p τὸ M μένει εἰς τὸ O ἢ μένει ἐπὶ σταθερᾶς εὐθείας τοῦ M ἀναχωροῦντος ἀπὸ τοῦ O κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ S_p διὰ νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ O εἰς τὸ τέλος τοῦ S_p καὶ ὅτι ἐὰν S_p καὶ S_q εἶναι δύο χρονικὰ διαστήματα συνεχόμενα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κινεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας κατὰ τὸ S_p καὶ κατὰ τὸ S_q οὐδὲ εἶναι δυνατὸν τὸ M νὰ εἶναι ἐν ἠρεμίᾳ δι' ἀμφότερα τὰ χρονικὰ διαστήματα· θέσις μὴ ἀνήκουσα εἰς κανὲν διάστημα S_p συμπίπτει κατ' ἀνάγκην μὲ τὸ O.

Δίδει δὲ ὁ συγγραφεὺς καὶ σχετικὸν παράδειγμα ὅπως ἐπίσης δίδει καὶ δυναμικὴν ἑρμηνείαν.