ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 13ΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2002

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΜΗΤΡΟΠΟΛΙΤΟΥ ΠΕΡΓΑΜΟΥ ΙΩΑΝΝΟΥ (ΖΗΖΙΟΥΛΑ)

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ. – **Ἐπαναληπτικότητα στὸ Χάος**, ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Γ. Κοντοπούλου καὶ τῆς Μ. Χαρσούλα*.

1. Εἰσαγωγὴ

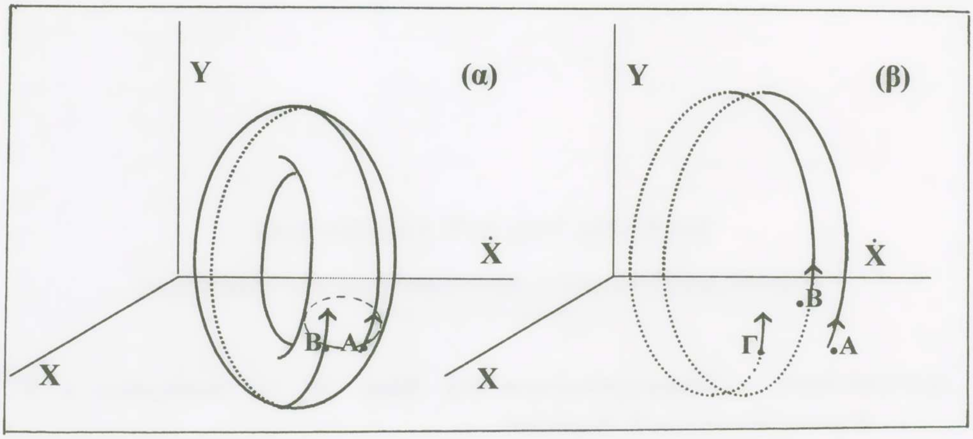
Θὰ παρουσιάσω σήμερα ὡρισμένα πρόσφατα συμπεράσματα ἑνὸς προγράμματος ποὺ χρηματοδοτεῖται ἀπὸ τὴν Ἐπιτροπὴ Ἐρευνῶν τῆς Ἀκαδημίας. Τὰ συμπεράσματά μας ἀναφέρονται σὲ ἕνα θέμα σημαντικοῦ θεωρητικοῦ καὶ πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος, τὴν «ἐπαναληπτικότητα στὸ χάος».

Ἡ διάκριση μεταξὺ τάξεως καὶ χάους στὶς τροχιὲς τῶν ἀστέρων σὲ ἕνα γαλαξία γίνεται παραστατικὰ σὲ μία «ἐπιφάνεια τομῆς Poincaré» (Σχ. 1 α, б). Θεωροῦμε τὶς τροχιὲς στὸ χῶρο τῶν φάσεων (x, y, $\dot{x}$), ποὺ περιλαμβάνει τὶς συντεταγμένες x καὶ y καὶ τὴν ταχύτητα $\dot{x}$. Ἐὰν μία τροχιὰ εἶναι ὀργανωμένη, καλύπτει τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς δακτυλίου (Σχ. 1 α). Οἱ τομὲς τῆς τροχιᾶς ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τομῆς y=0 εἶναι σημεῖα A, B,... στὸ ἐπίπεδο (x, $\dot{x}$), ποὺ εὑρίσκονται ἐπάνω σὲ μιὰ καμπύλη, δηλαδὴ στὴν τομὴ τοῦ δακτυλίου ἀπὸ τὸ ἐπίπεδο y=0. Ἀντιθέτως μία χαοτικὴ τροχιὰ δὲν ὁρίζει ἕνα δακτύλιο καὶ οἱ τομές της ἀπὸ τὴν ἐπιφάνεια τομῆς A, B,... εἶναι διάσπαρτες (Σχ. 1 б).

Ἂν τὸ ἀρχικὸ σημεῖο τῆς τροχιᾶς εἶναι τὸ A, τότε τὸ ἑπόμενο σημεῖο τομῆς B (πρὸς τὰ θετικὰ $\dot{x}$) ὁρίζει μιὰ ἀπεικόνιση A→B. Πολλὰ χαρακτηριστικὰ τῆς τάξεως καὶ τοῦ χάους μελετῶνται σὲ ἁπλὲς ἀπεικονίσεις ἀπὸ ἕνα σημεῖο (x, y) σὲ ἕνα ἄλλο σημεῖο (x′, y′). Ἕνα τέτοιο παράδειγμα εἶναι ἡ «τυπικὴ ἀπεικόνιση»

$$\begin{aligned} x' &= x + y' \\ y' &= y + \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x) \end{aligned} \qquad \text{(modulo 1)} \quad (1)$$

G. CONTOPOULOS, M. HARSOULA, **Recurrence in Chaos.**



Σχ. 1. Τροχιὲς στὸ χῶρο τῶν φάσεων (x, y, ẋ). (α) Μιὰ ὀργανωμένη τροχιὰ καλύπτει τὴν ἐπιφάνεια ἑνὸς δακτυλίου. (β) Μιὰ χαοτικὴ τροχιά. Τὰ σημεῖα Α, Β,... στὴν ἐπιφάνεια τομῆς (y=0) κεῖνται σὲ μιὰ ὁμαλὴ καμπύλη στὴν περίπτωση (α) ἐνῶ εἶναι διάσπαρτα στὴν περίπτωση (β).

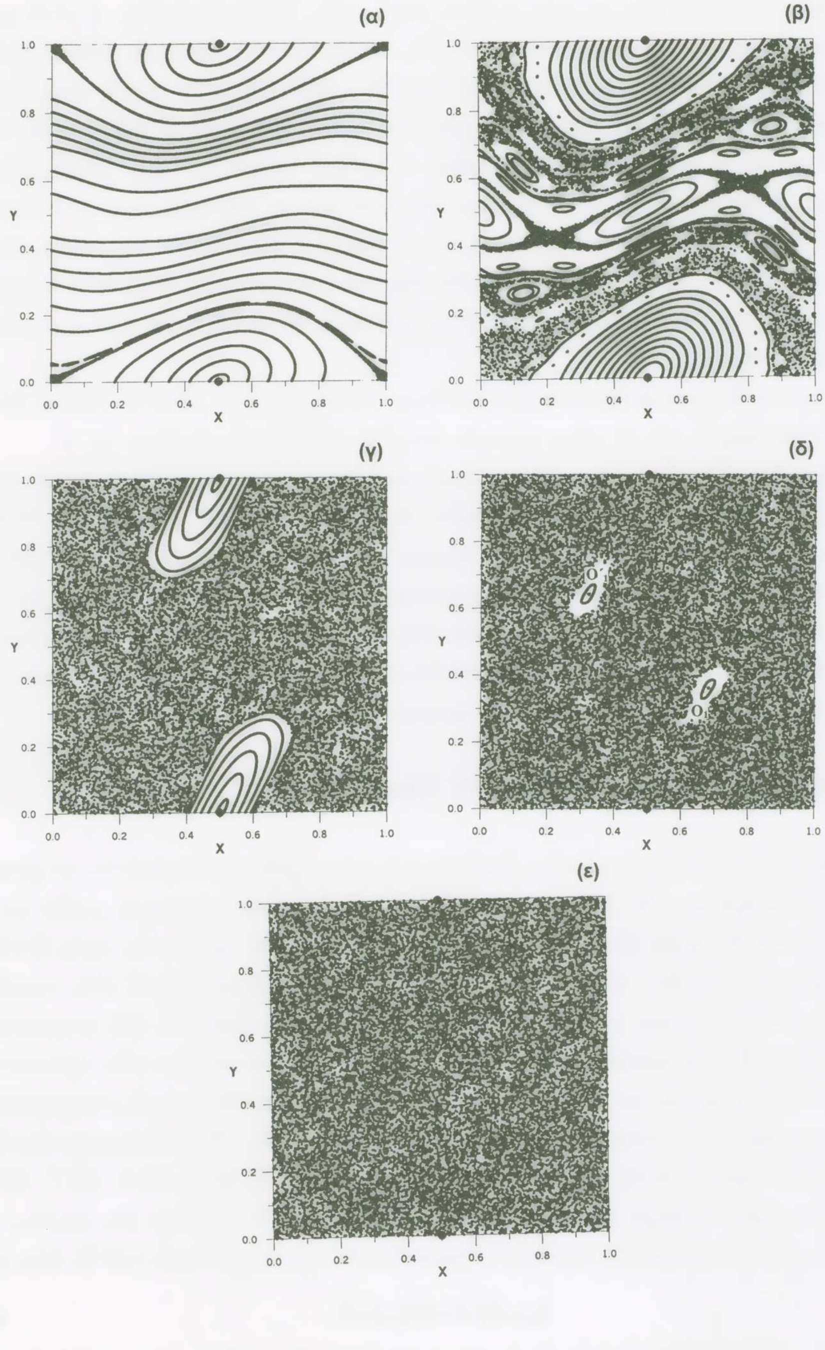
Τὸ modulo 1 σημαίνει ὅτι τὸ πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι τὸ [(0,1), (0,1)], δηλαδὴ [$0< x<1$, $0<y<1$]. Ὅταν τὸ x ἢ τὸ y γίνει μεγαλύτερο ἀπὸ 1 ἀφαιροῦμε ἀκέραιες μονάδες ὥστε τὰ x καὶ y νὰ εἶναι πάντοτε μεταξὺ 0 καὶ 1.

Τὸ K εἶναι μία παράμετρος ποὺ χαρακτηρίζει τὴν μὴ γραμμικότητα τῆς ἀπεικονίσεως. Ὅταν K=0 ἡ ἀπεικόνιση (1) εἶναι γραμμικὴ καὶ δίνει εὐθεῖες γραμμὲς $y'=y$, παράλληλες πρὸς τὸν ἄξονα x. Ὅταν τὸ K εἶναι μικρὸ οἱ γραμμὲς αὐτὲς γίνονται καμπύλες (Σχ. 2 α). Οἱ περισσότερες καμπύλες ἀρχίζουν μὲ x=0 καὶ φθάνουν στὸ x=1 (ὁπότε ἐπανέρχονται στὸ x=0 λόγω τοῦ modulo 1).

