tes chars, tes chevaux, tes soldats, ton pays et pour tout ce qui t'appartient....».

Tatuhepa la fille de Dušratta est citée tout de suite après Tiyi et avant les autres épouses. S'il y avait une reine en Égypte et que celle-ci ne fût pas la fille du roi de Mittanni, celui-ci n'aurait-il pas en un mot pour la saluer? Plusieurs historiens ont accepté directement le témoignage de la lettre de Dušratta; d'autres n'ont pas voulu le comprendre dans le sens indiqué. Cependant il existe un argument, nouveau autant que je sache, et qui dérive du nom même de la reine Nefertiti. Ce nom doit se traduire «la belle qui est venue».

Nous savons par la stèle de Bekhten et par des textes historiques du temps de Ramsès II que lorsque le pharaon élevait une princesse étrangère au rang de reine on lui faisait un nom à la manière d'Égypte. La stèle de Bekhten parle expressément de la princesse lointaine: «Elle était extrêmement belle pour le cœur de Sa Majesté et au delà de tout. Alors on lui imposa sa titulature: «Grande épouse royale Nefroure». Et lorsque Sa Majesté arriva en Égypte elle remplit toutes les fonctions d'une épouse royale». Ainsi donc, lorsque Tatuhepa fille de Dušratta était arrivée, de même, de son pays pour devenir l'épouse d'Aménophis IV, on lui avait donné sa titulature et on lui avait fait son nom à l'égyptienne. Peut-on imaginer un nom plus approprié et plus flatteur que celui de Nefert-iti «la belle qui est venue»?

Je crois que cette remarque est d'un poids suffisant pour dissiper l'incertitude que professent certains à l'égard de l'identification de Tatuhepa de Mittanni avec Nefertiti, l'épouse bien-aimée d'Akhenaten-Aménophis IV. Il faudrait trouver une généalogie formelle de la reine, montrant sa descendance égyptienne, pour renverser cette manière de voir. Le poids de la démonstration repose désormais sur ceux qui nieraient son origine étrangère.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.— Περί τινων σημείων τῆς απαλοιφῆς*, *ὑπὸ* ***Θ. Βαροπούλου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. Θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν $f(z) = u$

ὅπου f εἶναι μονότιμος ἀναλυτικὴ συνάρτησις· εἶναι γνωστὸν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν σχέσεων τῆς μορφῆς,

$$u = c$$

* TH. VAROPOULOS.— Sur quelques points de l'élimination.

ὅπου c σταθερά, διὰ τὰς ὁποίας αἱ ἐξισώσεις

$$\begin{cases} f(z) = u \\ u = c \end{cases}$$

ἔχουν πεπερασμένον πλῆθος κοινῶν ριζῶν ὡς πρὸς u, εἶναι, τὸ πολύ, *ἕν* διὰ f ἀκεραίας, καὶ *δύο* διὰ f μερομόρφους.

Εἶναι ἡ γνωστὴ περίπτωσις τοῦ θεωρήματος τοῦ E. Picard[1].

Τὰ αὐτὰ ἐξαγόμενα ἰσχύουν, ὅταν ἀντὶ τοῦ c ληφθῇ συνάρτησις *ρητὴ* ὡς πρὸς z, ἢ τάξεως μικροτέρας τῆς τάξεως τῆς f(z), συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ E. Borel[2].

Ἐάν, ἀντὶ τῆς ἐξισώσεως u=f(z), πρωτοβαθμίου πρὸς u, ληφθῇ ἐξίσωσις μορφῆς

$$f_0(z)u^\nu + f_1(z)u^{\nu-1} + \cdots + f_\nu(z) = 0 \qquad (1),$$

εἰς τρόπον ὥστε ἡ $u = \varphi(z)$ εἶναι πλειονότιμος συνάρτησις τοῦ z, τότε ὡς γνωστόν[3], αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$(2) \qquad a_0(z)u + a_1(z) = 0$$

