2. LERICHE: «Sur l'étude expérimentale, la technique et quelques indications nouvelles de la sympathectomie périartérielle». La Presse Médical N° 102. 1922.
3. PIETRI: «Contribution clinique à l'étude de la sympathectomie périartérielle». Archivio Italiano di chirurgia. f. 4. Octobre 1925. (cité par Ichok).
4. FRIEDRICH: «Was geht in einer Extremität nach der périarteriellen sympathektomie vor sich?» Klin. Wochensch. 1924. N° 45. T. III. (cité par Ichok).
5. VILLARDEL: «Sympathectomie périartérielle». Presse Médicale N° 11. Février 1926.
6. ICHOK: «La valeur de la sympathectomie périartérielle dans le traitement de la tuberculose ostéoarticulaire». Presse Médical N° 28. Avril 1926.
7. J. DIEZ: «Traitement des affections trophiques des membres inférieurs, par la résection du sympathique lombo-sacré». Société de Neurologie 4 Février 1926. In Revue Neurologique N° 2. 1926. T. I.
8. LAIGUEL et LAVASTINE: «Pathologie du Nerf grand sympathique». 'Εν τῷ Traité de Médecine Gilbert et Carnot Paris 1924.
9. BABINSKI et FROMENT: «Hystérie — Troubles nerveux refléxes» Paris 1918.
10. FRANÇOIS FRANK: «Travaux de laboratoire» Paris 1904.

SUR QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES[1]

PAR M. SPYRIDION SARANTOPOULOS

(présentée par Mr G. Rémoundos)

1. EULER a donné, comme il est bien connu, un exemple célèbre d'intégration d'une équation différentielle, à l'aide d'un artifice, auquel son nom est resté attaché. Cette équation, qui a été le point de départ de la théorie des fonctions elliptiques, est:

$$\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = 0 \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ sont deux polynomes du quatrième degré en x et y ayant les mêmes cœfficients.

La decouverte fondamentale d'EULER consiste en ce qu'il a montré que l'intégrale générale de l'équation différentielle (1) qui paraît être transcendante si l'on fait l'intégration par partie, est, en réalité, algébrique; elle s'exprime par un polynome à deux variable x, y du second degré et symétrique par rapport à ces deux variables.

2. Ci-dessous j'examine une équation différentielle qui peut être considérée comme une généralisation de l'équation d'EULER et de plus j'étudie

[1] ΣΠΥΡ. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ.—Ἐπί τινων διαφορικῶν ἐξισώσεων.

quelques autres, d'une forme analogue, que l'on peut, à un point de vue, considérer comme une extention de celle d'EULER.

3. Posons

$A = a_1 x^{2\mu} + a_2 x^{\mu} + a_3$, $B = a_2 x^{2\mu} + a_4 x^{\mu} + a_5$, $\Gamma = a_3 x^{2\mu} + a_5 x^{\mu} + a_6$

et désignons par A_1, B_1, Γ_1 les polynomes obtenus en remplaçant x par y dans A, B, Γ.

Une intégrale algébrique de l'équation differentielle.

$$(2) \qquad \frac{A^{\frac{\mu-1}{\mu}}\,dx}{\pm\sqrt{B^2-4A\Gamma}\,(-B\pm\sqrt{B^2-4A\Gamma})^{\frac{\mu-1}{\mu}}} + \frac{A_1^{\frac{\mu-1}{\mu}}\,dy}{\pm\sqrt{B_1^2-4A_1\Gamma_1}\,(-B_1\pm\sqrt{B_1^2-4A_1\Gamma_1})^{\frac{\mu-1}{\mu}}} = 0$$

est représentée par la formule

$$(3) \qquad Ay^{2\mu} + By^{\mu} + \Gamma = 0$$

En effet, l'équation (3) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$(4) \qquad A_1 x^{2\mu} + B_1 x^{\mu} + \Gamma_1 = 0.$$

Désignons par $F(x,y)$ le premier membre de (3) ou bien de (4). De la relation $F(x,y) = 0$ on déduit $F_x\,dx + F_y\,dy = 0$, ou bien, à cause de (3) et (4),

$$(5) \qquad x^{\mu-1}(2A_1 x^{\mu} + B_1)\,dx + y^{\mu-1}(2Ay^{\mu-1} + B)\,dy = 0.$$

Mais on tire des relations (3) et (4)

$$2A_1 x^{\mu} + B_1 = \pm\sqrt{B_1^2 - 4A_1\Gamma_1}, \quad x = \left(\frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4A_1\Gamma_1}}{2A_1}\right)^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

et les formules pareilles en y remplaçant x, A_1, B_1, Γ_1 par y, A, B, Γ.