Τὸ σημεῖο (x=0.5, y=0), τὸ ὁποῖο ταυτίζεται μὲ τὸ σημεῖο (x=0.5, y=1), παριστάνει μιὰ εὐσταθὴ περιοδικὴ τροχιά. Καμπύλες ποὺ ἀρχίζουν κοντὰ στὸ σημεῖο αὐτὸ κλείνουν γύρω ἀπὸ αὐτὸ δημιουργώντας μιὰ «νησίδα εὐσταθείας». Πράγματι λόγω τοῦ modulo 1 οἱ καμπύλες μὲ y κοντὰ στὸν ἄξονα y=0 συνεχίζονται, ὅταν φθάσουν στὸ y=0, μὲ τὶς καμπύλες κοντὰ στὸν ἄξονα y=1 ποὺ ἀρχίζουν μὲ τὸ ἴδιο x καὶ y=1, στὸ ἐπάνω μέρος τοῦ Σχ. 2 α.

Στὸ Σχ. 2 α ὑπάρχει μόνο μιὰ μικρὴ περιοχὴ χάους, ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ τὸ σημεῖο (0, 0) καὶ φθάνει στὸ σημεῖο (1, 0) καὶ ὁμοίως ἀπὸ τὸ (1, 0) μέχρι τὸ (1, 1).

Ὅταν ὅμως τὸ K γίνει μεγαλύτερο τὸ χάος εἶναι μεγαλύτερο. Στὸ Σχ. 2 β ὑπάρχουν πολλὲς ὀργανωμένες τροχιὲς ποὺ παριστάνουν νησίδες γύρω ἀπὸ διάφορες περιοδικὲς τροχιές, ἀλλὰ καὶ πολλὲς χαοτικὲς τροχιὲς ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ διάσπαρτα σημεῖα.



Σχ. 2. (α), (β), (γ), (δ), (ε). Τροχιὲς στὴν τυπικὴ ἀπεικόνιση γιὰ (α) K=0.5, (β) K=1, (γ) K=3, (δ) K=5 καὶ (ε) K=8.

Καθὼς τὸ Κ αὐξάνει, τὸ χάος αὐξάνει κατὰ πολύ. Ὅταν Κ=3 (Σχ. 2 γ) τὸ χάος καλύπτει τὸ μεγαλύτερο μέρος τοῦ χώρου [(0, 1), (0,1)] ἐκτὸς ἀπὸ μιὰ μεγάλη νησίδα γύρω ἀπὸ τὴν εὐσταθὴ περιοδικὴ τροχιὰ (x=0.5, y=0). (Ἡ μισὴ νησίδα εἶναι εἰς τὸ κάτω μέρος τοῦ σχήματος, καὶ ἡ ἄλλη μισὴ στὸ ἐπάνω μέρος, λόγω τοῦ modulo 1).

Ὅταν τὸ Κ γίνει Κ=4, ἡ εὐσταθὴς περιοδικὴ τροχιὰ (x=0.5, y=0) γίνεται ἀσταθής. Ὅταν Κ=5 (Σχ. 2 δ) τὸ χάος καλύπτει καὶ τὶς περιοχὲς γύρω στὰ σημεῖα (0.5, 0) καὶ (0.5, 1). Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὑπάρχουν δύο νησίδες εὐσταθεῖς, γύρω ἀπὸ δύο σημεῖα O_1, O'_1. Τὰ σημεῖα αὐτὰ παριστάνουν εὐσταθεῖς περιοδικὲς τροχιές, ποὺ προῆλθαν ἀπὸ διακλάδωση ἀπὸ τὴν τροχιὰ (0.5, 0) ≡ (0.5, 1) ὅταν αὐτὴ ἔγινε ἀσταθὴς γιὰ Κ=4.

Ὅταν τὸ Κ γίνει ἀκόμη μεγαλύτερο (π.χ. Κ=8, Σχ. 2 ε), ὅλες οἱ νησίδες αὐτὲς ἔχουν καταστραφεῖ καὶ τὸ χάος φαίνεται ὅτι εἶναι πλῆρες εἰς τὸ χῶρο (x, y).

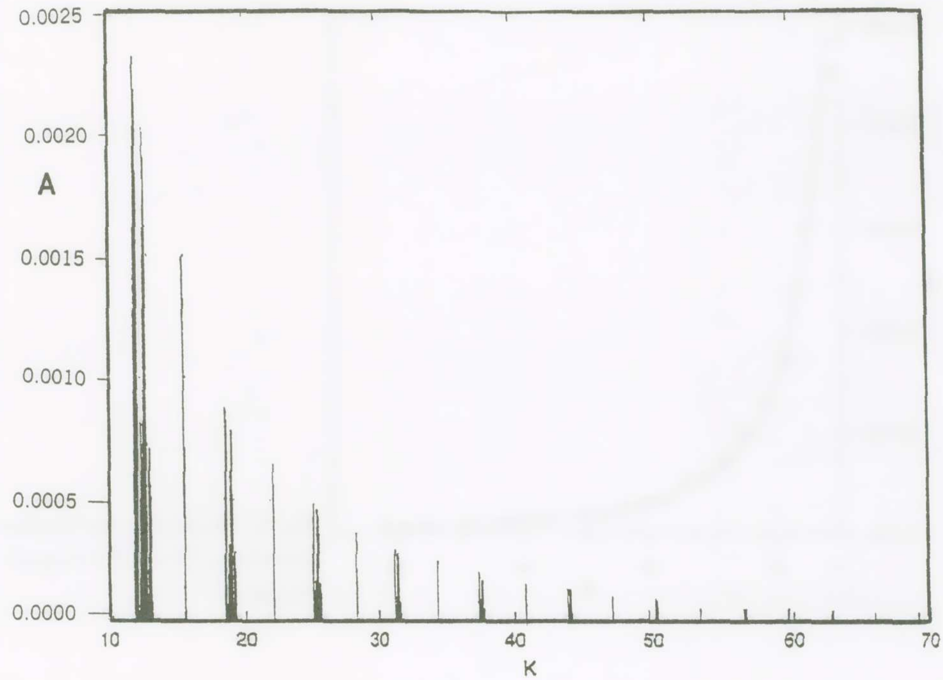
Παρ' ὅλα αὐτὰ ὑπάρχουν μερικὰ θεωρητικὰ ἐπιχειρήματα, τὰ ὁποῖα δείχνουν ὅτι σὲ πολλὲς περιπτώσεις ὑπάρχουν μικρὲς νησίδες εὐσταθείας (Newhouse 1983, Duarte 1994) σὲ διάφορα σημεῖα τοῦ χώρου (x, y). Ἐκεῖνο ποὺ δὲν ἀνέμενε κανεὶς ἦταν ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν σχετικὰ μεγάλες νησίδες εὐσταθείας γιὰ μεγάλα Κ. Γι' αὐτὸ ἀπετέλεσε μιὰ ἔκπληξη ὅταν ἕνας συνεργάτης μας στὴ Βιέννη, ὁ καθηγητὴς R. Dvorak, βρῆκε σημαντικὲς νησίδες εὐσταθείας στὴν τυπικὴ ἀπεικόνιση (1) γιὰ μεγάλες τιμὲς τῆς παραμέτρου μὴ γραμμικότητος Κ (Σχ. 3).

2. Ἐπαναληπτικότητα τῶν νησίδων στὸ Χάος

Στὸ Σχ. 3 δίνεται τὸ μέγεθος (ἐμβαδὸν) Α τῶν νησίδων στὸ χῶρο (x, y) συναρτήσει τῆς παραμέτρου Κ. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν εἶναι πρακτικῶς μηδὲν γιὰ Κ κοντὰ στὸ Κ=10, ἀλλὰ εἶναι μεγαλύτερο τοῦ μηδενὸς γιὰ Κ κοντὰ στὶς τιμὲς Κ=12-13. Τὸ μέγιστο μέγεθος τῶν νησίδων στὴν περιοχὴ αὐτὴ τιμῶν τοῦ Κ εἶναι μεγαλύτερο τοῦ 0.002, δηλαδὴ μεγαλύτερο ἀπὸ 0.2% τοῦ ὅλου ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου [(0, 1), (0, 1)]. Γιὰ μεγαλύτερα Κ (Κ≥13.4) τὸ ἐμβαδὸν γίνεται πάλι πρακτικῶς μηδέν, ἀλλὰ γιὰ ἀκόμη μεγαλύτερα Κ οἱ νησίδες ἐπανεμφανίζονται μὲ μία χαρακτηριστικὴ ἐπαναληπτικότητα (περίπου περιοδικότητα) στὸ Κ. Ἔτσι βλέπουμε νησίδες πλησίον τῶν τιμῶν Κ=12.1, 18.5, 24.9, 31.2, 37.5, 43.8, 50.1, 56.4, 62.7, 69.0, κλπ. Ἑπομένως ὑπάρχει μία περίοδος στὴν ἐμφάνιση τῶν νησίδων ἴση περίπου μὲ ΔΚ=6.3. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι οἱ νησίδες ἐμφανίζονται κοντὰ σὲ τιμὲς τοῦ Κ ἴσες μὲ

$$K=12.1+6.3\,(n-1) \tag{2}$$

ὅπου οἱ πρῶτες νησίδες αὐτοῦ τοῦ τύπου ἐμφανίζονται γιὰ n=1 (Κ=12.1) καὶ οἱ ἑπόμενες γιὰ n>1.



Σχ. 3. Τὸ μέγεθος τῶν νησίδων εὐσταθείας στὴν τυπικὴ ἀπεικόνιση συναρτήσει τοῦ K.

Ἐκτὸς αὐτῶν τῶν νησίδων ἐμφανίζονται καὶ ἄλλες νησίδες (Σχ. 3) γιὰ K=15.6 καὶ γενικὰ γιὰ

$$K=9.3+6.3\ (n-1) \tag{3}$$

ἤτοι K = 9.3, 15.6, 21.9, 28.2, 34.5, 40.8, 47.1, 53.4, 59.7, 65.9, κλπ.

Οἱ νησίδες αὐτὲς ἐκτείνονται σὲ πολὺ μικρότερα διαστήματα τιμῶν τοῦ K ἀπὸ ὅ,τι οἱ προηγούμενες νησίδες (2).

