

Παραδείγματος χάριν, διὰ:  $c_n = n^n$

ή σειρά  $\sigma(x) = x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \dots + n^n x^n + \dots$

ἀποκλίνει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ  $x$ .

Τὸ  $R$  διὰ τὴν  $\sigma(x) = 1$  τείνει εἰς τὸ μηδὲν διότι  $R < \frac{1}{n}$ .

#### R É S U M É

M. P. Montel à montré que tout polynome  $a_0 + a_1x + \dots + a_px^p + \dots + a_nx^n$ , pour lequel les  $p+1$  premiers coefficients sont fixes admet  $p$  zéros dont les modules ne dépassent pas un nombre, qui ne depend que des coefficients fixes, et du nombre des termes figurant effectivement dans le polynome.

Dans cet ordre d'idées nous considerons une suite infinie de nombres positifs  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ , tels que

$$a_i \leq c_i \quad i = 1, 2, \dots$$

et nous cherchons les conditions pour lesquelles les zéros des polynomes

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

aient leurs modules bornés.

#### ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ· **Le calcul des ponts suspendus à tablier rigide par l'ellipse d'élasticité\***. *Note de Athan. Broïkos.* Présentée par C. Maltezos.

Un système constitué par un cable appuyé sur deux pylônes  $A_0$  et  $B_0$  amarré à ses deux extrémités  $A_1$  et  $B_1$  et auquel est suspendu une poutre triangulée quelconque à deux appuis simples, dénommée tablier rigide, est ce qu'on appelle un pont suspendu à tablier rigide (fig. 1). Par la présente note je me propose de montrer comment on peut arriver au calcul complet et rigoureux d'un pareil système au moyen de l'ellipse d'élasticité dont nous avons montré ailleurs<sup>1</sup> les propriétés essentielles et la féconde utilité. Rappelons tout d'abord brièvement quelques notions préliminaires.

Le système ci-haut défini est hyperstatique d'ordre  $k = b + l - 2n$ , où  $b$

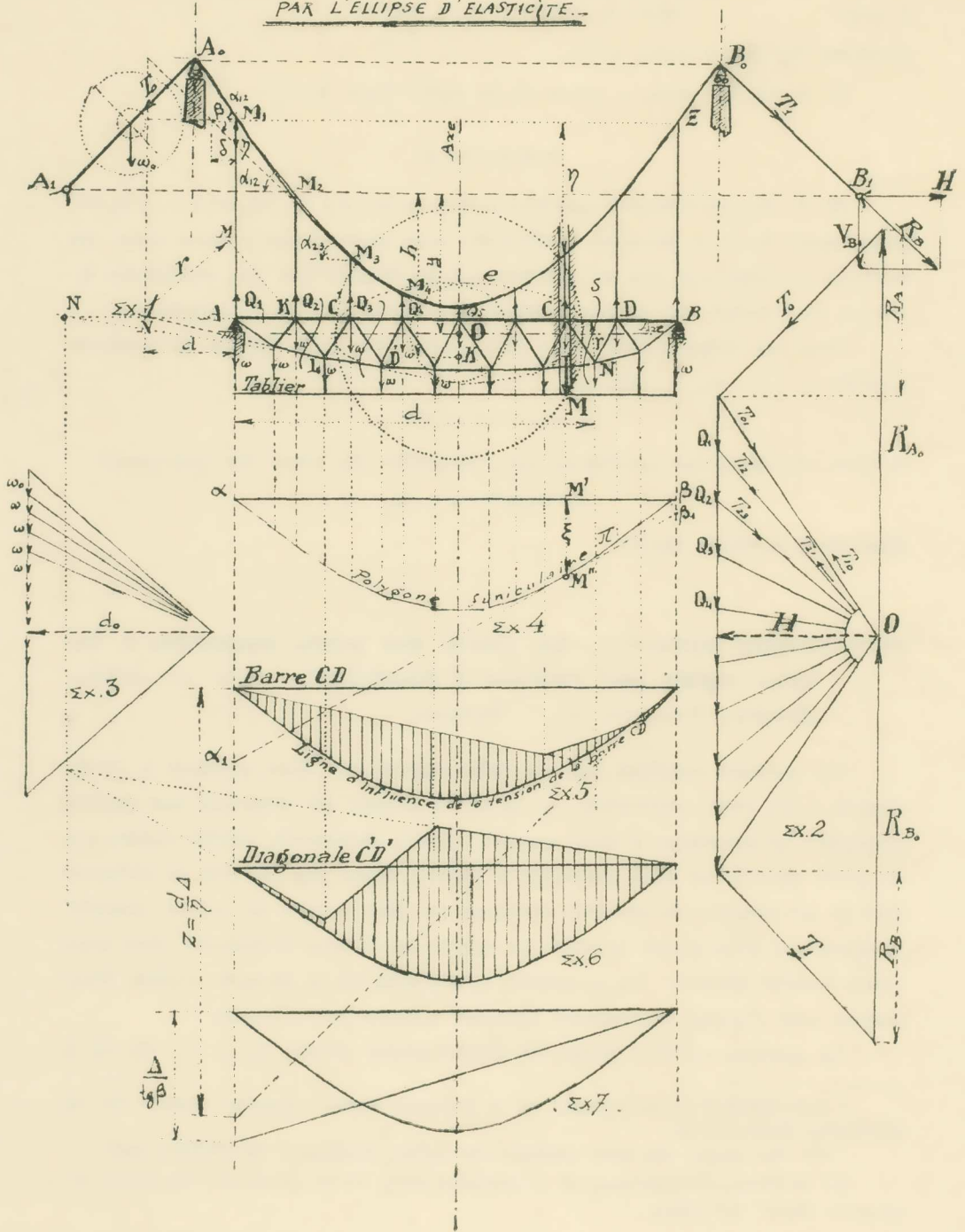
\* ΑΘΑΝ. ΜΠΡΟΪΚΟΣ. Ὁ ὑπολογισμὸς τῶν δι' ἀκάμπτων φορέων κρεμαστῶν γεφυρῶν διὰ τῆς ἐλλείψεως ἐλαστικότητας.