ὅπου $a_0(z)$, $a_1(z)$ εἶναι πολυώνυμα, τοιαῦται ὥστε αἱ (1), (2) νὰ ἔχουν πεπερασμένον πλῆθος ριζῶν πρὸς u, εἶναι εἰς πλῆθος πεπερασμένον *μὴ ὑπερβαῖνον τὸν 2ν*

2. Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως (2) ὁριζόμεναι συναρτήσεις u(z) εἶναι *μονότιμοι*, ἑπομένως, εἶναι φυσικὸν νὰ ζητηθῇ νὰ γίνῃ ἡ μελέτη τοῦ γενικωτέρου ζητήματος, ἀναφερομένου εἰς τὰς ἀλγεβρικὰς συναρτήσεις, τὰς δεχομένας κριτικὰ σημεῖα, αἵτινες ὁρίζονται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως:

$$a_0(z)u^k + a_1(z)u^{k-1} + \cdots + a_k(z) = 0, \qquad a_i(z) \text{ πάντα πολυώνυμα.}$$

Τὸ πρόβλημα τὸ ὁποῖον τίθεται εἶναι τὸ ἑξῆς:

Δίδεται τὸ πολυώνυμον

$$F(z,u) \equiv g_0(z)u^n + g_1(z)u^{n-1} + \cdots + g_{n-1}(z)u + g_n(z) \qquad (3),$$

οὗτινος εἷς τοὐλάχιστον τῶν συντελεστῶν $g_0, g_1, .., g_n$ *εἶναι συνάρτησις ὑπερβατικὴ τοῦ z.*

Δίδεται, ἐπὶ πλέον, τὸ πολυώνυμον

$$f(z,u) \equiv a_0(z)u^k + a_1(z)u^{k-1} + \cdots + a_{k-1}(z)u + a_k(z) \qquad (4),$$

οὗτινος οἱ συντελεσταὶ $a_0, a_1, \ldots, a_k$ *εἶναι πάντες πολυώνυμα ὡς πρὸς z.*

---

[1] *Annales de l'École normale Supérieure*, 2e serie, **9**, 1880, p. 145.

[2] G. Rémoundos: Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes, Thèse-Paris, 1905.

[3] E. Borel: Leçons sur les fonctions entières, Paris, Gauthier Villars, 1922.

Ζητεῖται τὸ πλῆθος τῶν πολυωνύμων f(z,u) *τοιούτων ὥστε αἱ ἐξισώσεις*

$$\begin{cases} F(z,u)=0 \\ f(z,u)=0 \end{cases}$$

νὰ ἔχουν πεπερασμένον πλῆθος ριζῶν κοινῶν ὡς πρὸς u.

3. Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ ὑπὸ τῆς $f(z,u)=0$ ὁριζόμεναι ἀλγεβρικαὶ συναρτήσεις $u=\varphi(z)$ δέον νὰ ὑποτεθῶσιν διακεκριμέναι.

Εἰς τὴν περίπτωσιν, λόγου χάριν, καθ' ἣν $n=2$, $k=3$, ὑποθέτομεν ὅτι, διὰ τὰς θεωρουμένας ἀλγεβρικὰς συναρτήσεις, δὲν ὑπάρχει σχέσις τῆς μορφῆς.

$$\sum_i \lambda_i \big(a_i(z)u^3+\beta_i(z)u^2+\gamma_i(z)u+\delta_i(z)\big)^2=0$$

λ_i εἶναι σταθεραὶ ποσότητες.

Ἡ μέθοδος ἡ ἀκολουθητέα διὰ τὴν λύσιν τοῦ ὡς ἄνω προβλήματος εἶναι διπλῆ:

1. Νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν συνάρτησιν $u(z)$, ἣν ὁρίζει ἡ $f(z,u)=0$, καὶ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις

$$F(z,u(z))$$

ἔχει πεπερασμένον πλῆθος ριζῶν ὡς πρὸς z. τότε θὰ ἔχωμεν

$$F(z,u(z))\equiv p(z)e^{\varphi(z)}$$

ὅπου $p(z)$ εἶναι πολυώνυμον.