On en conclut que la relation (5) peut s'écrire sous la forme (2).

Remarque I. On voit bien que la relation (3) ne représente pas l'intégrale générale car ne contient pas une constante arbitraire. Et pourtant, dans le cas où $\mu = 1$ l'équation différentielle (2) coïncide avec l'équation d'EULER et si l'on pose $B^2 - 4A\Gamma = \varphi(x)$, où $\varphi(x)$ est un polynome du quatrième degré, l'équation (3) représente l'intégrale générale. Donc l'équation (2) est une généralisation de l'équation d'EULER.

Remarque II. Si l'on prend A et B arbitrairement p. e.

$A = a_1 x^{2\mu} + a_2 x^{\mu} + a_3$, $B = \alpha_2 x^{2\mu} + \alpha_4 x^{\mu} + \alpha_5$, mais $\Gamma = \frac{a_3\alpha_2^2}{a_2^2} x^{2\mu} + a_5 \frac{\alpha_2}{a_2} x^{\mu} + \alpha_6$

on voit aisement que l'intégrale représentée par la relation (3) est maintenant représentée par la formule

$$Ay^{2\mu} + \frac{a_2}{\alpha_2} By^{\mu} + \frac{a_2^2}{\alpha_2^2}\Gamma = 0$$

4. Considérons maintenant un polynome $F(x,y)$ symétrique par rapport à x et y et du troisième degré à chacune d'elles. Ce polynome sera de la forme

$$F(x,y) = a_1 x^3 y^3 + a_2 x^2 y^2 (x+y) + a_3 xy(x^2+y^2) + a_4(x^3+y^3) + a_5 x^2 y^2 + a_6 xy(x+y) + a_7(x^2+y^2) + a_8 xy + a_9(x+y) + a_{10}$$

Cherchons quelle est l'équation différentielle d'une forme analogue à celle de l'équation d'Euler, dont l'équation $F(x,y)=0$ représente une intégrale algébrique.

L'équation $F(x,y)=0$ peut s'écrire sous deux formes équivalentes:

$$(6)\quad \begin{cases} F(x,y) = A_1 x^3 + B_1 x^2 + \Gamma_1 x + \Delta_1 = 0 \\ F(x,y) = Ay^3 + By^2 + \Gamma y + \Delta = 0 \end{cases}$$

où A, B, Γ, Δ sont des polynomes de x dont les expressions se trouvent facilement et $A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1$ les polynomes obtenus en remplaçant x par y dans A, B, Γ, Δ. De la relation $F(x,y)=0$ on déduit $F_x(x,y)dx + F_y(x,y)dy = 0$, ou bien à cause de (6)

$$(7)\quad (3A_1 x^2 + 2B_1 x + \Gamma_1)dx + (3Ay^2 + 2By + \Gamma)dy = 0$$

Posons

$$(8)\quad 3Ay^2 + 2By + \Gamma = Z$$

et éliminons y entre (8) et de la deuxième de (6).

Le résultat de l'élimination est

$$(9)\quad 3AZ^3 + (9A\Gamma - 8B^2)Z^2 + (4B^2\Gamma - 18AB\Delta)Z + 72AB\Gamma\Delta + B^2\Gamma^2 - 24B^3\Delta - 12A\Gamma^3 - 81A^2\Delta^2) = 0$$

Posons

$$P = \frac{9A\Gamma - 8B^2}{3A},\quad Q = \frac{4B^2\Gamma - 18AB\Delta}{3A},\quad R = \frac{72AB\Gamma\Delta + B^2\Gamma^2 - 24B^3\Delta - 12A\Gamma^3 - 81A^2\Delta^2}{3A}.$$