<sup>1</sup> Cf. «Le calcul des arcs continus sur appuis élastiques» ΠΡΑΚΤΙΚΑ 1941.

β) Ἡ ἔλλειψις ἐλαστικότητας καὶ αἱ ἐφαρμογαὶ αὐτῆς εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ὑπερστ. συστημάτων ΤΕΧΝ. ΧΡΟΝΙΚΑ.

LE CALCUL DES PONTS SUSPENDUS À TABLIER RIGIDE

PAR L'ELLIPSE D'ELASTICITÉ...



désigne le nombre total des barres,  $l$  celui des liaisons et  $n$  celui des nœuds. Si de plus  $b_1$  est le nombre total des barres de la poutre et  $n_1$  celui de ses nœuds, la poutre étant strictement indéformable on a :  $b_1 = 2n_1 - 3$ . Soit  $n_2$  le nombre des sommets  $M_1, M_2$  etc. On a évidemment :

$$b = b_1 + n_2 + (n_2 + 1) + 2 = b_1 + 2n_2 + 3$$

et 
$$n = n_1 + n_2 + 4$$

enfin : 
$$l = 3 + 2 + 4 = 9$$

On aura p. e : 
$$k = b_1 + 2n_2 + 3 + 9 - 2(n_1 + n_2 + 4)$$

e. a. d. 
$$k = 1$$

Le pont suspendu est donc un système hyperstatique du premier ordre ; il devient statiquement déterminé par la suppression d'un seul élément.

*Cable, réactions, poussée.* — Lorsque des charges données agissent sur la poutre, des tensions prennent naissance dans les brins du cable et les tiges de suspension. Coupons, par la pensée, toutes les tiges reliant la poutre et le cable au voisinage des sommets  $M_1, M_2$  etc. et supprimons toutes les parties inférieures en remplaçant leurs effets par des forces équivalentes. Soient  $Q_1, Q_2 \dots Q_n$  les tensions dans les tiges successives et admettons qu'elles ont été déterminées. Formons leur polygone des forces (fig. 2).

Coupons le 1<sup>er</sup> côté du cable au voisinage de  $M_1$  et supprimons la partie gauche en la remplaçant par la tension équivalente  $T_{10}$ , de même supprimons de 2<sup>me</sup> brin à droite en introduisant  $T_{12}$ . Le nœud  $M_1$  étant libre et sollicité par les forces  $T_{10}, T_{12}, Q_1$  et devant se trouver en équilibre le triangle de ces 3 forces doit être fermé. Coupons de la même façon le brin  $M_1 M_2$  en introduisant  $T_{21}$  et  $T_{23}$ . Le nœud  $M_2$  est libre et doit être en équilibre sous l'action de  $Q_2, T_{21}, T_{23}$  ; il en résulte que le triangle de ces 3 forces doit être fermé. En continuant ainsi de proche en proche on en conclut que "Le cable est un polygone funiculaire relatif aux forces  $Q$  qui sont les tensions dans les tiges reliant le cable à la poutre..".

