ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΗ ΜΕΛΟΥΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— Ἴσα ἀθροίσματα ὁμοίων δυνάμεων πραγματικῶν ἀκεραίων καὶ ἀκεραίων τοῦ Gauss, ὑπὸ *Ἰάσονος Κατζουράκη* *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Κ. Π. Παπαϊωάννου.

Εἰσαγωγὴ

Αἱ ἀπὸ τοῦ Euler ἀρξάμεναι καὶ μέχρι σήμερον συνεχιζόμεναι ἔρευναι ἐπὶ τῶν ἴσων ἀθροισμάτων τῶν ὁμοίων δυνάμεων ἀκεραίων (πάντων πραγματικῶν, κατὰ τὰ μέχρι τοῦδε) δυνατὸν νὰ στραφῶσι καὶ πρὸς τὴν κατεύθυνσιν, καθ' ἣν ζεύγη τῶν ἀκεραίων τούτων ἀντικαθίστανται μὲ ζεύγη συζυγῶν ἀκεραίων τοῦ Gauss. Ἡ τοιαύτη στροφὴ τῶν ἐρευνῶν θὰ ἀγάγῃ τὸν ἐρευνητὴν εἰς συμπεράσματα σημασίας οὐχὶ ἐλάσσονος τῶν ἐπιτευχθέντων διὰ τῆς θεωρήσεως μόνον πραγματικῶν ἀκεραίων, ὡς καὶ εἰς τὴν ἀνακάλυψιν ἀριθμητικῶν θεωρημάτων συνδεόντων πραγματικοὺς ἀκεραίους πρὸς συζυγεῖς ἀκεραίους τοῦ Gauss καὶ τῶν ὁποίων θεωρημάτων τὴν ὕπαρξιν θὰ ἦτο δυσχερὲς καὶ ἐκ διαισθήσεως ἀκόμη νὰ ὑποπτευθῇ τις.

Τὸ γόνιμον τῶν τοιούτων ἀναζητήσεων ὑποδηλοῦται ἐν τοῖς ἑπομένοις.

§ 1. Ἀξιοσημείωτοι λύσεις τινὲς τοῦ διοφαντικοῦ συστήματος $(x+yi)^n + (x-yi)^n + z^n = (x_1+y_1i)^n + (x_1-y_1i)^n + z_1^n$, ὅπου $n=1,3$.

Εὑρίσκομεν ὑπὸ ὡρισμένας συνθήκας τὴν γενικὴν εἰς ἀκεραίους λύσιν τοῦ ὡς ἄνω διοφαντικοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον χάριν συντομίας γράφομεν

$$x \pm yi\,,\ z \overset{n}{=} x_1 \pm y_1 i\,,\ z_1\,, \qquad (1),\ \text{ὅπου } n=1,3.$$

Πρὸς τοῦτο, παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις, ὅτι ἡ πρωτοβάθμιος τῶν (1), δηλ. ἡ $2x + z = 2x_1 + z_1$, δι' ἐξισώσεως τῶν μελῶν της μὲ u δίδει τὰς

$$z = u - 2x\,,\quad z_1 = u - 2x_1 \qquad (2)$$

διὰ τὰς ὁποίας ἡ τριτοβάθμιος τῶν (1) γίνεται:

$$x\,[(u-x)^2 + y^2] = x_1\,[(u-x_1)^2 + y_1^2]. \qquad (3)$$

α′ λύσις τοῦ (1). Ἡ (3) διὰ $u = \frac{1}{2}(x+x_1),\ y = y_1 + \frac{1}{2}(x_1 - x),$ (4)

γράφεται $(x-x_1)\,[y_1^2 - x y_1 + \frac{1}{4}(x_1-x)^2 - \frac{x}{4}(x_1-x)] = 0$

* J. KATZOURAKES, Some sets of real integers and integers of Gauss with equal sums of like powers.