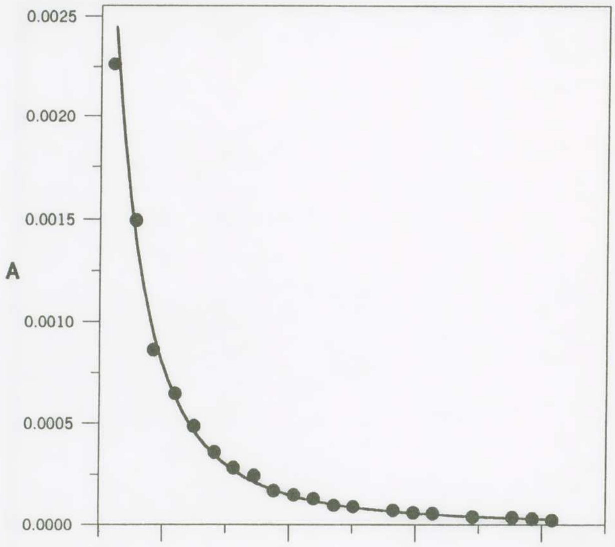
Τὸ μέγιστο μέγεθος τῶν νησίδων μικραίνει καθὼς ἡ παράμετρος K αὐξάνει. Τὰ μέγιστα ἐμβαδὰ A ἀκολουθοῦν περίπου ἕνα νόμο δυνάμεως (Σχ. 4).

$$A=\alpha\ K^{\beta} \tag{4}$$

ὅπου α=0.9549 καὶ β=-2.369, καὶ K ἀντιστοιχεῖ στὰ μέγιστα τῶν νησίδων (2) καὶ (3).

Παραδείγματος χάριν οἱ νησίδες πλησίον τῆς τιμῆς K=18.5 εἶναι τὸ πολὺ 0.08% τοῦ ὅλου ἐμβαδοῦ, κ.ο.κ.

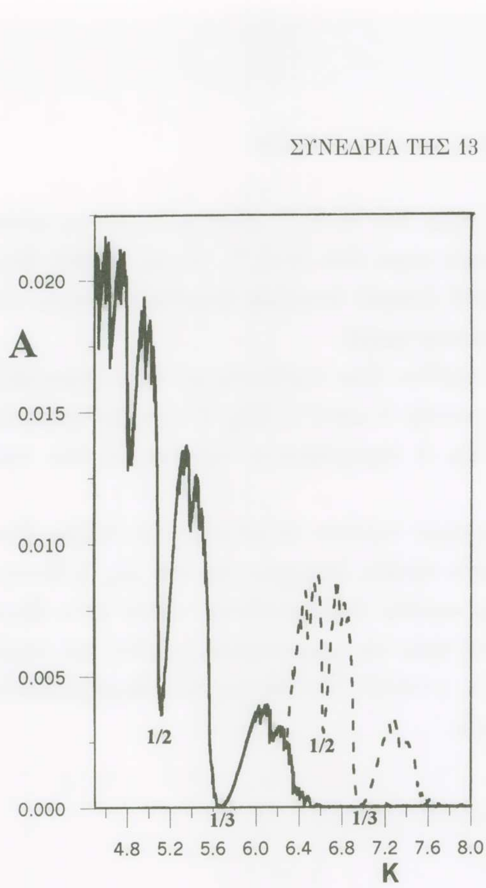
Καθὼς τὸ n αὐξάνει, οἱ νησίδες (2) μικραίνουν καὶ γίνονται μικρότερες ἀπὸ 0.001% ὅταν K>127.



Σχ. 4. Τὰ μέγιστα τῶν νησίδων εὐσταθείας (2) καὶ (3) συναρτήσει τοῦ K.

Σὲ κάθε περιοχὴ νησίδων τὸ μέγεθός τους αὐξομειώνεται κατὰ χαρακτηριστικὸ τρόπο (Σχ. 5). Οἱ νησίδες ἐμφανίζονται ἀπότομα ἐκ τοῦ μηδενός. Π.χ. στὸ Σχ. 5 παρατηροῦμε ὅτι οἱ νησίδες ἐμφανίζονται ὅταν $K \approx 11.89$ καὶ ἀρχικῶς αὐξάνουν ἀπότομα σὲ μέγεθος. Στὴ συνέχεια, καθὼς τὸ K αὐξάνει, τὸ μέγεθός τους ὑφίσταται ὡρισμένες χαρακτηριστικὲς αὐξομειώσεις. Οἱ ἐλαττώσεις μεγέθους τῶν νησίδων παρουσιάζονται σὲ συντονισμοὺς n/m, μερικοὶ ἀπὸ τοὺς ὁποίους σημειώνονται στὸ Σχ. 5.

Ἡ ἐξήγηση τοῦ φαινομένου αὐτοῦ ἔχει δοθεῖ ἀπὸ τοὺς Contopoulos et al. (1999). Τὰ ὅρια κάθε νησίδος δίνονται ἀπὸ τὴν τελευταία καμπύλη KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) γύρω ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς νησίδος. Ἔξω ἀπὸ τὴν καμπύλη αὐτὴ ὑπάρχουν m δευτερεύουσες νησίδες ποὺ περιβάλλουν μία εὐσταθὴ περιοδικὴ τροχιὰ n/m περιόδου m. Μεταξὺ τῶν δευτερευουσῶν αὐτῶν νησίδων ὑπάρχουν τὰ m σημεῖα μιᾶς ἀσταθοῦς περιοδικῆς τροχιᾶς περιόδου m. Αὐτὰ τὰ σημεῖα συνοδεύονται ἀπὸ μικρὲς χαοτικὲς περιοχές, οἱ ὁποῖες ὅμως χωρίζονται ἀπὸ τὴν ἐξωτερικὴ μεγάλη χαοτικὴ θάλασσα, διότι παρεμβάλλεται ἡ τελευταία καμπύλη KAM. Ὅταν ὅμως τὸ K ὑπερβεῖ μία κρίσιμη τιμὴ $K=K_{cr}$, ἡ τελευταία αὐτὴ καμπύλη KAM καταστρέφεται, δηλαδὴ ἀποκτᾶ ἄπειρες ὀπές, μέσω τῶν ὁποίων οἱ ἀνωτέρω m χαοτικὲς περιοχὲς ἐπικοινωνοῦν μὲ τὴν μεγάλη χαοτικὴ θάλασσα καὶ ἀποτελοῦν ἔκτοτε (γιὰ $K>K_{cr}$) μέρος τῆς χαοτικῆς θάλασσας. Γιὰ $K>K_{cr}$ ἡ νησίδα γίνεται ἀποτόμως πολὺ μικρότερη, καὶ ὁρίζεται



Σχ. 5. Τὸ μέγεθος τῶν νησίδων εὐσταθείας συναρτήσει τοῦ Κ ὅταν τὸ Κ εὑρίσκεται μεταξὺ 4.5 καὶ 8. Ἡ ἐστιγμένη γραμμὴ παριστάνει νησίδες στὸν ἄξονα x.

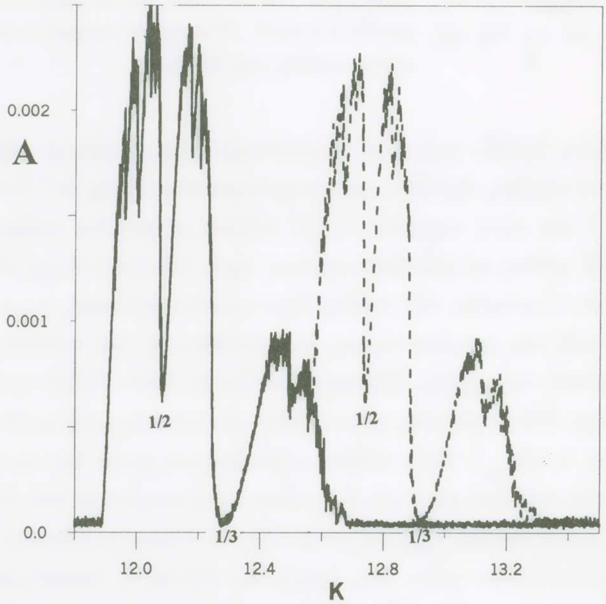
ἀπὸ μία νέα «τελευταία καμπύλη ΚΑΜ» ποὺ εἶναι πλησιέστερα πρὸς τὸ κέντρο τῆς νησίδας ἀπὸ τὶς m προηγούμενες νησίδες, ἄρα ἔχει πολὺ μικρότερες διαστάσεις ἀπ' ὅ,τι προηγουμένως. Στὴ συνέχεια ἡ νέα αὐτὴ καμπύλη ΚΑΜ αὐξάνει σὲ μέγεθος καθὼς τὸ Κ αὐξάνει, μέχρις ὅτου τὸ Κ φθάσει σὲ μιὰ ἄλλη κρίσιμη τιμή, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕνα ἄλλο συντονισμό, ὁπότε πάλι τὸ μέγεθος τῆς νησίδας ἐλαττώνεται ἀπότομα, κ.ο.κ.

Ἔτσι ἔχουμε διαδοχικὲς αὐξήσεις καὶ ἐλαττώσεις τοῦ μεγέθους Α τῶν νησίδων, μέχρις ὅτου ὅλες οἱ νησίδες αὐτοῦ τοῦ τύπου ἐξαφανισθοῦν ὁπότε Α=0. Εἰδικότερα παρατηροῦμε ὅτι στὸν συντονισμὸ 1/3 τὸ μέγεθος τῶν νησίδων γίνεται στιγμιαῖα μηδὲν (δηλαδὴ γιὰ μιὰ ὡρισμένη τιμὴ $K=K_{1/3}$), ἀλλὰ αὐξάνει πάλι ἀμέσως μετὰ τὴν τιμὴ $K=K_{1/3}$. Ὅμως τὸ μέγεθος τῶν νησίδων μετὰ τὸ $K_{1/3}$ εἶναι πολὺ μικρότερο ἀπὸ τὸ μέγιστο πρὸ τοῦ $K_{1/3}$ καὶ τελικὰ οἱ νησίδες ἐξαφανίζονται (Σχ. 5, συνεχὴς γραμμή).