Opérons ensuite une section du brin  $A_0 M_1$  dans le voisinage de  $A_0$  en introduisant la tension  $T_{01}$ . Introduisons de même  $T_0$ . Le nœud  $A_0$  étant libre et sollicité par les forces  $T_0, T_{01}, R_{A_0}$  et devant se trouver en équilibre ces 3 forces doivent former un triangle fermé. Même raisonnement pour  $B_0$  ce qui fournit  $R_{B_0}$  et  $T_1$ . Quant aux réactions  $R_A$  et  $R_B$  de la poutre elles résultent immédiatement de la fig. 2. Il suffit de retrancher de chacune des réactions  $R_{A_0}$  et  $R_{B_0}$  la demi-somme des  $Q$ .



Considérons le brin  $M_1 M_2$  dont la tension est  $T_{12}$ . Sa projection horizontale est égale à la distance polaire  $H$  du polygone des forces. Ceci est vrai pour tous les brins du cable même pour les brins d'amarrage. *Ainsi la projection horizontale de la tension d'un brin quelconque est constante et est égale à la distance polaire  $H$  (fig. 2).*

Supposons enfin que par un procédé quelconque on a pu déterminer  $H$ ; dans ce cas il est possible de calculer tout le système. Portons en effet la quantité  $H$  sur une horizontale, puis la verticale à son extrémité gauche. Par le pôle  $O$  menons des parallèles à tous les brins du cable. La fig. 2 donne alors les tensions dans les brins du cable, les tensions  $Q$ , les tensions dans les brins d'amarrage ainsi que les réactions des pylones et de la poutre. Reste à trouver les tensions dans les barres de la poutre  $A$  cet effet coupons les tiges de suspension de la poutre, au voisinage de la poutre et supprimons les parties supérieures en introduisant les tensions équivalentes  $Q_1, Q_2, \dots, Q_v$ . La poutre  $AB$  est une poutre à deux appuis simples, isolée, sollicitée par les charges  $P_1, P_2, \dots, P_v$  et les forces  $Q_1, Q_2, \dots, Q_v$ , toutes connues; une figure réciproque donnerait p. ex. les tensions dans toutes les barres de la poutre. *On voit ainsi que la détermination effective de  $H$  permet en effet le calcul complet de pont suspendu.*

Considérons l'amarrage  $B_1$  et cherchons la réaction exercée par cet ouvrage dans le cable. Supprimons les deux liaisons que nous remplaçons par la réaction  $R_{B_1}$  inconnue. Coupons le câble près de  $B_1$  et supprimons la partie de haut en introduisant la tension équivalente  $T_1$ . Les deux forces  $T_1$  et  $R_{B_1}$  doivent se faire équilibre donc  $R_{B_1} = T_1$ . Décomposons  $R_{B_1}$  en deux composantes. On voit que  $H$  est encore égale à la projection horizontale de la réaction du nœud de l'amarrage. Ce nœud est un nœud fixe réalisé par deux liaisons simples et la composante horizontale de  $R_{B_1}$  n'est autre que la réaction de la liaison verticale. En effet supprimons les deux liaisons; pour la liaison verticale on doit introduire une réaction perpendiculaire c. a. d. horizontale, tandis que pour la liaison horizontale on doit introduire une réaction verticale. *Ainsi la quantité  $H$  au point de vue mécanique n'est autre chose que la réaction de la liaison verticale du nœud de l'amarrage  $B_1$ . Même raisonnement pour  $A_1$  et même résultat.*

*Détermination de  $H$  par l'ellipse d'élasticité.* Commençons par supprimer les appuis  $A$  et  $B$  de la poutre en les remplaçant par leurs poids

ελαστικές relatives.<sup>1</sup> On sait (cf. *ΤΕΧΝΙΚΑ ΧΡΟΝΙΚΑ* 1941, p. 273) que le poids élastique d'un appui simple A p. ex. de la poutre AB est :

$$g_A = g_B = \frac{J}{l^2}$$

où J désigne le moment d'inertie du système des poids élastiques de toutes les barres de la poutre p. r. à la verticale de B et l la longueur de la poutre. Il suffit de considérer les poids  $g_i = \frac{l_i}{EJ_i h_i^2}$  de toutes les barres appliquées à leur nœud opposés relatifs et de faire la somme des produits  $g_i x_i^2$ ,  $x_i$  étant la distance du nœud à la verticale de B, soit par le calcul, soit à l'aide d'un polygone funiculaire.