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $x \neq x_1$ (διότι, ἄλλως, θὰ ἦτο $y = y_1$ καί, διὰ τὰς (2), $z = z_1$),

λαμβάνομεν τὴν $y_1^2 - xy_1 + \frac{1}{4}(x_1 - x)^2 - \frac{x}{4}(x_1 - x) = 0$,

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$2y_1 = x \pm \sqrt{-x^2 + 3xx_1 - x_1^2} = x \pm v \qquad (5)$$

ἔνθα ἐτέθη $\quad -x^2 + 3xx_1 - x_1^2 = v^2$.

Τῆς τελευταίας ἐξισώσεως ἡ γενικὴ εἰς ἀκεραίους λύσις παρέχεται, κατὰ τὰ γνωστά, τῇ βοηθείᾳ τῶν

$$x = p_1^2 + q^2, \quad x_1 = 2p_1^2 + 2p_1q + q^2, \quad v = -p_1^2 + p_1q + q^2$$

καὶ οὕτω ἐκ τῶν (5) λαμβάνομεν

$$y_1 = \frac{1}{2}p_1q + q^2 \quad \text{ἢ} \quad y_1 = p_1^2 - \frac{1}{2}p_1q,$$

ἐνῷ ἐκ τῶν (4) καὶ (2) ἔχομεν

$$u = \frac{3}{2}p_1^2 + p_1q + q^2, \; z = -\frac{1}{2}p_1^2 + p_1q - q^2, \; z_1 = -\left(\frac{5}{2}p_1^2 + 3p_1q + q^2\right)$$

καὶ $\quad y = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{3}{2}p_1q + q^2 \quad$ ἢ $\quad y = \frac{3}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_1q.$

Ἐκ τῶν εὑρεθεισῶν ὡς ἄνω ἰσοτήτων ἕπεται, ὅτι, τῶν $y, y_1, u, z_1, z, p_1, q$ ὄντων ἀκεραίων, κατ' ἀνάγκην εἶναι $p_1 = 2p$.

Κατ' ἀκολουθίαν λαμβάνομεν διὰ τὰς (1) τὰς ἰσότητας:

$(4p^2 + q^2) \pm (2p^2 + 3pq + q^2)i, \; 10p^2 + 6pq + q^2 \overset{1,3}{=} (8p^2 + 4pq + q^2) \pm$
$\pm (pq + q^2)i, \; 2p^2 - 2pq + q^2$

καὶ $\quad (4p^2 + q^2) \pm (6p^2 + pq)i, \; 10p^2 + 6pq + q^2 \overset{1,3}{=} (8p^2 + 4pq + q^2) \pm$
$\pm (4p^2 - pq)i, \; 2p^2 - 2pq + q^2$

τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων παρέχεται ὑπὸ τὰς συνθήκας (4) ἡ γενικὴ λύσις τοῦ συστήματος (1).

Ἐφαρμογή.— Ἐὰν ζητῶμεν τὰς ἐκ τῶν (6) λαμβανομένας ἰσότητας, εἰς τὰς ὁποίας εἶναι $4p^2 + q^2 = 65$, θέτομεν, λόγῳ τῶν $65 = 8^2 + 1^2 = 4^2 + 7^2$, τὰς $[p,q] = [4, \pm 1]$, $[2 \pm 7]$ καὶ εὑρίσκομεν τὰς

$65 \pm 45i, \; 185 \overset{1,3}{=} 145 \pm 5i, \; 25$	$65 \pm 99i, \; 173 \overset{1,3}{=} 137 \pm 63i, \; 29$
$65 \pm 100i, \; 185 \overset{1,3}{=} 145 \pm 60i, \; 25$	$65 \pm 38i, \; 173 \overset{1,3}{=} 137 \pm 2i, \; 29$
$65 \pm 21i, \; 137 \overset{1,3}{=} 113 \pm 3i, \; 41$	$65 \pm 15i, \; 5 \overset{1,3}{=} 25 \pm 35i, \; 85$
$65 \pm 90i, \; 137 \overset{1,3}{=} 113 \pm 68i, \; 41$	$65 \pm 10i, \; 5 \overset{1,3}{=} 25 \pm 30i, \; 85$

β′ λύσις τοῦ (1). Ἐὰν ἡ (4_2) ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς $y = y_1 + x_1 - x$ παραμενουσῶν τῶν (4_1) καὶ (2), ἡ (5) ἀντικαθίσταται ὑπὸ τῆς

$$y_1 = x \pm \frac{1}{2}\sqrt{-x^2 + 6xx_1 - x_1^2} = x \pm v,$$

ἔνθα ἐτέθη $-x^2 + 6xx_1 - x_1^2 = 4v^2$.