Ἵνα ὅμως δυνηθῶμεν νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ταυτότητα τοῦ E. Borel[1], εἶναι *ἀναγκαῖον* νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ συνάρτησις $\varphi(z)$ *ἔχει πεπερασμένον πλῆθος κλάδων.*

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης φαίνεται νὰ παρουσιάζῃ δυσχερείας, ἅς δὲν κατωρθώθη νὰ ὑπερπηδήσωμεν.

2. Νὰ θεωρήσωμεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς τῆς u μεταξὺ τῶν

$$F(z,u)=0 \quad \text{καὶ} \quad f(z,u)=0,$$

ὅπερ εἶναι πολυώνυμον τῶν $g_0, g_1, \ldots, g_n$ βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν $g_0, g_1, \ldots, g_n$ μεταξὺ $n+1$ τοιούτων ἐξισώσεων δὲν φαίνεται εὐχερής, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ ταυτότης τοῦ E. Borel, λόγῳ τοῦ ὅτι ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς $g_i(z)$ ἀναβιβάζεται.

4. Ὅ,τι ὅμως δὲν συμβαίνει με τὰς $g_0(z), g_1(z), \ldots, g_n(z)$, ἐπιτυγχάνεται, ἂν εἰς τὴν θέσιν τῶν $g_i(z)$ τεθῶσιν βοηθητικαὶ συναρτήσεις $G_i(z)$, αἵτινες εἶναι ἐκφράσεις τῶν $g_i(z)$ ὑπὸ μορφὴν ὁριζουσῶν τάξεως $k>1$.

[1] Sur les zéros des fonctions entières. *Acta Mathematica*, **20**, 1897.

Τὰς ὁριζούσας ταύτας σχηματίζομεν, ἂν θεωρήσωμεν τὴν ὁρίζουσαν τοῦ Sylvester τῶν δύο πολυωνύμων (3), (4):

$$\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & \cdots & \cdot\cdot & g_n & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \cdots \\ \cdots & & & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & g_n \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_k & \cdot\cdot & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & \cdots & \cdot\cdot & a_k & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdot\cdot & a_0 & a_1 & \cdots & a_k \end{vmatrix}$$

ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι μορφῆς $p(z)e^{\varphi(z)}$, ὅπου $\varphi(z)$ ἔχει προφανῶς πεπερασμένον πλῆθος κλάδων. Εἶναι συνάρτησις μονότιμος.

Ὡς ὁριζούσας $G_i(z)$ λαμβάνομεν τὰς ὁριζούσας, πλήθους C^k_{n+k}, ἃς σχηματίζομεν ἐκ τῶν k πρώτων γραμμῶν, συνδυάζοντες τὰς $n+k$ στήλας ἀνὰ k.

Αἱ ὁρίζουσαι $G_i(z)$ *δὲν δύνανται νὰ ὦσιν πᾶσαι ἀλγεβρικαὶ συναρτήσεις. Μία τούτων τουλάχιστον εἶναι ἀναγκαίως συνάρτησις ὑπερβατική.*

Ὑπὸ τὰς ὡς ἄνω συνθήκας εἶναι εὔκολον νὰ βεβαιώσωμεν τὰς ἑξῆς προτάσεις:

α') Τὸ πλῆθος τῶν πολυωνύμων (4), διὰ τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις τοῦ Sylvester (5) εἶναι πολυώνυμον, ἀνέρχεται τὸ πολὺ εἰς $C^k_{n+k}-1$.

β') Τὸ πλῆθος τῶν πολυωνύμων (4), δι' ἃ τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ u, μεταξὺ τῶν πολυωνύμων (3), (4), εἶναι συνάρτησις τῆς μορφῆς

$$p(z)e^{\varphi(z)},$$

p πολυώνυμον καὶ $\varphi(z)$ μονότιμος συνάρτησις, ἀνέρχεται τὸ πολὺ εἰς $C^k_{n+k}-1$.