Supprimons de la même façon les appuis à rouleaux  $A_0$  et  $B_0$  du câble des pylones, en les remplaçant par leurs poids élastiques et leur ellipses d'élasticité. Pour des raisons maintes fois répétées ailleurs (1) le poids élastique de l'appui  $A_0$  est infiniment petit et son ellipse d'élasticité dégénère en une droite passant par  $A_0$  et perpendiculaire au plan de roulement de l'appui, de grand axe

$$2.i_A =$$

Ceci dit soit M un point quelconque auquel est appliquée la charge unité. Les liaisons en A, B,  $A_0$ ,  $B_0$  étant supprimées et remplacées par les éléments élastiques sus-dits, le système ne comporte que deux articulations en  $A_1$  et  $B_1$ . La force  $P = 1$  donne naissance aux deux réactions  $R_{A_1}$  et  $R_{B_1}$ . Soient  $V_{A_1}$  et  $V_{B_1}$  les composantes verticales de ces deux réactions et H la valeur commune de leur composante horizontale.

Supposons la section M parfaitement encastree et les sections  $A_1$  et  $B_1$  absolument libres et sollicitées respectivement par les forces  $V_{A_1}$  et  $V_{B_1}$ . Le point  $A_1$  subit un déplacement par rapport à la section M dont la projection  $\Delta u_1$  sur la ligne  $A_1 B_1$  est égale au produit de  $V_{A_1}$  par le moment centrifuge de tous les poids élastiques de la partie  $A_1 A_0 A M$  du système (y compris les poids élastiques dus aux liaisons supprimées) par rapport aux droites  $V_{A_1}$  et  $A_1 B_1$ . Or ce moment centrifuge, d'après une propriété connue des polygones funiculaires, se calcule comme suit:

Prennons comme vecteurs les produits  $g_i y_i = w_i$  des poids élastiques élémentaires  $g_i$  par les distances  $y_i$  des centres élastiques correspondants à

<sup>1</sup> Cf. "Η ἔλλειψις ἐλαστικότητας κλπ." ὑπὸ 'Αθ. Μπρόκου *ΤΕΧΝ. ΧΡΟΝΙΚΑ*, 1941.

la ligne des articulations  $A_1B_1$ . Sur ces vecteurs  $w_i$  considérés comme des forces verticales (fig. 3) appliquées aux antipôles de la droite  $A_1B_1$  p. r. aux ellipses élémentaires en ce qui concerne les brins du cable et les tiges de suspension et aux nœuds opposés pour les barres de la poutre AB, nous construisons un polygone funiculaire  $\pi^1$ ). Le moment centrifuge cherché est alors donné par le segment  $\alpha\alpha_1$  (fig. 4) détaché sur la verticale de A entre son intersection  $\alpha$  avec le polygone  $\pi$  et le point  $\alpha_1$  où elle coupe le côté extrême passant par le point  $M''$ ; ce côté est la tangente en  $M''$  si le polygone devient une courbe. Ainsi nous avons pour  $A_1$  :

$$\Delta u_1 = V_{A_1} \cdot \overline{\alpha\alpha_1}$$

de même pour  $B_1$  :

$$\Delta u_2 = V_{B_1} \cdot \overline{\beta\beta_1}$$

en désignant par  $\overline{\beta\beta_1}$  le segment découpé sur la verticale du point B par le polygone  $\pi$  et le côté de ce polygone passant par  $M''$ .