Ἐκ τῆς τελευταίας λαμβάνομεν $x = 5p^2 - 2pq + q^2$, $x_1 = p^2 - 2pq + 5q^2$, $v = p^2 - 6pq + q^2$.

Οὕτω αἱ (6) ἀντικαθίστανται ὑπὸ τῶν

$5p^2 - 2pq + q^2 \pm (2p^2 - 8pq + 6q^2)i$, $-7p^2 + 2pq + q^2 \overset{1,3}{=} p^2 - 2pq + 5q^2 \pm$
$\pm (6p^2 - 8pq + 2q^2)i$, $p^2 + 2pq - 7q^2$ (7)
καὶ $5p^2 - 2pq + q^2 \pm (4pq + 4q^2)i$, $-7p^2 + 2pq + q^2 \overset{1,3}{=} p^2 - 2pq + 5q^2 \pm$
$\pm (4p^2 + 4pq)i$, $p^2 + 2pq - 7q^2$.

Παρατήρησις. Τὸ σύστημα $A_1, A_2, A_3 \overset{1,3}{=} B_1, B_2, B_3$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα

$$(A_1 + A_2) + (A_1 + A_3) + (A_2 + A_3) = (B_1 + B_2) + (B_1 + B_3) + (B_2 + B_3)$$
$$(A_1 + A_2)(A_1 + A_3)(A_2 + A_3) = (B_1 + B_2)(B_1 + B_3)(B_2 + B_3).$$

Ἑπομένως, θέτοντες $A_1, A_2 = x \pm yi$, $A_3 = z$, $B_1, B_2 = x_1 \pm y_1 i$, $B_3 = z_1$, δυνάμεθα διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως μιᾶς μερικῆς λύσεως τοῦ (1) νὰ σχηματίσωμεν δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ w, ἔχοντα ἀνὰ μίαν μόνον πραγματικὴν ρίζαν, ἀλλὰ πάσας ἀκεραίας, καὶ διαφέροντα μόνον κατὰ τοὺς συντελεστὰς τῶν πρωτοβαθμίων ὅρων των. Π.χ. χρησιμοποιοῦντες τὴν μερικὴν λύσιν τοῦ (1): $5 \pm 6i$, $17 \overset{1,3}{=} 13 \pm 2i$, 1, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἐκ τῆς (6_1) διὰ $p = q = 1$, λαμβάνομεν μὲ ρίζας ἀντιστοίχως τὰς $(10, 22 \pm 6i)$ καὶ $(26, 14 \pm 2i)$ τὰ ζητούμενα πολυώνυμα $w^3 - 64w^2 + 1060w - 5200$ καὶ $w^3 - 64w^2 + 928w - 5200$.

§ 2. Δύο μερικαὶ λύσεις τοῦ συστήματος $x \pm yi,\ x' \pm y'i \overset{n}{=} x \pm y_1 i,\ x' \pm y'_1 i$ $(n = 1,3)$.

Ἡ μία τῶν λύσεων τούτων προκύπτει ἐκ τῶν (6), ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῆς (6_2) καὶ κατόπιν προσθέσωμεν ταύτην κατὰ μέλη μετὰ τῆς (6_1). Οὕτω ἔχομεν τὴν διπλῆν ἰσότητα

$(4p^2 + q^2) \pm (2p^2 + 3pq + q^2)i$, $(8p^2 + 4pq + q^2) \pm (4p^2 - pq)i \overset{1,3}{=} (4p^2 + q^2) \pm$
$\pm (6p^2 + pq)i$, $(8p^2 + 4pq + q^2) \pm (pq + q^2)i$.