Οἱ νησίδες τοῦ Σχ. 5 ἐμφανίζονται γύρω ἀπὸ ὡρισμένες εὐσταθεῖς περιοδικὲς τροχιές. Οἱ νησίδες ποὺ δημιουργοῦνται ὅταν Κ=11.89 περιβάλλουν τὴν εὐσταθὴ περιοδικὴ τροχιὰ O_1* (ἰδ. παράγρ. 4), ἡ ὁποία δημιουργεῖται ὅταν Κ=11.89. Ἡ τροχιὰ αὐτὴ γίνεται ἀσταθὴς ὅταν Κ=12.57. Τότε διακλαδίζεται μιὰ εὐσταθὴς τροχιά, διπλῆς περιόδου, ἡ ὁποία ἔχει δύο σημεῖα εἰς τὸ ἐπίπεδο (x, y) γύρω ἀπὸ τὸ σημεῖο O_1*(*). Τὰ σημεῖα αὐτὰ περιβάλλονται ἀπὸ δύο νησίδες. Αὐτὴ ἡ περιοδικὴ τροχιὰ γίνεται ἀσταθὴς γιὰ μεγαλύτερο Κ καὶ τότε διακλαδίζεται μιὰ τετραπλὴ περιοδικὴ τροχιά, ἡ ὁποία ἔχει 4 εὐσταθῆ σημεῖα γύρω ἀπὸ τὸ O_1*. Αὐτὴ πάλι γίνεται ἀσταθής, δημιουργώντας μιὰ 8πλὴ διακλάδωση γύρω ἀπὸ τὸ O_1*, κ.ο.κ. Τελικά, ὅταν τὸ K γίνει K=12.65, ἔχουν δημιουργηθεῖ ἄπειρες ἀσταθεῖς περιοδικὲς τροχιὲς καὶ ὅλες οἱ νησίδες γύρω ἀπὸ τὸ O_1 ἔχουν καταστραφεῖ.

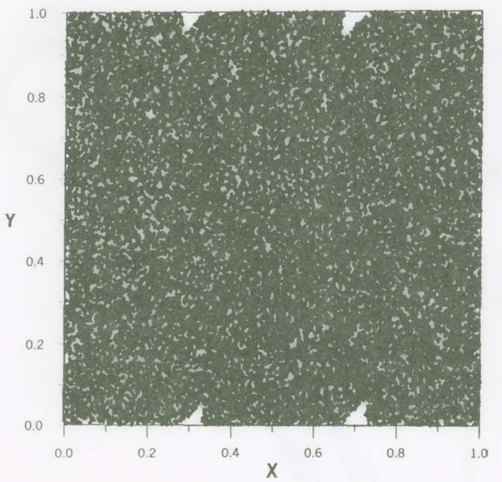
Οἱ αὐξομειώσεις τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν νησίδων εἶναι παρόμοιες μὲ τὶς αὐξομειώσεις τῶν νησίδων O_1 ὅταν τὸ K εὑρίσκεται μεταξὺ 4 καὶ 6.5 (Σχ. 6 συνεχὴς γραμμή). Οἱ αὐξομειώσεις στὴν περίπτωση τοῦ Σχ. 6 περιγράφονται λεπτομερῶς ἀπὸ τοὺς Contopoulos et al. (1999).

Στὸ Σχ. 6 ὑπάρχει καὶ μία δεύτερη σειρὰ νησίδων, τὸ μέγεθος τῶν ὁποίων δίνεται ἀπὸ μιὰ ἐστιγμένη γραμμή. Ἀνάλογες νησίδες ὑπάρχουν καὶ στὸ Σχ. 5 (ἐστιγμένη γραμμή). Οἱ δευτερεύουσες αὐτὲς νησίδες δημιουργοῦνται κοντὰ στὸν ἄξονα y=0 (καὶ y=1) (Σχ. 7) καὶ εἶναι ἄσχετες πρὸς τὶς προηγούμενες νησίδες ποὺ ὑπάρχουν στὴν περιοχὴ τοῦ σημείου (x=0.7, y=0.4). Ἡ ἐξήγηση τῶν δευτερευουσῶν αὐτῶν νησίδων δίνεται στὴν παράγραφο 5.



Σχ. 6. Μιὰ περιοχὴ τοῦ Σχ. 3 σὲ μεγέθυνση. Ἡ ἐστιγμένη γραμμὴ παριστάνει τὶς νησίδες στὸν ἄξονα x.

(*) Πρέπει νὰ σημειωθεῖ ὅτι ἐκτὸς τοῦ σημείου O_1* ὑπάρχει ἕνα ἀκόμη σημεῖο O_1*′ συμμετρικὸ τοῦ O_1* ὡς πρὸς τὸ κέντρο τοῦ τετραγώνου [(0,1), (0,1)]. Ὅταν ἐμφανισθεῖ ἡ περιοδικὴ τροχιὰ μὲ δύο σημεῖα γύρω ἀπὸ τὸ O_1* ὑπάρχουν ἄλλα δύο σημεῖα γύρω ἀπὸ τὸ O_1*′, κ.ο.κ.



Σχ. 7. Δευτερεύουσες νησίδες κοντὰ στὸν ἄξονα y=0 (ποὺ ταυτίζεται μὲ τὸν ἄξονα y=1 λόγω τοῦ modulo 1) γιὰ K=6.7.

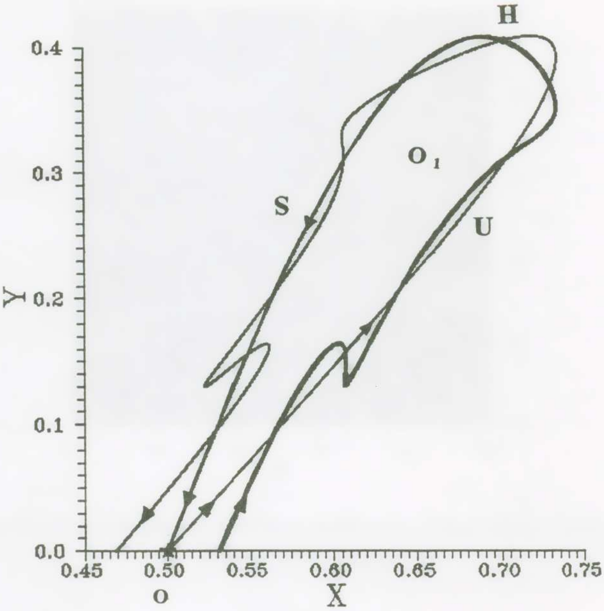
Ἐδῶ παρατηροῦμε μόνο ὅτι οἱ αὐξομειώσεις τοῦ μεγέθους τῶν νησίδων αὐτῶν (Σχ. 5 καὶ 6) εἶναι παρόμοιες μὲ τὶς αὐξομειώσεις τῶν νησίδων O_1 καὶ O_1*, σὲ διαφορετικὴ ὅμως κλίμακα. Παρόμοιες αὐξομειώσεις ἔχουν βρεθεῖ καὶ σὲ ἄλλα προβλήματα. Ἑπομένως τὸ φαινόμενο τῶν αὐξομειώσεων τῶν νησίδων εἶναι γενικὸ (παγκόσμιο).

3. Ἐξήγηση

Ἡ ἐξήγηση τῆς ἐπαναληπτικότητος τῶν νησίδων τῆς τυπικῆς ἀπεικονίσεως βασίζεται στὰ ἑξῆς στοιχεῖα:

1) Οἱ νησίδες ὁριοθετοῦνται (περιορίζονται) ἀπὸ τὶς ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες τῆς ἀσταθοῦς περιοδικῆς τροχιᾶς O (x=0.5, y=0, ἢ y=1). Ἡ ἀσταθὴς (U) καὶ ἡ εὐσταθὴς (S) ἀσυμπτωματικὴ καμπύλη τέμνονται σὲ ἄπειρα ὁμοκλινικὰ σημεῖα. Οἱ ἀρχὲς τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν καὶ τὰ πρῶτα ὁμοκλινικὰ σημεῖα στὴν περίπτωση K=4.7 δίνονται στὸ Σχ. 8. Τὸ βασικὸ ὁμοκλινικὸ σημεῖο H εὑρίσκεται σὲ ἴση περίπου ἀπόσταση ἀπὸ τὴν περιοδικὴ τροχιὰ O κατὰ μῆκος καὶ τῶν δύο καμπυλῶν U καὶ S. Τὰ τόξα OH κατὰ μῆκος τῶν U καὶ S ὁρίζουν μιὰ ἐσωτερικὴ περιοχὴ συντονισμοῦ O_1 (Σχ. 8) μὲ κέντρο τὴν εὐσταθὴ περιοδικὴ τροχιὰ O_1, ποὺ προέρχεται ἀπὸ διακλάδωση ἀπὸ τὴν O ὅταν ἡ τροχιὰ O (0.5, 0) γίνει ἀσταθὴς γιὰ $K \geq 4$.

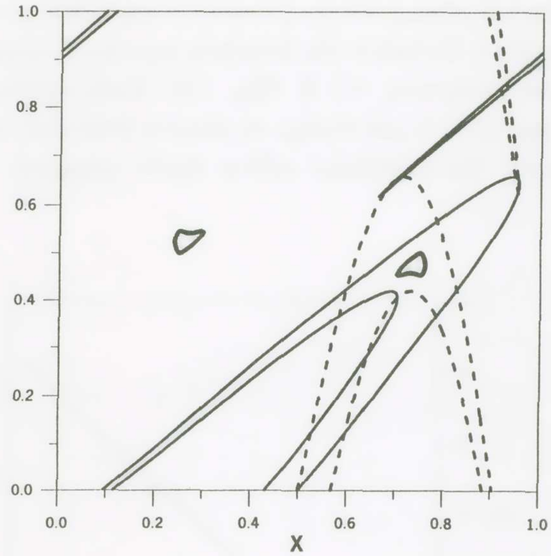
Οἱ ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες δημιουργοῦνται ὅταν τὸ K γίνει μεγαλύτερο τοῦ 4 καὶ αὐξάνουν εἰς μῆκος καθὼς τὸ K αὐξάνει. Οἱ ἀσυμπτωτικὲς αὐτὲς καμπύλες



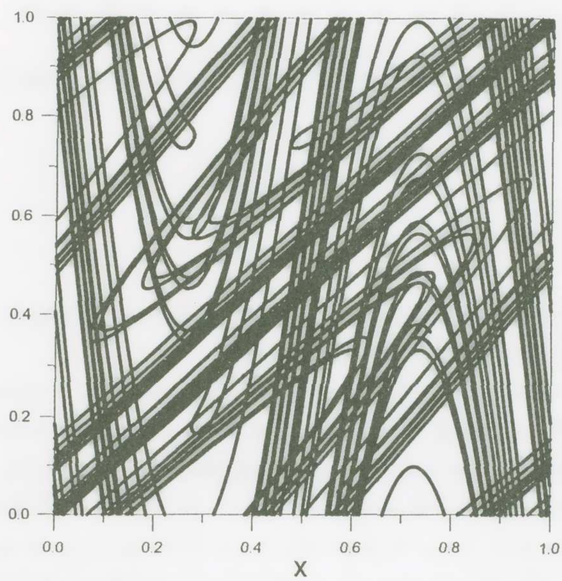
Σχ. 8. Οἱ ἀρχὲς τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν (ἀσταθοῦς (U) καὶ εὐσταθοῦς (S)) τῆς ἀσταθοῦς περιοδικῆς τροχιᾶς (x=0.5, y=0) γιὰ K=4.7.