5. Ἡ ὡς ἄνω ἄρα παρουσιαζομένη δυσχέρεια αἴρεται, ἐὰν *τὴν ὁρίζουσαν* (5) *τοῦ Sylvester ἀναπτύξωμεν κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Laplace,* ἔχομεν δὲ οὕτω τὸ ἀνώτερον ὅριον τοῦ πλήθους τῶν πολυωνύμων $f(z, u)$, διὰ τὰ ὁποῖα αἱ ἐξισώσεις

$$\begin{cases} g_0u^n + g_1u^{n-1} + g_2u^{n-2} + \cdots + g_{n-1}u + g_n = 0 \\ a_0u^k + a_1u^{k-1} + a_2u^{k-2} + \cdots + a_{k-1}u + a_k = 0 \end{cases}$$

ἔχουν, ὡς πρὸς u, πεπερασμένον πλῆθος κοινῶν ριζῶν· ἡ ταυτότης τοῦ Borel εἶναι ἐφαρμόσιμος. Ἔχομεν οὕτω ἀποδείξει τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Θεωρήσωμεν τὸ πολυώνυμον, βαθμοῦ n πρὸς u,

$$(\alpha) \qquad g_0(z)u^n + g_1(z)u^{n-1} + \cdots + g_{n-1}(z)u + g_n(z),$$

οὗτινος εἰς τουλάχιστον τῶν συντελεστῶν εἶναι ὑπερβατικὴ συνάρτησις, καὶ λάβωμεν τὰ πολυώνυμα

$$(\beta) \quad a_0(z)u^k + a_1(z)u^{k-1} + \cdots + a_{k-1}(z)u + a_k(z),$$

βαθμοῦ k πρὸς u, τῶν ὁποίων οἱ συντελεσταὶ εἶναι πάντες πολυώνυμα πρὸς z.

Τὸ πλῆθος τῶν πολυωνύμων (β), τοιούτων ὥστε τὰ πολυώνυμα (α), (β) νὰ ἔχουν πεπερασμένον πλῆθος κοινῶν ριζῶν ὡς πρὸς u, δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν ἀριθμὸν

$$2^{\left\{ C^k_{n+k} - 1 \right\}}.$$

Τὸ ὡς ἄνω ὅριον διὰ $k = 1$ γίνεται $2n$, καὶ συμπίπτει μὲ τὸ ὑπὸ τῶν P. Painlevé καὶ Ρεμούνδου ὑπολογισθὲν ἀνώτερον ὅριον τῶν ἐξαιρετικῶν τιμῶν[1] μιᾶς πλειονοτίμου συναρτήσεως μὲ n κλάδους.

RÉSUMÉ

Nous traitons le problème suivant: *Étant donné une fonction analytique, à n branches, definie par une équation de la forme:*

$$g_0(z)u^n + g_1(z)u^{n-1} + \cdots + g_n(z) = 0;$$

dont les coefficients ne sont pas tous des polynomes; une au moins des fonctions $g_0, g_1, \ldots, g_n$ est une fonction transcendante.

Quel est le nombre des fonctions algébriques exceptionnelles, definies par les équations

$$a_0(z)u^k + a_1(z)u^{k-1} + \cdots + a_k(z) = 0;$$

K étant fixe et supérieur à l'unité?

Nous obtenons la proposition suivante:

Le nombre des polynomes en u, de la forme:

$$a_0(z)u^k + a_1(z)u^{k-1} + \cdots + a_k(z);$$

$a_0, a_1, \ldots, a_k$ étant tous des polynomes en z, *tels que les équations*

$$\begin{cases} g_0(z)u^n + g_1(z)u^{n-1} + \cdots + g_n(z) = 0; \\ a_0(z)u^k + a_1(z)u^{k-1} + \cdots + a_k(z) = 0; \end{cases}$$

aient un nombre fini des racines communes en u, ne peut dépasser

$$2^{\left\{ C^k_{n+k} - 1 \right\}};$$

n désignant le nombre des déterminations de la transcendante, et K celui des déterminations de la fonction algébrique considerée.

[1] G. Rémoundos, Thèse, loc. cit. 1905.