Ὁμοίως ἐκ τῶν (7) λαμβάνομεν

$(5p^2 - 2pq + q^2) \pm (2p^2 - 8pq + 6q^2)i$, $(p^2 - 2pq + 5q^2) \pm (4p^2 + 4pq)i \overset{1,3}{=}$
$(5p^2 - 2pq + q^2) \pm (4pq + 4q^2)i$, $(p^2 - 2pq + 5q^2) \pm (6p^2 - 8pq + 2q^2)i$.

§ 3. Ἡ γενικὴ λύσις ἑνὸς διοφαντικοῦ συστήματος καὶ ἓν ἀξιοσημείωτον θεώρημα.

Διὰ $y_1 = y$, $z_1 = -z$ ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$x_1 = x + z, \quad u - x = x + z, \quad u - x_1 = x,$$

διὰ τὰς ὁποίας ἡ μὲν (3) γίνεται

$$x(x + z) = y^2, \tag{8}$$

τὸ δὲ σύστημα (1) γράφεται

$$z, z \overset{1,3}{=} (x + z) \pm yi, \quad -x \pm yi. \tag{9}$$

Ἂς κληθῇ D ὁ μ.κ.δ. τῶν x, z καὶ ἂς τεθῇ $x = Dx'$, $z = Dz'$, ὅπου $(x', z') = 1$. Ἡ (8) γράφεται $D^2 x'(x' + z') = y^2$ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν, ἕνεκα τῆς $(x', x' + z') = 1$, ἔχομεν $x' = q^2$, $x' + z' = p^2$.
Εἶναι λοιπὸν $x = Dq^2$, $y = Dpq$, $z = D(p^2 - q^2)$, (10), ὅπου $(p, q) = 1$.

Ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς (8) διαδοχικῶς ἔχομεν
$z^2 + 2x(x + z) - 2y^2 = z^2$, $[(x + z)^2 - y^2] + (x^2 - y^2) = z^2$ καὶ $[(x + z) \pm \pm yi]^2 + (-x \pm yi)^2 = 2z^2$.

Ὅθεν ἡ γενικὴ λύσις (10) τοῦ συστήματος (9) εἶναι ἡ γενικὴ λύσις τοῦ συστήματος

$$z^n + z^n = [(x + z) + yi]^n + [(x + z) - yi]^n + (-x + yi)^n,$$

ὅπου τώρα $n = 1,2,3$.

Τὸ ὡς ἄνω σύστημα συντόμως γράφεται

$$z, z \overset{3}{=} (x + z) \pm yi, \quad -x \pm yi\,*$$

καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω, διὰ τὰς (10), λαμβάνομεν τὴν τριπλῆν ἰσότητα

$$D(p^2 - q^2), D(p^2 - q^2) \overset{3}{=} D(p^2 \pm pq\,i), D(-q^2 \pm pqi), \tag{11}$$

εἰς τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ἄρωμεν τὸν περιορισμὸν $(p, q) = 1$, λόγῳ τοῦ ὅτι εἶναι τριπλῆ ταὐτότης, καὶ ἐκ τῆς ὁποίας ὁρμώμενοι διατυποῦμεν τὸ ἑπόμενον ἀξιοσημείωτον

Θ ε ώ ρ η μ α: «Τὸ διπλάσιον παντὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ N, διαφόρου τῶν 1,2,4, ἰσοῦται μὲ ἓν τοὐλάχιστον ἄθροισμα ἐκ δύο ζευγῶν συζυγῶν ἀκεραίων τοῦ Gauss, ἐχόντων τὸ αὐτὸ φανταστικὸν μέρος, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα, ὅπως καὶ οἱ κύβοι, ἔχουν ἀθροίσματα ἴσα ἀντιστοίχως μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου, ὅπως καὶ τοῦ κύβου, τοῦ N».

---

* Ὁ χωρισμὸς δύο ὁμάδων ἀριθμῶν διὰ τοῦ συμβόλου $\overset{n}{=}$ δηλοῖ, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ ἑκάστης ὁμάδος ἔχουν ἴσα τὰ ἀθροίσματα τῶν μυοστῶν δυνάμεών των διὰ $\mu = 1,2,3,\ldots, n$ ἢ διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τοῦ n.