ἀποτελοῦνται ἀπὸ τόξα μεταξὺ τῶν ὁμοκλινικῶν σημείων, καὶ παρουσιάζουν ταλαντώσεις στὸ χῶρο, ἐκτὸς καὶ ἐντὸς τῆς περιοχῆς συντονισμοῦ O_1, ποὺ ὀνομάζονται «λοβοί». Ὅταν τὸ K εἶναι μεταξὺ 4 καὶ 6.6 περίπου, οἱ ἐσωτερικοὶ λοβοὶ δὲν καλύπτουν ὅλο τὸ χῶρο O_1. Ἑπομένως ἀφήνουν χῶρο γιὰ τὴ δημιουργία μιᾶς νησίδος ἐντὸς τῆς περιοχῆς O_1. Καθὼς τὸ K αὐξάνει, οἱ ταλαντώσεις τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν γίνονται μεγαλύτερες (Σχ. 9), ἀλλὰ πάλι δὲν καλύπτουν ὅλο τὸν χῶρο συντονισμοῦ O_1 καὶ ἡ νησίδα O_1 ἐξακολουθεῖ νὰ ὑπάρχει (καὶ μία συμμετρικὴ νησίδα O_1'), καίτοι εἶναι μικρότερη.

Ὅταν ὅμως τὸ K γίνει ἀκόμη μεγαλύτερο, οἱ ταλαντώσεις καλύπτουν ὅλο τὸν χῶρο τῆς περιοχῆς O_1 (Σχ. 10). Ἐξ ἄλλου ἡ τροχιὰ O_1 γίνεται ἀσταθὴς (ἰδ. παράγρ. 4) καὶ οἱ διακλαδιζόμενες ἀπὸ αὐτὴ τροχιὲς γίνονται ἐπίσης ἀσταθεῖς. Αὐτὲς οἱ ἀσταθεῖς τροχιὲς συνοδεύονται ἀπὸ ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες τῆς τροχιᾶς O (οἱ ἀσταθεῖς ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες τῶν τροχιῶν αὐτῶν τέμνουν τὴν εὐσταθὴ ἀσυμπτωτικὴ καμπύλη τῆς O, καὶ οἱ εὐσταθεῖς ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες τέμνουν τὴν ἀσταθὴ ἀσυμπτωτικὴ καμπύλη τῆς O). Μὲ τὶς τομὲς αὐτὲς δημιουργεῖται σημαντικὸ χάος στὸ ἐσωτερικὸ τῆς περιοχῆς O_1. Καθὼς τὸ K αὐξάνει, ἡ τροχιὰ O_1 καὶ οἱ διακλαδώσεις της μετατοπίζονται σὲ μεγαλύτερα x καὶ y (ἰδ. παράγρ. 4).

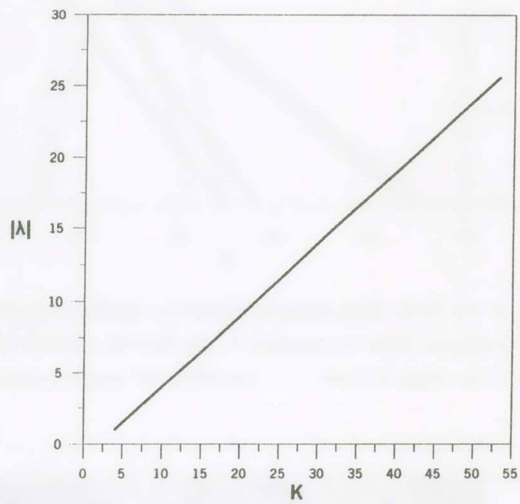


Σχ. 9. Ὅπως στὸ Σχ. 8 γιὰ K=6. Σημειώνονται ὡρισμένες νησίδες εὐσταθείας. Ὅταν οἱ καμπύλες φθάνουν στὸ x=1, συνεχίζουν, λόγω τοῦ modulo 1, ἀπὸ τὸ x=0, καὶ ὅταν φθάνουν στὸ y=1, συνεχίζουν ἀπὸ τὸ y=0. (——) ἀσταθεῖς (U) καὶ (---) εὐσταθεῖς (S) ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες.



Εἰκ. 10. Οἱ ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες τῆς ἀσταθοῦς περιοδικῆς τροχιᾶς (x=0.5, y=0) καλύπτουν ὅλο τὸ χῶρο ὅταν K=8.

2) Ἡ αὔξηση τοῦ μήκους τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν μὲ τὸ K εἶναι περίπου γραμμική. Πράγματι ἡ ἰδιοτιμὴ λ τῆς ἀσταθοῦς περιοδικῆς τροχιᾶς O εἶναι σχεδὸν ἀκριβῶς γραμμικὴ συνάρτηση τοῦ K (Σχ. 11). Κατὰ συνέπεια τὸ μῆκος τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν U καὶ S μέχρι τὴ μέγιστη ἀπόστασή τους ἀπὸ τὸ O (ποὺ ὀνομάζουμε «ἄκρον» τῶν καμπυλῶν) αὐξάνει σχεδὸν γραμμικά. Ἡ ἀρχικὴ ἐπιμή-

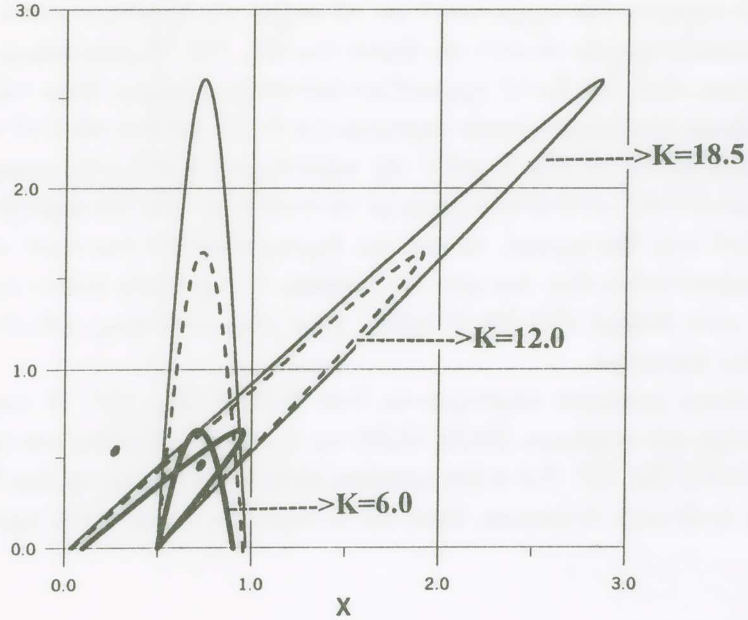


Σχ. 11. Ὁ δείκτης εὐσταθείας |λ| τῆς τροχιᾶς (x=0.5, y=0) συναρτήσει τοῦ δείκτου μὴ γραμμικότητος K.

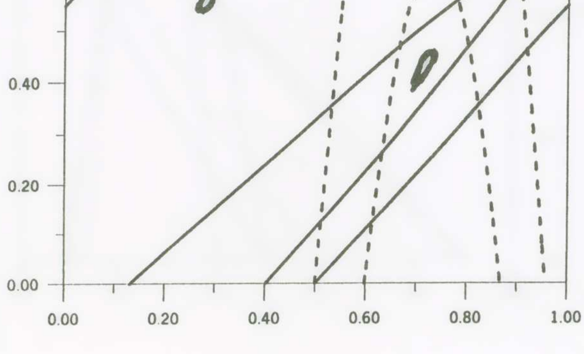
κυνση γίνεται κατὰ τὶς διευθύνσεις τῶν ἰδιοδιανυσμάτων τῆς τροχιᾶς O (Σχ. 12) ποὺ ἔχουν περίπου τὶς ἴδιες διευθύνσεις γιὰ κάθε K.

Ὅταν τὸ K γίνει περίπου K=12, τὸ ἄκρο τῆς καμπύλης U εὑρίσκεται στὸ τετράγωνο [(1,2), (1,2)] καὶ ἔχει περίπου τὴν ἴδια θέση ὡς πρὸς τὸ τετράγωνο αὐτὸ ὅπως τὸ ἄκρο τῆς U γιὰ K=6 ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸ τετράγωνο [(0,1), (0,1)]. Ὁμοίως τὸ ἄκρο τῆς S γιὰ K=12 εὑρίσκεται στὸ τετράγωνο [(0,1), (1,2)] καὶ στὴν ἴδια περίπου θέση ὡς πρὸς τὸ τετράγωνο αὐτὸ ὅπως τὸ ἄκρο τῆς S γιὰ K=6 ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸ τετράγωνο.

Οἱ περιοχὲς τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν U καὶ S γιὰ K=12 ἐπαναφέρονται, λόγῳ τοῦ modulo 1, στὸ τετράγωνο [(0,1), (0,1)] (Σχ. 13) καὶ ἔχουν παρόμοια μορφὴ καὶ θέση ὅπως οἱ καμπύλες U καὶ S γιὰ K=6 (Σχ. 9).



Σχ. 12. Οἱ ἀσυμπτωτικὲς καμπύλες τῆς τροχιᾶς (x=0.5, y=0) χωρὶς τὸ modulo 1 γιὰ K=6, K=12 καὶ K=18.5.