*Voici maintenant par quel raisonnement nous faisons introduire l'ellipse d'élasticité et obtiendrons par elle uniquement la détermination de la poussée H.*

Construisons tout d'abord l'ellipse d'élasticité du système total. On sait que cette ellipse n'est autre chose que l'ellipse centrale d'inertie du système de tous les poids élastiques des divers éléments c. à. d. des brins du cable et tiges de suspension appliquées à leurs centres respectifs, des barres de la poutre appliquées aux nœuds opposés et des liaisons supprimées appliquées aux centres des ellipses y relatives. La construction graphique générale au moyen de deux polygones funiculaires <sup>2)</sup> donne le centre, la position des axes ainsi que les longueurs de deux demi-axes principaux comme rayons de giration du système des susdits poids élastiques par rapport aux axes ox et oy.

Soient : y la distance à la droite  $A_1B_1$  du centre C de l'ellipse et h

<sup>1</sup> Dans les épures en pratique on considère les  $w_i = g_i y_i$  où  $g_i = g_i g_0 = \frac{li}{E_i \Omega_i h^2}$  ;  $E_0 \cdot \Omega_0 \cdot h_0^2$   $E_0$  étant le plus grand de tous les modules d'élasticité,  $\Omega_0$  la plus grande section des membrures,  $h_0$  la plus grande de toutes les quantités  $h_i$ ,  $l_0$  la plus petite longueur des membrures. Dans ces conditions on prend pour distance polaire  $d_0 = \frac{1}{g_0 \cdot n \cdot k}$  , où  $g_0 = \frac{l_0}{E_0 \Omega_0 h_0^2}$ ,  $n = \text{coef. de réduction du dessin}$  et  $k = \text{coef. d'agrandissement des déformations}$ .

<sup>2</sup> La méthode est classique. Voir. "TEXN. XPON...". Athènes 1941, p. 198. Cette construction n'a pas été indiquée sur la figure.



la distance à la même droite  $A_1B_1$  de son antipole  $K$  par rapport à l'ellipse  $e$ . La longueur  $A_1B_1$  est par construction invariable p. c. la composante  $H$  doit à elle seule pouvoir annuler la variation de la longueur  $A_1B_1$ , autrement dit  $H$  doit produire un déplacement relatif du point  $B_1$  p. r. au point  $A_1$ , tel que la projection de ce déplacement relatif soit égal précisément à la somme des projections sur  $A_1B_1$  des déplacements des points  $A_1$  et  $B_1$  produits par les forces  $V_{A_1}$  et  $V_{B_1}$ . Désignons par  $M_{A_1B_1}$ ,  $M_{A_1M}$ ,  $M_{B_1M}$  les moments d'inertie p.r. à la droite  $A_1B_1$  de tous les poids élastiques élémentaires des parties  $A_1B_1$ ,  $A_1M$  et  $B_1M$ . La projection suivant l'axe  $A_1B_1$  du déplacement imprimé au point  $A_1$  par la force  $H$  est évidemment  $= H.M_{A_1M}$ . D'une façon analogue la force  $-H$  imprime au point  $B_1$  un déplacement dont la projection sur  $A_1B_1$  a pour valeur  $= -H.M_{B_1M}$ , de sorte que la projection sur  $A_1B_1$  du déplacement relatif du point  $B$  p. r. au point  $A$  a pour expression :

$$(1) \quad H.M_{A_1M} + H.M_{B_1M} - H.M_{A_1B_1}$$

Or le moment d'inertie  $M_{A_1B_1}$  de tous les poids élastiques élémentaires du système p. r. à la droite  $A_1B_1$  se calcule au moyen de l'ellipse d'élasticité totale  $e$  et sa valeur est égale à  $ghy$ , où  $g = \Sigma$  des poids élastiques. La relation (1) s'écrit donc :

$$H.M_{A_1M} + H.M_{B_1M} = H.ghy$$

ou encore :

$$(2) \quad H.ghy = V_{A_1} \overline{\alpha\alpha_1} + V_{B_1} \overline{\beta\beta_1} = \overline{M'M''}$$

car le deuxième membre est en effet égal à l'ordonnée comprise sur la verticale  $M'M''$ , entre le polygone  $\pi$  et la ligne  $\alpha\beta$ . De (2) on tire :

$$(3) \quad H = \frac{\overline{M'M''}}{ghy}$$

La quantité  $ghy$  fournie entièrement par l'ellipse l'élasticité  $e$ , est constante indépendante des forces agissant par le pont suspendu. En designant  $\overline{M'M''}$  par  $\xi$  et en posant  $ghy = \Delta$ , la formule (3) s'écrit, pour des raisons d'homogénéité

$$(4) \quad \boxed{H = 1^T \frac{\xi}{\Delta}}$$

*Ainsi nous pouvons énoncer le théorème suivant :*

*“Le polygone  $\pi$  rapporté à la droite  $\alpha\beta$  peut être considéré, à un facteur constant  $\Delta$  près, comme ligne d'influence de la poussée  $H_{\pi}$ .”*

Il en résulte, en vertu du principe de la superposition des effets des forces, que sous l'action d'un système quelc. de charges verticales  $P_1, P_2, \dots, P_v$ , la poussée totale est :

$$(5) \quad H = \frac{1^r}{\Delta} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v)$$

où  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v$  sont les ordonnées du polygone  $\pi$  au droit des charges.

