ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 12ΗΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 1931

ΠΡΟΕΔΡΙΑ Α. Χ. ΒΟΥΡΝΑΖΟΥ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

Προκηρύσσεται ἡ πλήρωσις μιᾶς ἕδρας Νομικῶν Ἐπιστημῶν.

Ὁ ***Γενικὸς Γραμματεὺς*** ἀγγέλλει τὸν θάνατον τοῦ Ἰταλοῦ νεοελληνιστοῦ Eliseo Burgenti καὶ ἀναλύει τὸ ἔργον αὐτοῦ διὰ βραχέων.

Ἡ Ἀκαδημία προσεκλήθη εἰς τὰς ἑπομένας ἑορτάς: 1ον εἰς τὴν ἑκατονταετηρίδα τοῦ Faraday ἐν Λονδίνῳ. 2ον εἰς τὴν ἑκατονταετηρίδα ἀπὸ τῆς γεννήσεως τοῦ James Clerk Maxwell. 3ον εἰς τὸν Διεθνὲς συνέδριον τῆς Χημείας ἐν Μαδρίτῃ, καὶ 4ον εἰς τὸ Β′ Διεθνὲς γλωσσολογικὸν Συνέδριον ἐν Γενεύῃ.

ΚΑΤΑΘΕΣΙΣ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

Ὁ *Γενικὸς Γραμματεὺς* καταθέτει τὰ πρὸς τὴν Ἀκαδημίαν ἀποσταλέντα βιβλία.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ

ΦΥΣΙΚΗ.—Sur une catégorie de vases à écoulement*. *Par* ***Const. Maltézos.***

1. Dans le cours de mes recherches sur les anciennes clepsydres, j'ai considéré le problème théorique de la construction d'un vase de révolution qui, par une petite ouverture, en mince paroi, située au centre du fond,

* Κ. ΜΑΛΤΕΖΟΥ.—Περί τινος κατηγορίας ἀγγείων ἐκροῆς.

c.-à-d. au sommet de la figure du vase se vide librement, *en des temps proportionnels aux hauteurs du liquide contenu*[1].

En prenant donc le centre de l'ouverture comme origine, l'axe du vase, supposé vertical, comme axe des z et l'axe des x horizontal, nous avons posé pour les temps

$$(1)\qquad t = 6z,$$

6 désignant le facteur constant de proportionnalité, et nous avons trouvé pour l'équation du méridien

$$(2)\qquad z = m^2x^4,$$

avec
$$(3)\qquad m^2 = \frac{\pi^2}{2g\,\mu^2\,6^2\,\sigma^2},$$

où σ exprime l'aire de l'ouverture et μ le coefficient de contraction de la veine liquide.

Le volume de révolution V, égal à la quantité Q de l'eau contenue, à chaque instant, se déduit aisément égal à

$$(4)\qquad Q = V = cz^{\frac{3}{2}},$$

avec
$$c = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,\mu\sigma 6.$$

De la relation (4) on tire que les cubes des temps d'écoulement sont proportionnels aux carrés des quantités écoulées du liquide et inversement

[1] Voir: Περὶ τοῦ χρόνου τῆς ἐκκενώσεως τῶν κλεψυδρῶν. *Δελτίον τῆς Ἑλλην. Μαθημ. Ἑταιρείας* I, 1919, ainsi que *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1922.

Presque en même temps (1920) M. v. LUDWIG BORCHARD a obtenu la même solution publiée dans son livre: Altägyptische Zeitmessung (Die Geschichte der Zeitmessung und der Uhren. B. I. L. I.), dont j'ai pris connaissance tout recémment.

Dans cet ouvrage, l'auteur examine douze anciens exemplaires, jusqu' alors trouvés, *des vases à écoulement d'eau (Auslaufuhren)*, donnant les 12 heures, spécialement celles de nuit. Ce sont des vases tronc-coniques de révolution, divisés intérieurement par des lignes et des échelles de façon à donner les 12 heures saisonnières de la nuit ou de la journée, proportionnellement à l'abaissement du niveau de l'eau contenue.