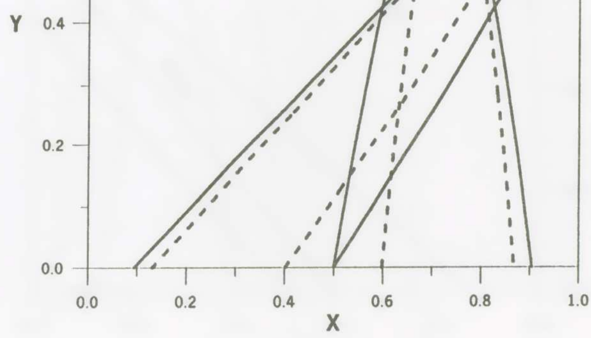
Σχ. 13. Ὅπως στὸ Σχ. 8 γιὰ K=12. Ἡ τελεία παριστᾶ τὴν ἀσταθὴ περιοδικὴ τροχιὰ τῆς ἀρχικῆς οἰκογενείας O_1.

Μιὰ σύγκριση τῶν σχημάτων 9 καὶ 13 δείχνει τὴν ὁμοιότητα τῶν τόξων τῶν ἀσυμπτωτικῶν τροχιῶν πλησίον τῶν ἄκρων των (Σχ. 14). Ἡ μόνη διαφορὰ εἶναι ὅτι οἱ καμπύλες αὐτὲς γιὰ K=12 σχηματίζουν λεπτότερους λοβούς, λόγω τοῦ μεγαλυτέρου μήκους τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν γιὰ K=12 ἀπὸ ὅ,τι γιὰ K=6 (Σχ. 12).

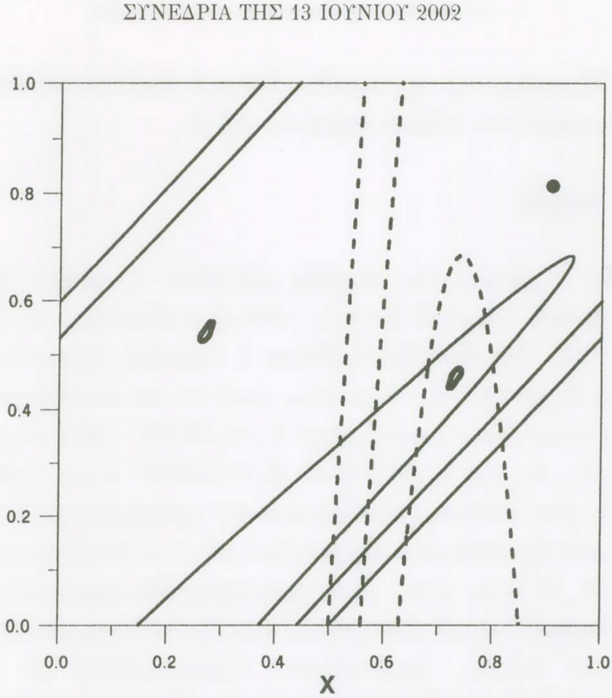
Δεδομένου ὅτι τὰ τόξα U καὶ S τῆς περιπτώσεως K=12 στὴν περιοχὴ κοντὰ στὸ σημεῖο (x=0.7, y=0.4) εἶναι ὅμοια μὲ τὰ ἀντίστοιχα τόξα τῶν καμπυλῶν U καὶ S γιὰ K=6 στὴν ἴδια περιοχή, τὸ κενὸ ποὺ δημιουργεῖται στὸ ἐσωτερικὸ τῶν ἀλληλοτεμνομένων λοβῶν εἶναι παρόμοιο καὶ ἐπιτρέπει τὴ δημιουργία ὁμοίων νησίδων.

Ἡ μόνη διαφορὰ εἶναι ὅτι οἱ νησίδες τώρα εἶναι μικρότερες, δεδομένου ὅτι οἱ λοβοὶ εἶναι λεπτότεροι.

Ἀνάλογα φαινόμενα παρατηροῦνται ὅταν K=18.5 (Σχ. 15). Ἡ καμπύλη U φθάνει τώρα στὸ τετράγωνο [(2,3), (2,3)] καὶ ἡ καμπύλη S φθάνει στὸ τετράγωνο [(0,1), (2,3)] (Σχ. 12). Καὶ οἱ δύο καμπύλες αὐτὲς ἔχουν περίπου τὶς ἴδιες θέσεις ὡς πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τετράγωνα, ὅπως καὶ οἱ καμπύλες U καὶ S τῆς περιπτώσεως



Σχ. 14. Σύγκριση τῶν τόξων τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν U καὶ S κοντὰ στὰ ἄκρα τους γιὰ K=6 (——) καὶ K=12 (- - -).



Σχ. 15. Ὅπως στὸ Σχ. 13 γιὰ K=18.5.

K=6 ὡς πρὸς τὸ τετράγωνο [(0,1), (0,1)] ἔχουν παρεμφερὴ θέση καὶ δομὴ (Σχ. 15). Ἔτσι δημιουργοῦν ἕνα ἀντίστοιχο κενό, ὅπου σχηματίζονται νησίδες εὐσταθείας.

3) Ἀνάλογα φαινόμενα παρατηροῦνται γιὰ ὅλες τὶς τιμὲς τοῦ K ποὺ δίνονται ἀπὸ τὴν ἀκολουθία τιμῶν (2).

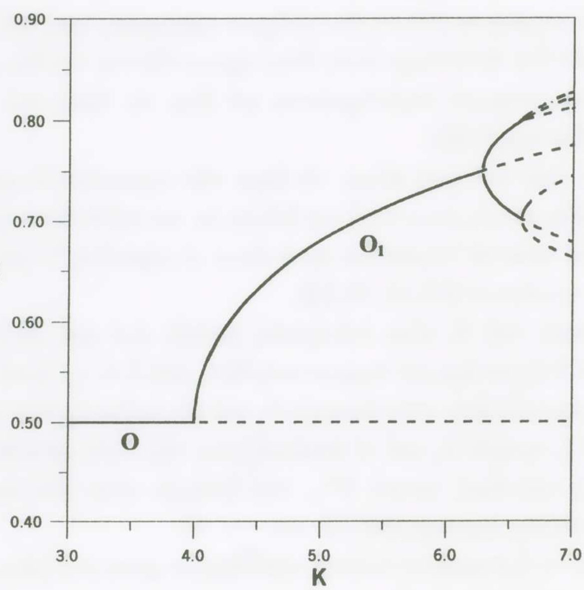
Ὅταν τὸ K ἔχει τὶς τιμὲς αὐτές, τὰ ἄκρα τῶν καμπυλῶν U καὶ S εὑρίσκονται στὰ τετράγωνα [(n, n+1), (n, n+1)] καὶ [(0,1), (n, n+1)] ἀντίστοιχα, καὶ στὶς ἴδιες περίπου θέσεις ὡς πρὸς τὰ τετράγωνα αὐτὰ ὅπως οἱ καμπύλες U καὶ S γιὰ K=6 ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸ τετράγωνο [(0,1), (0,1)].

Ὅταν οἱ τιμὲς τοῦ K εἶναι ἐνδιάμεσες μεταξὺ 6.6 καὶ 11.9, οἱ λοβοὶ τῶν καμπυλῶν U καὶ S ἔχουν ἀρκετὰ διαφορετικὴ θέση ἀπὸ ὅ,τι γιὰ K=6 καὶ γιὰ K=12, ὥστε τέμνονται παντοῦ μέσα στὴν περιοχὴ O_1 καὶ δὲν ἀφήνουν χῶρο γιὰ νησίδες. Γιὰ 6.63<K<11.89 ἡ τροχιὰ O_1 καὶ οἱ διακλαδώσεις της εἶναι ἀσταθεῖς, ἐνῶ ἡ ἀντίστοιχη εὐσταθὴς περιοδικὴ τροχιὰ O^*_1, ποὺ ὑπάρχει στὴν ἴδια περίπου θέση γιὰ K=12, δὲν ἔχει ἀκόμη δημιουργηθεῖ (ἰδ. παράγρ. 4).

Ἔτσι ἐξηγεῖται ἡ ἐπαναληπτικότης τῶν νησίδων μέσα στὸ χάος. Νησίδες δημιουργοῦνται ὅταν οἱ θέσεις τῶν ἄκρων τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν U καὶ S εἶναι παρόμοιες (modulo 1) μὲ τὶς καμπύλες U καὶ S γιὰ K=6 σὲ ἀντίστοιχα τετράγωνα (Σχ. 12). Ἡ σταθερότης τῆς περιόδου ΔΚ=6.3 ὀφείλεται στὸ ὅτι τὸ μῆκος τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν αὐξάνει ἀναλόγως τοῦ Κ.

4. Περιοδικὲς τροχιὲς

Οἱ νησίδες δημιουργοῦνται πλησίον εὐσταθῶν περιοδικῶν τροχιῶν. Ὅταν $0<K<4$, ἡ περιοδικὴ τροχιὰ Ο ($x=0.5$, $y=0$) εἶναι εὐσταθής, καὶ ὅταν $K>4$, εἶναι ἀσταθὴς (Σχ. 16). Γιὰ $K=4$ διακλαδίζεται ἡ περιοδικὴ τροχιὰ O_1, ἡ ὁποία εἶναι εὐσταθὴς μέχρι $K_2=6.28319$. Ἀκολούθως αὐτὴ γίνεται ἀσταθὴς καὶ διακλαδίζεται ἡ τροχιὰ O_2, ἡ ὁποία εἶναι εὐσταθὴς μέχρι $K_3=6.59382$. Στὴ συνέχεια ἐμφανίζονται οἱ τροχιὲς O_3, O_4, O_5, γιὰ $K_3=6.59382$, $K_4=6.63019$, κ.ο.κ. Κάθε τροχιὰ αὐτῆς τῆς ἀκολουθίας εἶναι διπλασίας περιόδου ἀπὸ τὴν προηγούμενη. Τὰ διαστήματα δΚ μεταξὺ διαδοχικῶν διακλαδώσεων σχηματίζουν φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδο μὲ λόγο περίπου $\delta=8.72$. Ὁ λόγος αὐτὸς εἶναι παγκόσμιος καὶ παρουσιάζεται σὲ ὅλες τὶς δικρανοειδεῖς διακλαδώσεις σὲ συντηρητικὰ συστήματα (Benettin et al. 1980). Σὰν συνέπεια αὐτοῦ ἄπειρες διακλαδώσεις δημιουργοῦνται σὲ ἕνα διάστημα $(K_4-K_3)/[1-(1/8.72)] \approx 0.04108$ πέραν τοῦ K_3. Ἑπομένως οἱ ἄπειρες διακλαδώ-

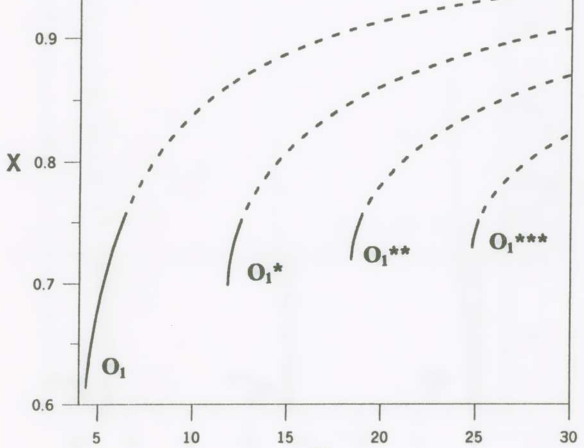


Σχ. 16. Χαρακτηριστικὲς τῶν περιοδικῶν τροχιῶν Ο, O_1 καὶ οἱ διακλαδώσεις των.