#### CALCUL EFFECTIF DU PONT SUSPENDU

1. *Cas des charges fixes.* Après avoir construit une fois pour toutes la lignes d'influence de la poussée  $H$ , si  $P_1, P_2, \dots, P_n$  sont les charges verticales fixes agissant en des points quelconques du tablier, la poussée  $H$  est donnée par la formule (5). Connaissant  $H$  reconstruisons le polygone des forces correspondant au cable comme polygone funiculaire, ce qui donne les tensions dans les brins du cable et les tiges de suspension ainsi que les réactions  $R_{AO}$  et  $R_{BO}$ , après quoi venons à la poutre. Les tensions  $Q_1, Q, \dots, Q_v$  des tiges de suspension sont pour la poutre, de forces extérieures. Nous sommes donc en présence d'une poutre à deux appuis simples, sollicitée simultanément par les deux systèmes de forces  $P$  et  $Q$ . Le calcul des tensions dans les barres de la poutre s'obtient sans difficulté à l'aide de deux figures de Crémone relatives respectivement aux deux systèmes de charges et superposant les effets des forces.

En particulier pour les membrures on sait que le cable est un polygone funiculaire relatif aux forces  $Q$ . On peut déterminer les moments flechissants  $M$  à droit des nœuds opposés en menant la ligne  $H$  de fermeture. Pour la barre  $CD$  p. ex., quelconque, on opère la section  $S$ , on mesure  $\eta$  à droit du nœud opposé et l'on a :

$$H \cdot \eta = M$$

Si  $r$  est la distance à la barre  $CD$  de son nœud opposé on a :  $M = T \cdot r$ , où  $T$  désigne la tension dans  $CD$ . Donc :

$$T = \frac{H \cdot \eta}{r}$$

Les forces  $Q$  sont ascendantes ; il en résulte que les membrures supérieures sont tendues et les membrures inférieures comprimées,

II. *Cas des charges roulantes.* Lignes d'influence dans tous les éléments du pont suspendu. Supposons qu'une force de  $1^r$  circule sur un



tablier inférieur. D'après ce qui a été dit, si  $T_{12}$  est la tension dans un brin quelconque 1 - 2 du cable, on a :

$$H = T_{12} \cdot \cos \alpha_{12}$$

d'où :

$$T_{12} = 1^r \cdot \frac{\xi}{\Delta \cdot \cos \alpha_{12}}$$

Les ordonnées de la ligne d'influence des tensions dans les brins du cable sont donc directement proportionnelles aux ordonnées  $\xi$  de la ligne de poussée p. c. la ligne d'influence de H se confond, à un facteur constant près, avec la ligne d'influence cherchée.

Considerons la tige reliant le nœud  $M_1$  à la poutre. Coupons par la pensée les brins  $M_1 A_0$  et  $M_1 M_2$  ainsi que la tige  $M_1$  dans le voisinage immédiat du point  $M_1$  en introduisant les tensions équivalentes  $T_{10}$ ,  $T_{12}$  et  $Q_1$ . Le nœud  $M_1$  devant être en équilibre nous devons avoir :

$$Q_1 + T_{12} \cdot \sin \alpha_{12} - T_{10} \cdot \sin \alpha_{10} = 0$$

c.à.d.

$$Q_1 = T_{10} \cdot \sin \alpha_{10} - T_{12} \cdot \sin \alpha_{12}$$

et comme :

$$T_{10} = \frac{H}{\cos \alpha_{12}}, \quad T_{12} = \frac{H}{\cos \alpha_{12}} \quad \text{et} \quad H = 1^r \cdot \frac{\xi}{\Delta}$$

on aura :

$$Q_1 = 1^r \cdot \frac{\xi}{\Delta} (\operatorname{tg} \alpha_{10} - \operatorname{tg} \alpha_{12})$$

Dans cette relation  $\xi$  seul varie. Le facteur  $\operatorname{tg} \alpha_{10} - \operatorname{tg} \alpha_{12}$  étant constant on voit ici encore que le polygone tracé  $\pi$  peut être considéré comme ligne d'influence des tensions dans les brins du cable et des tiges de suspension, à un facteur constant différent près.