M. BORCHARD montre (B. 16) que cette solution des anciens Égyptiens, et plus tard des *Alexandrins*, était grossièrement approximative, mais qu'on pourrait construire un vase tronc-conique de révolution, lequel peut presque se confondre, *jusqu' à une certaine hauteur*, avec le paraboloïde plat de révolution du 4e ordre, dont il est question dans mon texte.

proportionnels au carré de l'aire de l'ouverture. Par conséquent, tandis que dans la clepsydre cylindrique le temps de vidange de la même quantité d'eau devient deux, trois... fois moindre à mesure qu'on ouvre au fond deux, trois ... ouvertures égales, dans le cas présent ce temps devient presque la moitié quand l'aire de l'ouverture est triple, et il devient au juste quatre fois moindre quand l'aire est huit fois plus grande.

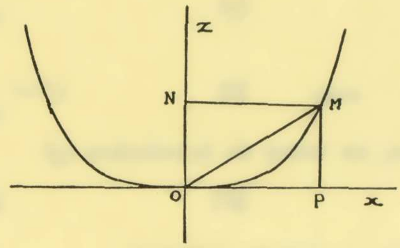

Fig. 1

A remarquer que, si nous désignons par V le volume du cône de révolution OMN (Fig. 1), et par W le volume du cylindre de révolution ONMP, nous avons

$$V = 2\,U = \frac{2}{3}\,W; \tag{5}$$

d'où, les surfaces du cône OMN et du solide OΣMN divisent le cylindre ONMP en trois parties équivalentes.

L'équation (2) du méridien de notre vase appartient aux paraboles d'ordre supérieur[1], et c'est spécialement celle de la parabole nommée par *F. Schütze* (suivant *Aug. Haas), Flach-parabel* (parabole plate)[2]; la forme donc de notre vase pourrait s'appeler *paraboloïde plat de révolution.* [La fig. 1 correspond à $m^2 = 1$].

2. En généralisant, cherchons l'équation du méridien d'un tel vase, *quand le temps d'écoulement est proportionnel à la n^e puissance de la hauteur du liquide contenu,* **n** étant un nombre positif (rationnel pour des applications éventuelles dans la pratique).

Nous avons maintenant la propriété fondamentale

$$t = 6 z^n, \tag{6}$$

la constante 6 étant indépendante de n, et par l'application *de la loi de Torricelli*

$$6 z^n = \frac{\pi}{\mu\sigma\sqrt{2\,g}} \int_0^z \frac{x^2 dz}{\sqrt{z}};$$

[1] Voy. GINO LORIA Spezielle algebr. und transc. ebene Kurven. Deutsche Ausg. von *Fritz Schütze.* 1902, **7.** S. 254.

[2] L. c. s. 266 note 1. et Lehrbuch der Differentialrechnung nach System Kleyer, III, Aufgabe 223.

d'où l'équation cherchée du méridien

$$(7) \qquad z^{\frac{2n-1}{}} = \lambda^2 x^4$$

avec
$$(8) \qquad \lambda^2 = \frac{\pi^2}{2g\mu^2 6^2 \sigma^2 n^2},$$

ou, en vertu de la relation (3)

$$(8') \qquad \lambda^2 = \frac{m^2}{n^2}.$$

On en déduit aisément

$$(9) \qquad V = \frac{2\pi n}{(2n+1)m} z^{\frac{2n+1}{2}};$$

et si nous désignons de nouveau par U et W les volumes du cône et du cylindre de révolution correspondant de la même hauteur, nous aurons les relations

$$(10) \qquad V = \frac{6}{2n+1} U = \frac{2}{2n+1} W.$$

Ces lignes appartiennent *au genre des paraboles* pour $n > \frac{1}{2}$, tandis que pour $n < \frac{1}{2}$ elles sont *hyperboliques*. Pour $n = \frac{1}{2}$ nous avons le vase cylindrique ayant équation $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2m}}$, et, pour $n = 1$ on retrouve les vases du paragraphe précédent. Pour $n = \frac{3}{2}$ l'équation (7) fournit

$$z = \pm \lambda x^2 = \pm \frac{2}{3} mx^2;$$

ce sont deux paraboles communes, tangentes au sommet et symétriques par rapport à l'axe des x. Donc, lorsque le vase est paraboloïde commun de révolution, le temps d'écoulement est proportionnel à la puissance $\frac{3}{2}$ de la hauteur du liquide contenu. Pour $n = \frac{5}{2}$ l'équation (7) devient

$$z^4 = \lambda^2 x^4 = \frac{4}{25} m^2 x^4,$$

dont les solutions réelles fournissent deux droites passant par l'origine, symétriques respectivement par rapport aux axes, et le vase est conique[1].