σεις συγκλίνουν στὴν τιμὴ K_∞=6.6349. Ἂν τὸ Κ γίνει μεγαλύτερο τοῦ K_∞=6.6349, ἔχουμε ἄπειρες ἀσταθεῖς περιοδικὲς τροχιές.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ Σχ. 16 ἡ περιοδικὴ τροχιὰ O_1 μετατοπίζεται σὲ μεγαλύτερα x καθὼς τὸ Κ αὐξάνει. Ὁμοίως τὸ y τῆς O_1 μετατοπίζεται σὲ μεγαλύτερες τιμὲς μὲ τὴν αὔξηση τοῦ Κ. Παραδείγματος χάριν γιὰ Κ=12 καὶ Κ=18.5 οἱ θέσεις τῆς ἀσταθοῦς τροχιᾶς O_1 σημειώνονται ὡς τελεῖες στὰ σχήματα 13 καὶ 15 ἀντίστοιχα. Σ' αὐτὲς τὶς θέσεις ὑπάρχει χάος τόσο γιὰ Κ=12, ὅσο καὶ γιὰ Κ=18.5.

Ἑπομένως οἱ τροχιὲς O_1 γιὰ μεγάλα Κ φεύγουν μακριὰ ἀπὸ τὴν περιοχὴ τοῦ σημείου (x=0.7, y=0.4) ὅπου δημιουργοῦνται οἱ νέες νησίδες. Γιὰ Κ=12 καὶ Κ=18.5 οἱ νέες περιοδικὲς τροχιὲς ποὺ δημιουργοῦνται δὲν προέρχονται ἀπὸ διακλάδωση τῆς τροχιᾶς O_1. Εἶναι «ἀνώμαλες» (irregular) περιοδικὲς τροχιὲς (Contopoulos 1970) ποὺ δημιουργοῦνται κατὰ ζεύγη (μιὰ εὐσταθὴς καὶ μιὰ ἀσταθὴς) ἐκ τοῦ μηδενός. Οἱ χαρακτηριστικὲς καμπύλες τῶν τροχιῶν αὐτῶν δίνονται στὸ Σχ. 17. Στὸ σχῆμα αὐτὸ δίδονται οἱ συντεταγμένες x τῶν περιοδικῶν τροχιῶν O_1, O_1*, O_1**, O_1***, ποὺ δημιουργοῦνται ὅταν Κ=4 (O_1=κανονικὴ (regular) περιοδικὴ τροχιά), καὶ πλησίον τῶν τιμῶν Κ=12 (O_1*), Κ=18.5 (O_1**) καὶ Κ=25 (O_1***). Ἀκριβέστερα οἱ τροχιὲς αὐτὲς ἐμφανίζονται γιὰ

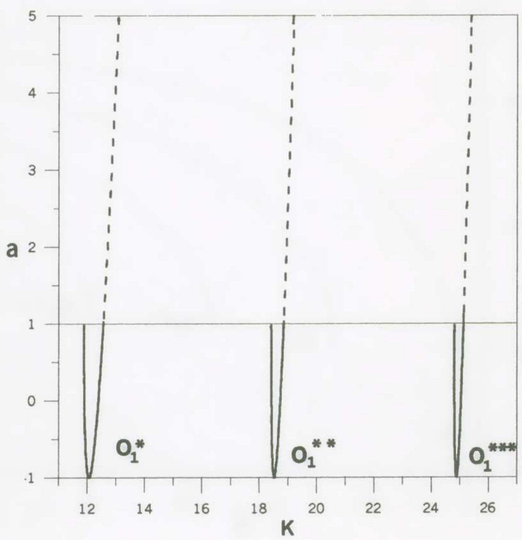


Σχ. 17. Χαρακτηριστικὲς τῶν περιοδικῶν τροχιῶν O_1, O_1*, O_1**, O_1***. (—) εὐσταθεῖς, (- - -) ἀσταθεῖς.

K=11.889, K=18.432 καὶ K=24.821. Οἱ τροχιὲς O_1*, O_1**, O_1***, εἶναι ἀνώμαλες. Δημιουργοῦνται ὡς εὐσταθεῖς περιοδικὲς τροχιὲς σὲ ἕνα ἐλάχιστο K ἡ κάθε μία, μαζὶ μὲ μία ἀσταθὴ περιοδικὴ τροχιά, ἡ ὁποία δὲν σημειώνεται στὸ σχῆμα αὐτό.

Ἡ εὐστάθεια τῶν τροχῶν O_1*, O_1**, O_1*** δίνεται στὸ Σχ. 18. Ἡ εὐστάθεια ἢ ἀστάθεια τῶν τροχιῶν χαρακτηρίζεται ἀπὸ μία «παράμετρο εὐσταθείας a» (Hénon 1965) συναρτήσει τοῦ K. Οἱ τροχιὲς εἶναι εὐσταθεῖς ὅταν $|a|<1$ καὶ ἀσταθεῖς ὅταν $|a|>1$. Οἱ νέες τροχιὲς εἶναι ἀρχικὰ εὐσταθεῖς ἐνῶ γιὰ μεγαλύτερα K γίνονται ἀσταθεῖς καὶ ἡ ἀστάθειά τους αὐξάνει καθὼς τὸ K αὐξάνει.

Κάθε εὐσταθὴς περιοδικὴ τροχιὰ ποὺ γίνεται ἀσταθὴς ἀκολουθεῖται ἀπὸ μία ἀκολουθία ἄπειρων εὐσταθῶν περιοδικῶν τροχιῶν μὲ διπλασιασμὸ τῆς περιόδου σὲ κάθε διακλάδωση, οἱ ὁποῖες καλύπτουν ἕνα μικρὸ διάστημα τιμῶν τοῦ K. Οἱ ἀκολουθίες αὐτὲς καταλήγουν σὲ μιὰ ἀπειρία ἀσταθῶν περιοδικῶν τροχιῶν ποὺ δημιουργοῦν χάος. Ἐπομένως οἱ νησίδες εὐσταθείας γύρω στὶς τιμὲς K=12, K=18.5, K=25 κλπ. ἀφοροῦν μικρὰ διαστήματα τιμῶν τοῦ K ἐνῶ ἔξω ἀπὸ τὰ διαστήματα αὐτὰ τὸ χάος κυριαρχεῖ.



Σχ. 18. Ὁ δείκτης εὐσταθείας *a* συναρτήσει τοῦ K γιὰ τὶς οἰκογένειες περιοδικῶν τροχιῶν ποὺ δημιουργοῦνται γιὰ K=11.89, K=18.41 καὶ K=24.81.

5. Περιοδικὲς τροχιὲς στὸν ἄξονα x

Οἱ δευτερεύουσες νησίδες τῶν Σχ. 5 καὶ 6 ποὺ εὑρίσκονται κατὰ τὸν ἄξονα x(y=0, καὶ y=1) περιβάλλουν εὐσταθεῖς περιοδικὲς τροχιὲς οἱ ὁποῖες εὑρίσκονται ἀκριβῶς πάνω στὸν ἄξονα x (Σχ. 7).

Οἱ περιοδικὲς αὐτὲς τροχιὲς δημιουργοῦνται ὅταν y′=y (modulo 1) δηλαδὴ ὅταν

$$\frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x) = 1 \quad (\text{modulo } 1) \tag{5}$$

Ἂς θεωρήσουμε τὴν περίπτωση $(K/2\pi)\sin(2\pi x)=1$. Τότε ἡ ἐξίσωση

$$\sin(2\pi x) = \frac{2\pi}{K} \tag{6}$$

ἔχει λύση ὅταν

$$K \geq 2\pi \tag{7}$$

Διὰ $K=2\pi$, εἶναι $2\pi x=\pi/2$, ἄρα $x= 1/4$. Ὅταν $K>2\pi$, τότε τὸ x ἔχει δύο τιμές, μία στὸ διάστημα $0<x<1/4$ καὶ μία στὸ διάστημα $1/2>x>1/4$. Οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν y καὶ y′ εἶναι y′=0 καὶ y′=1 (ἄρα y′=0 modulo 1).

Ἀνάλογες τιμὲς εὑρίσκονται ὅταν $\sin(2\pi x)=-2\pi/K$. Τότε ὑπάρχουν δύο λύσεις γύρω ἀπὸ τὸ $x=-1/4$ ($=3/4$ modulo 1) μία μεγαλύτερη καὶ μία μικρότερη ἀπὸ τὸ $x=3/4$.