SUMMARY

The author found the solutions (6) and (7) of the Diophantine system (1), from which took solutions of the system in § 2. The method leads in § 3 to the following *Theorem*: «If N is a natural number ≠ 1, 2, 4, the double of N is equal to one at least sum of two pairs of conjugate integers of Gauss, of which the squares as well as the cubes have sums respectively equal to the double of the square and of the cube of N».

*

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Κ. Παπαϊωάννου**, κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας, εἶπε τὰ ἑξῆς:

Ἔχω τὴν τιμὴν νὰ παρουσιάσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν ἐργασίαν τοῦ κ. Ἰάσονος Κατζουράκη ὑπὸ τὸν τίτλον *«Ἴσα ἀθροίσματα ὁμοίων δυνάμεων πραγματικῶν ἀκεραίων καὶ ἀκεραίων τοῦ Gauss»*.

Ὁ κ. Ἰάσων Κατζουράκης, Πτυχιοῦχος τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, ἐργάζεται ἀπὸ ἐτῶν ἐρευνητικῶς εἰς τὴν Θεωρίαν τῶν Ἀριθμῶν ὑπὸ τὴν καθοδήγησιν τοῦ Ὑφηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν μαθηματικοῦ κ. Γεωργίου Ξηρουδάκη.

Ἤδη ὁ κ. Κατζουράκης κατέληξεν αὐτοδυνάμως εἰς μίαν νέαν ἐρευνητικὴν κατεύθυνσιν, ἤτοι εἰς τὴν σπουδὴν τῶν ζητημάτων τῶν σχετικῶν μὲ τὰ ἴσα ἀθροίσματα ὁμοίων δυνάμεων ἀκεραίων εἰς τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν, ἀντὶ ἀκεραίων πραγματικῶν ἀριθμῶν, θεωροῦμεν ζεύγη συζυγῶν ἀκεραίων τοῦ Gauss. Ἡ τοιαύτη θεώρησις διανοίγει νέον πεδίον ἐρευνῶν. Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν ἐκθέτει ὁ κ. Κατζουράκης ὡρισμένα νέα ἀποτελέσματα, τὰ ὁποῖα ἐπέτυχεν εἰς τὴν κατεύθυνσιν αὐτήν. Τοιουτοτρόπως ὁ κ. Κατζουράκης ἐκκινῶν ἐκ τῆς μελέτης τῶν λύσεων Διοφαντικοῦ συστήματος κατέληξεν εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ ἑξῆς θεωρήματος:

«Τὸ διπλάσιον παντὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ Ν, διαφόρου τῶν 1, 2, 4, ἰσοῦται μὲ ἓν τοὐλάχιστον ἄθροισμα ἐκ δύο ζευγῶν συζυγῶν ἀκεραίων τοῦ Gauss, ἐχόντων τὸ αὐτὸ φανταστικὸν μέρος, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα, ὅπως καὶ οἱ κύβοι, ἔχουν ἀθροίσματα ἴσα ἀντιστοίχως μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου, ὅπως καὶ τοῦ κύβου, τοῦ Ν».

Ἡ διάνοιξις νέων πεδίων ἐρευνῶν ὑπὸ Ἑλλήνων Μαθηματικῶν εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Θεωρίας τῶν ἀριθμῶν εἶναι σημαντικωτάτη. Εἶναι δὲ ὁ κ. Κατζουράκης τοσοῦτον μᾶλλον ἀξιέπαινος, διότι ἠσχολήθη μὲ δυσκολώτατα ἐρευνητικὰ θέματα καὶ ἐπέτυχε νὰ καταλήξῃ εἰς ἐνδιαφέροντα ἀποτελέσματα ἐργαζόμενος μονίμως εἰς τὴν ἐπαρχίαν, εἰς τὸ Ἡράκλειον τῆς Κρήτης.

Ὁ κ. Κατζουράκης ὑπῆρξε μαθητὴς τοῦ ἀειμνήστου Παναγιώτου Ζερβοῦ, τοῦ ὁποίου ἡ διδασκαλία ἔστρεψε πρὸς τὴν ἔρευναν τόσους Ἕλληνας Μαθηματικούς.