Soit maintenant CD une barre quel. de la poutre. Opérons la section S ce qui détermine le nœud opposé N et les points E et Z. Traçons (fig. 5) la ligne d'influence de H et soit  $P = 1^r$  une force circulant sur le tablier

Isolons la poutre du cable par des coupures des tiges de suspension, au voisinage des nœuds d'attache, en supprimant la partie supérieure du système. Nous obtenons ainsi une poutre à deux appuis simples sollicitée par la force  $P = 1^r$  et l'ensemble des forces Q. Soient T' la tension due à la force de  $1^r$  agissant seule et T'' celle produite par les Q seules. Pour déterminer T' appliquons la méthode des moments. La section S opérée, supprimons la partie de gauche en la remplaçant par la réaction équivalente  $R_A$ . On aura évidemment :

$$T'.r = R_A \cdot d$$

d'où :

$$T' = R_A \cdot \frac{d}{r} = 1^r \cdot \frac{1-x}{1} \cdot \frac{d}{r}$$

Ici  $T' > 0$ . Cherchons maintenant  $T''$ . En appliquant la même méthode on devra avoir :

$T''.r = M^t$  fléchissant au droit du nœud opposé Or, le cable étant un polygone funiculaire relatif aux forces Q, le moment fléchissant en N est égal évidemment à  $H \cdot \eta$ , donc :

$$T''.r = H \cdot \eta$$

d'où :

$$T'' = 1^r \cdot \frac{\xi}{\Delta} \cdot \frac{\eta}{r}$$

Les forces Q étant ascendantes,  $T''$  correspond à une compression de la barre CD. Ainsi :

$$T = T' - T'' = 1^r \cdot \frac{1-x}{1} \cdot \frac{d}{r} - 1^r \cdot \frac{\xi}{\Delta} \cdot \frac{\eta}{r} = 1^r \cdot \frac{\eta}{\Delta r} \left( \frac{1-x}{1} \cdot \frac{d}{\eta} \Delta - \xi \right)$$

$$\text{Posons } Z = \frac{1-x}{1} \cdot \frac{d}{\eta} \Delta, \text{ alors}$$

$$(6) \quad T = 1^r \cdot \frac{\eta}{\Delta r} (z - \xi)$$

Le facteur  $1^r \cdot \frac{\eta}{\Delta r}$  est constant. Les ordonnées cherchées sont donc proportionnelles aux différences  $z - \xi$ . Or les ordonnées  $\xi$  sont connues; reste à trouver graphiquement les  $z$ . Ce sont celles d'une ligne droite. Pour  $x=1$  on a  $z=0$ , et pour  $x=0$  on a  $z = \frac{d}{\eta} \Delta$ . En considérant ensuite le cas où la force de  $1^r$  agit à gauche on trouveroit une deuxième droite rencontrant la première et sur la verticale du nœud opposé. Enfin on porte les ordonnées hachurées de la fig. 5 à partir d'une horizontale après les avoir multiplié par le facteur constant  $1^r \cdot \frac{\eta}{\Delta r}$ .

Pour une diagonale quelc. C'D' (fig. 6) la construction reste évidemment la même. La quantité  $\eta$  sera mesurée sur la verticale de N; elle est positive lorsque elle est au-dessous de la ligne de fermeture et comme  $d < 0$ , on aura  $\frac{d}{\eta} < 0$ , c'est pourquoi elle sera portée au-dessus de l'horizontale.