Si ϱ, r désignent les racines de l'équation

$$(10)\quad \omega^2 - (-P^3 + 9PQ - 27R)\omega + (P^2 - 3Q)^3 = 0,$$

les racines de l'équation (9) seront donées par la formule

$$Z = -P + \sqrt[3]{\varrho} + \sqrt[3]{r}$$

en choisissant les valeurs de $\sqrt[3]{\varrho}$, $\sqrt[3]{r}$, qui donnent $\sqrt[3]{\varrho}\sqrt[3]{r} = P^2 - 3Q$; on a donc

$$F_y(x,y) = -P + \sqrt[3]{\varrho} + \sqrt[3]{r},\quad F_x(x,y) = -P_1 + \sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{r_1},$$

P_1, ϱ_1, r_1 désignant ce qu'on trouve en remplaçant x par y dans P, ϱ, r.

L'équation différentielle (7) peut donc s'écrire

$$(11)\quad \frac{dx}{-P + \sqrt[3]{\varrho} + \sqrt[3]{r}} + \frac{dy}{-P_1 + \sqrt[3]{\varrho_1} + \sqrt[3]{r_1}} = 0$$

Donc une intégrale algébrique de l'équation différentielle (11) est représentée par la formule $F(x,y) = 0$ où $F(x,y)$ est un polynome à x et y du troisième degré et symétrique par rapport à ces deux variables.

Si $B \equiv 0$, on aura aussi $B_1 \equiv 0$ et les équations (9) et (10) se simplifient assez, mais si l'on a de plus $\Gamma \equiv 0$ et par suite $\Gamma_1 \equiv 0$ on en déduit.

$$A = a_1 x^3 + a_4,\ \Delta = a_4 x^3 + a_{10},\ A_1 = a_1 y^3 + a_4,\ \Delta_1 = a_4 y^3 + a_{10},$$

l'une des racines de (10) est nul, et l'équation (11) devient

$$(12) \qquad \frac{dx}{\sqrt[3]{(a_1 x^3 + a_4)(a_4 x^3 + a_{10})^2}} + \frac{dy}{\sqrt[3]{(a_1 y^3 + a_4)(a_4 y^3 + a_{10})^2}} = 0;$$

son intégrale algébrique est représentée par la formule

$$a_1 x^3 y^3 + a_4 (x^3 + y^3) + a_{10} = 0$$

5. En considérant la forme de l'équation (12) on voit qu'on peut faire une extention comme il suit:

L'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt[\mu]{(ax^\mu + b)(bx^\mu + c)^{\mu-1}}} + \frac{dy}{\sqrt[\mu]{(ay^\mu + b)(by^\mu + c)^{\mu-1}}} = 0$$

a une intégrale algébrique représentée par la formule

$$ax^\mu y^\mu + b(x^\mu + y^\mu) + c = 0$$

Pour le démontrer on peut procéder comme précédemment.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ Euler ἔδοσεν, ὡς γνωστόν, ἓν περίφημον παράδειγμα ὁλοκληρώσεως διὰ τεχνάσματος διαφορικῆς ἐξισώσεως, μετὰ τῆς ὁποίας εἶναι συνδεδεμένον τὸ ὄνομά του καὶ ἥτις ἐγένετο ἡ ἀφετηρία τῆς θεωρίας τῶν ἐλλειπτικῶν συναρτήσεων.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι:

$$(1) \qquad \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = 0$$

ὅπου $\varphi(x)$ καὶ $\varphi(y)$ εἶναι πολυώνυμα τετάρτου βαθμοῦ, τὸ μὲν ὡς πρὸς x, τὸ δὲ ὡς πρὸς y καὶ ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς συντελεστάς.

Ἡ θεμελιώδης ἀνακάλυψις τοῦ Euler συνίσταται εἰς τὸ ὅτι ἀπέδειξεν, ὅτι τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς (1), ὅπερ ἐκ πρώτης ὄψεως διὰ τῆς κατὰ μέρη ὁλοκληρώσεως φαίνεται ὑπερβατικόν, πράγματι εἶναι ἀλγεβρικόν.

Ὁ κ. Σαραντοπουλος ἐξετάζει διαφορικάς τινας ἐξισώσεις, αἵτινες, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ἀποτελοῦσι γενίκευσιν τῆς ἐξισώσεως τοῦ Euler, προσέτι δὲ καί τινας ἄλλας ἐνδιαφερούσας ἀναλόγου μορφῆς, αἵτινες ἀπό τινος ἀπόψεως δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἐπεκτάσεις ἐκείνης.