Ἡ εὐστάθεια τῶν τροχιῶν αὐτῶν εὑρίσκεται ἂν ὑπολογίσουμε τὶς ἰδιοτιμὲς λ τῶν ἀπειροστῶν μεταβολῶν ἀπὸ τὶς περιοδικὲς τροχιές. Αὐτὲς προκύπτουν ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} \delta x' &= \delta x+\delta y+K\cos(2\pi x)\delta x=\lambda\delta x \\ \delta y' &= \delta y+K\cos(2\pi x)\delta x=\lambda\delta y \end{aligned} \tag{8}$$

ἀπὸ τὶς ὁποῖες προκύπτει

$$\lambda^2-2\left(1+\frac{K}{2}\cos(2\pi x)\right)\lambda+1=0 \tag{9}$$

Ὅταν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $1+(K/2)\cos(2\pi x)$ εἶναι μεγαλύτερη τοῦ 1, ἡ τροχιὰ εἶναι ἀσταθὴς καὶ ὅταν εἶναι ἀπολύτως μικρότερη τοῦ 1, ἡ τροχιὰ εἶναι εὐσταθής.

Ἑπομένως οἱ τροχιὲς μὲ $0<x<1/4$ εἶναι πάντοτε ἀσταθεῖς (ὁμοίως καὶ οἱ τροχιὲς μὲ $1>x>3/4$) καὶ δὲν δημιουργοῦν νησίδες γύρω τους (Σχ. 7). Ἀντιθέτως, οἱ τροχιὲς μὲ $1/2>x>1/4$ (ἢ $1/2<x<3/4$) εἶναι εὐσταθεῖς καὶ δημιουργοῦν γύρω τους νησίδες ὅταν $1+K/2\cos(2\pi x)>-1$, ὅπου

$$\cos(2\pi x) = -\left(1-\left(\frac{2\pi}{K}\right)^2\right)^{1/2} \tag{10}$$

ἄρα

$$4 > K-\left(1-\left(\frac{2\pi}{K}\right)^2\right)^{1/2} \tag{11}$$

ἤ

$$K < 2\pi\left(1+\left(\frac{4}{\pi^2}\right)\right)^{1/2} \tag{12}$$

Οἱ δευτερεύουσες τροχιὲς δίνονται ἀπὸ τὶς σχέσεις

$$x = \pm\frac{1}{2\pi}\sin^{-1}\left(\frac{2\pi}{K}\right)(\text{modulo } 1) \tag{13}$$

καὶ εἶναι εὐσταθεῖς ὅταν

$$2\pi < K < 2\pi\left(1+\frac{4}{\pi^2}\right)^{1/2} \tag{14}$$

δηλαδὴ $6.283<K<7.448$

Οἱ τροχιὲς αὐτὲς δημιουργοῦν διακλαδώσεις λόγω συντονισμῶν καὶ σὲ κάθε συντονισμὸ παρατηροῦνται ἀπότομες ἐλαττώσεις τοῦ μεγέθους τῶν νησίδων. Π.χ. στὸν συντονισμὸ 1/3 οἱ νησίδες ἐξαφανίζονται στιγμιαῖα (γιὰ μία μόνο τιμὴ τοῦ K) (Σχ. 5, 6).

Παρόμοια φαινόμενα παρατηροῦνται ὅταν

$$\frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x) = \pm 2 \tag{15}$$

Τότε ἔχουμε νέες περιοδικὲς τροχιὲς ὅταν $K\geq 4\pi$, ποὺ εὑρίσκονται στὰ σημεῖα

$$x = \pm\frac{1}{2\pi}\sin^{-1}\left(\frac{4\pi}{K}\right)\ (\text{modulo } 1) \tag{16}$$

Δύο τροχιὲς εἶναι ἀσταθεῖς καὶ δύο εὐσταθεῖς ὅταν

$$4\pi < K < 4\pi\left(1+\frac{1}{\pi^2}\right)^{1/2} \tag{17}$$

Οἱ εὐσταθεῖς τροχιὲς δημιουργοῦν νησίδες ὅπως εἰς τὰ Σχ. 5, 6 (ἐστιγμένες γραμμές). Ἀνάλογα φαινόμενα ἐμφανίζονται ὅταν $K>6\pi$, $K>8\pi$ κλπ.

6. Συμπεράσματα

Διαπιστώσαμε ὅτι ὑπάρχει μιὰ ἐπαναληπτικότητα στὸ χάος ποὺ δημιουργεῖται στὴν «τυπικὴ ἀπεικόνιση» (1) γιὰ μεγάλες τιμὲς τῆς μὴ γραμμικότητος K. Δηλαδὴ γιὰ τιμὲς τοῦ K ποὺ ἀπέχουν μεταξύ τους ΔK=6.3 ἐμφανίζονται νησίδες εὐσταθείας σὲ ἕνα μικρὸ διάστημα τιμῶν τοῦ K.

Ἡ ἐπαναληπτικότης αὐτὴ ἐξηγεῖται ἀπὸ τὴ μορφὴ τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν τῆς βασικῆς ἀσταθοῦς περιοδικῆς τροχιᾶς (x=0.5, y=0). Οἱ ἀσυμπτωτικὲς αὐτὲς καμπύλες περιβάλλουν τὶς νησίδες (ὅταν ὑπάρχουν νησίδες). Τὸ μῆκος τῶν ἀσυμπτωτικῶν τροχιῶν αὐξάνει περίπου γραμμικὰ μὲ τὸ K. Ὅταν τὸ K αὐξάνει κατὰ ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ ΔK=6.3, τὰ ἄκρα τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν U καὶ S, χωρὶς τὸ modulo 1, εὑρίσκονται στὴν ἴδια περίπου θέση ὡς πρὸς τὰ τετράγωνα [(n, n+1), (n, n+1)] καὶ [(0,1), (n, n+1)] ἀντίστοιχα, ὅπως καὶ οἱ καμπύλες U καὶ S γιὰ K=6 σὲ σχέση μὲ τὸ ἀρχικὸ τετράγωνο [(0.1), (0.1)]. Ἡ μορφὴ τῶν τόξων τῶν ἀσυμπτωτικῶν καμπυλῶν πλησίον τῶν ἄκρων των εἶναι παρόμοια, καὶ αὐτὸ ἐξηγεῖ τὴν δημιουργία παρομοίων κενῶν, ὅπου ἐμφανίζονται οἱ νησίδες.

Οἱ νησίδες περιβάλλουν εὐσταθεῖς περιοδικὲς τροχιές, οἱ ὁποῖες δημιουργοῦνται στὶς ἴδιες περίπου θέσεις (πλησίον τοῦ σημείου (x=0.7, y=0.4). Οἱ τροχιὲς αὐτές, ἐκτὸς ἀπὸ τὴν πρώτη O_1, ποὺ εἶναι εὐσταθὴς μεταξὺ K=4 καὶ K=6.28, εἶναι ἀνώμαλες, δηλαδὴ δημιουργοῦνται ἐκ τοῦ μηδενὸς σὲ μιὰ ἐλάχιστη τιμὴ τοῦ K κάθε μία. Οἱ τροχιὲς αὐτὲς γίνονται ἀσταθεῖς γιὰ λίγο μεγαλύτερα K, ἀφοῦ σχηματίσουν μία ἀκολουθία διακλαδώσεων, ποὺ ὁδηγεῖ σὲ ἄπειρες ἀσταθεῖς περιοδικὲς τροχιές, οἱ ὁποῖες δημιουργοῦν χάος εἰς τὴν περιοχὴ τοῦ σημείου (x=0.7, y=0.4).

Ἑπομένως τὸ χάος, τὸ ὁποῖον κυριαρχεῖ γιὰ μεγάλες τιμὲς τοῦ K δὲν εἶναι πλῆρες, ἀλλὰ περιλαμβάνει νησίδες εὐσταθείας, οἱ ὁποῖες ἐπαναλαμβάνονται κατὰ περιοδικὸ τρόπο καθὼς τὸ K αὐξάνει.

Παρόμοια φαινόμενα ἐπαναληπτικότητος στὸ χάος, ἐμφανίζονται σὲ ἄλλες ἀπεικονίσεις, ἀλλὰ καὶ σὲ δυναμικὰ συστήματα ὅπως εἶναι οἱ γαλαξίες καὶ τὸ παγιδευμένο πλάσμα. Ἑπομένως τὰ φαινόμενα αὐτὰ φαίνεται ὅτι εἶναι πολὺ γενικὰ καὶ ἡ πρακτική τους σημασία μεγάλη. Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ ἐλπίζουμε νὰ μπορέσουμε νὰ ἐντοπίσουμε περιοχὲς εὐσταθείας σὲ πολὺ χαοτικὰ συστήματα, ὅπως εἶναι τὸ πλάσμα. Αὐτὸ θὰ βοηθήσει σημαντικὰ στὸν προγραμματισμὸ τῆς παγιδεύσεως τοῦ πλάσματος ἀκόμη καὶ ὅταν ἡ ἐνέργεια τῶν σωματίων τοῦ πλάσματος εἶναι μεγάλη.

SUMMARY

The distinction between order and chaos in a dynamical system is done by considering the distribution of the successive intersections of the orbits by a Poincaré surface of section. The successive intersections define a map. A representative map is the "standard map" $x'=x+y'$, $y'=y+(K/2\pi)\sin(2\pi x)$ (modulo 1). When the parameter K increases chaos increases in general, and it appears to be complete when K=8. However, important islands of stability were observed for much larger K, e.g. K=12, 18.5 etc. The appearance of islands is recurrent with a period about $\Delta K=6.3$. The islands that exist for K=6 reappear in approximately the same positions for K = 12, etc. As K increases these islands increase and decrease in size in a characteristic way that seems to be universal (generic). For a little larger K the islands disappear, but they reappear near K=18.5, etc. We give a topological explanation of this phenomenon. Some islands are explained by analytic calculations. We study in particular the periodic orbits around which the islands are formed.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Benettin, G., Cercignani, C., Galgani, L. and Giorgilli, A.: 1980, *Lett.Nuovo Cim.* **28**, 1.

Contopoulos, G.: 1970, *Astron. J.* **75**, 96.

Contopoulos, G., Harsoula, M., Voglis, N. and Dvorak, R.: 1999, *J. Phys. A* **32**, 5213.

Duarte, P.: 1994, *Ann.Inst.Henri Poincaré* **11**, 359.

Hénon, M.: 1965, *Ann. Astrophys.* **28**, 992.

Newhouse, S.E.: 1983, in Iooss, G., Helleman, R.H.G. and Stora, R. (eds) "Chaotic Behaviour of Deterministic Systems", *North Holland*, Amsterdam, 443.