Considerons en finle cas particulier de la poutre à membrures parallèles. Les nœuds opposés de toutes les diagonales, s'éloignent à l' $\infty$ , les quan-

tités  $d$  et  $\eta$  tendent vers l' $\infty$ , mais le quotient  $\frac{d}{\eta}$  a une limite, que nous cherchons. Pour la diagonale KL p. ex. on a :

$$\frac{d}{\eta} = \frac{d-\delta+\delta}{\eta} = \frac{d-\delta}{\eta} + \frac{\delta}{\eta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{\delta}{\eta}$$

Lorsque  $N \rightarrow \infty$  on a :

$$\operatorname{Lim} \frac{d}{\eta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

On n'a donc qu'à porter (fig. 7)  $\frac{\Delta}{\operatorname{tg}\beta}$ . Le facteur de proportionnalité

$\frac{\eta}{\Delta r}$  devient aussi indéterminé. Cherchons sa vraie valeur, on a :

$$\frac{\eta}{r} = \frac{\eta}{d} \cdot \frac{d}{r}$$

donc :

$$\operatorname{Lim} \frac{\eta}{r} = \operatorname{Lim} \frac{\eta}{d} \cdot \operatorname{Lim} \frac{d}{r} = \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{Lim} \frac{d}{r}$$

Or le triangle NML donne :

$$\frac{d}{r} = \frac{d+\delta'}{r} \cdot \frac{\delta'}{\delta} = \frac{d+\delta'}{r} \cdot \frac{\delta'}{r}$$

Par conséquent :

$$\operatorname{Lim} \frac{d}{r} = \frac{1}{\sin\alpha} - \operatorname{Lim} \frac{\delta'}{r} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

donc :

$$\operatorname{Lim} \frac{\eta}{r} = \operatorname{tg}\beta \cdot \frac{1}{\sin\alpha}$$

L'application de la formule (6) n'offre alors aucune difficulté.

La tension  $T''$  produite par le cable seul sur la diagonale est :  $T''=1T$ .

$\frac{\delta}{\Delta} \cdot \frac{\eta}{r}$  et comme  $r = \infty$  on a :  $T''=0$ . On voit ainsi que le cable n'a aucune influence sur les diagonales lorsque les membrures de la poutre sont parallèles.

*Influence de la température.* Si la température du système s'élève de  $t^\circ$ , tous ses éléments tendent à se dilater, mais le pont suspendu lui-même ne peut se dilater librement à cause de ses liaisons, alors des tensions prendront naissance que nous nous proposons de calculer.

Supprimons les liaisons en A, B, A<sub>0</sub>, B<sub>0</sub> en les remplaçant par leurs éléments élastiques correspondants et supposons l'ellipse d'élasticité totale  $e$  du système déterminée. Admettons que la liaison verticale de B<sub>1</sub> soit supprimée de façon que B<sub>1</sub> puisse glisser horizontalement. Déterminons ce glis-



sement. Si  $l_1 = A_1B_1$  et  $a = \text{coef. de dilatation linéaire de la matière}$ , la corde  $A_1B_2$  devient  $A_1B_2$ . Il est évident que :

$$\overline{B_1B_2} = a \cdot t^\circ \cdot l_1$$

Or en réalité ce déplacement ne peut avoir lieu p. c. la liaison en  $B_1$  doit pouvoir exercer une réaction horizontale capable à elle seule d'annuler ce déplacement. Appellons  $H_r$  cette réaction horizontale et tâchons de la calculer.

Nous savons qu'une force horizontale de  $1^T$  appliquée en  $B_1$  déplace ce point horizontalement d'une quantité  $\Delta = ghy$  p. c. la force  $H_r$  provoque un déplacement horizontal de  $B_1$  égal à  $H_r \cdot \Delta$ . Nous devons donc avoir :

$$H_r \cdot \Delta = a \cdot t^\circ \cdot l_1$$

d'où :

$$H_r = \frac{a \cdot t l_1}{\Delta}$$

Il suffira d'appliquer cette formule pour avoir la poussée horizontale  $H_r$  agissant suivant la ligne  $A_1B_1$ . Si  $t < 0$ ,  $H_r$  aura le sens vers l'intérieur du pont. Connaissant  $H_r$  on achève le calcul des tensions dans tous les éléments du pont suspendu par le procédé exposé, la force  $H_r$  jouant ici le rôle de  $H$ .

*Remarque finale.* Le problème du calcul du pont suspendu à tablier rigide a pu être entièrement résolu par utilisation de l'ellipse d'élasticité seule et cela dans toute sa généralité sans aucune supposition simplificatrice, grâce au dégagement convenable du système de ses liaisons surabondantes et la combinaison appropriée des éléments élastiques. L'application des principes et propriétés de l'ellipse a donné lieu à des constructions graphiques d'une extrême simplicité et d'application facile pour la pratique courante.