Οὕτω π. χ. εὑρίσκει ὅτι τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{(a_1 x^3 + a_4)(a_4 x^3 + a_{10})^2}} + \frac{dy}{\sqrt[3]{(a_1 y^3 + a_4)(a_4 y^3 + a_{10})^2}} = 0$$

ἡ σχέσις

$$a_1 x^3 y^3 + a_4 (x^3 + y^3) + a_{10} = 0$$

ὁρίζει ἓν ἀλγεβρικὸν ὁλοκλήρωμα, καὶ γενικώτερον ἡ σχέσις

$$a x^{\mu} y^{\mu} + b (x^{\mu} + y^{\mu}) + c = 0$$

ὁρίζει ἓν ἀλγεβρικὸν ὁλοκλήρωμα τῆς γενικωτέρας διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$\frac{dx}{\sqrt[\mu]{(ax^{\mu} + b)(bx^{\mu} + c)^{\mu-1}}} + \frac{dy}{\sqrt[\mu]{(ay^{\mu} + b)(by^{\mu} + c)^{\mu-1}}} = 0$$

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΛΕΙΟΝΟΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΩΝ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΚΡΙΤΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΕΙΝΑΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΣ[1]

ΥΠΟ **Θ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΥ**

(ὑποβληθεῖσα ὑπὸ τοῦ κ. Κ. Μαλτέζου)

Θεωρήσωμεν μίαν συνάρτησιν πλειονότιμον $u(x)$ ἔχουσαν δύο κλάδους καὶ ἀριθμὸν κριτικῶν σημείων πεπερασμένον. Μία τοιαύτη συνάρτησις ὁριζομένη ὑπὸ ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $u^2 + 2f(x)u + g(x) = o$ ὅπου $f(x)$, $g(x)$ εἶναι συναρτήσεις ἀκέραιοι — οὐχὶ ἀμφότεραι πολυώνυμα — λαμβάνει ἀναγκαίως τὴν μορφήν: $f(x) + \theta(x) e^{Q(x)}$ (κατὰ προσέγγισιν τοῦ σημείου της) ὅπου $\theta(x)$ εἶναι μία συνάρτησις ἀλγεβρικὴ καὶ $Q(x)$ παριστᾷ ἀκεραίαν συνάρτησιν.

Ὁ Καθηγητὴς Paul Montel μοῦ ἔθεσε τὸ ζήτημα: *εὑρεῖν τὴν μορφὴν τῶν πλειονοτίμων συναρτήσεων ἐχουσῶν* μ *κλάδους καὶ τῶν ὁποίων ὁ ἀριθμὸς τῶν κριτικῶν σημείων εἶναι πεπερασμένος.*

Μία τοιαύτη συνάρτησις ὁρίζεται ὑπὸ ἐξισώσεως τῆς μορφῆς

$$f(x, u) \equiv u^{\mu} + \mu f_1(x) u^{\mu-1} + f_2(x) u^{\mu-2} + \dots + f_{\mu}(x) = o$$

ἡ δὲ διακρίνουσα (discriminant) τοῦ πολυωνύμου $f(x, u)$ ὡς πρὸς u ἀναγκαίως θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $p(x) e^{P(x)}$, $p(x)$ εἶναι ἓν πολυώνυμον καὶ $P(x)$ παριστᾷ μίαν ἀκεραίαν συνάρτησιν.

Ἡ ἔρευνα τοῦ ζητήματος μὲ ἤγαγεν εἰς τὸ ἑξῆς ἐξαγόμενον:

Θεώρημα: *Ἔστω* $u(x)$ *μία πλειονότιμος συνάρτησις ἔχουσα* μ *κλάδους ὁριζομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς*

$$f(x, u) \equiv u^{\mu} + \mu f(x) u^{\mu-1} + \dots = o$$

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν κριτικῶν σημείων τῆς συναρτήσεως $u(x)$ *εἶναι πεπερασμένος θὰ ἔχωμεν*

---

[1] **TH. VAROPOULOS. — Sur les algébroïdes ayant un nombre fini des points critiques.**