[1] Un tel vase conique était en usage pour la mesure du temps dans une espèce *d'horloge hydraulique*, dans laquelle la vitesse de l'eau était reglée par un coin conique, du même axe, entrant plus ou moins dans le vase. (VITRUVE. Livre IX. Ch. IX.).

Quant aux vases de révolution tronc-coniques égyptiens dont il a été question

Entre le cylindre et le cône se trouvent tous les vases paraboliques de révolution, tournant leur convexité vers l'axe des x. Ainsi, nous y rencontrons comme méridiens, pour $n = 2$ *la parabole aiguë* (Spitz-parabel) de *Aug. Haas*[1], ayant équation $z^3 = \lambda^2 x^4$, possédant au sommet un point anguleux, et dont la forme (pour $\lambda^2 = 1$) est donné par la Fig. 2; pour $n = \frac{7}{6}$, *la parabole à point d'inflexion au sommet* (Wende-parabel)[2] dont l'équation devient $z = \pm \lambda^{3/2} x^3$ (après avoir réjété une courbe imaginaire) et, pour $n = \frac{9}{10}$, *la parabole plate à point d'inflexion au sommet* (Wende-flach-parabel)[3], dont l'équation devient de même $z = \lambda^{5/2} x^5$, et dont les Fig. (3) et (4) représentent (pour $\lambda = 1$), pour les z positifs les parties pleines et pour les z négatifs les parties pointillées.

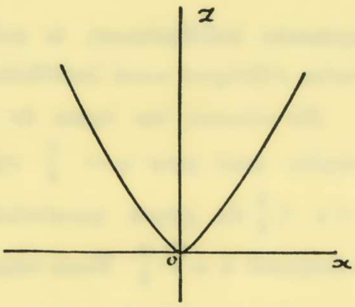

Fig. 2

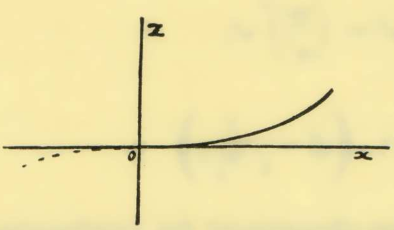

Fig. 3

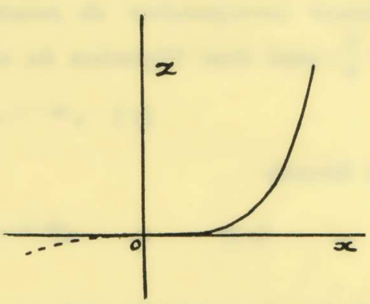

Fig. 4

Enfin pour $n > \frac{5}{2}$ les méridiens tournent leurs concavité vers l'axe des x, et le vase prend la forme *d'entonnoir parabolique,* s'évasant pour les x croissants (dans l'angle positif); et si nous prenons **n** de plus en plus grand, l'entonnoir devient plus aigu au sommet *en forme d'aiguille,* tandis que plus loin il s'évase plus rapidement.

---

dans la note 1 (p. 62), leur méridien ne satisfait pas l'équation précédente du texte, puisqu'il ne passe pas par le centre de la base.

[1] L. c. III, p. 141.

[2] L. C. III, p. 113.

[3] L. c. III, p. 114.

Pour $z = 1$, on aura les valeurs réelles de x égales à $\pm\sqrt{\frac{n}{m}}$. Si donc **n** augmente indéfiniment, le point de rencontre de la droite $z = 1$ avec la courbe s'éloigne aussi indéfiniment.

En résumé, les vases de révolution pour lesquels la condition (6) est remplie, sont pour $n = \frac{1}{2}$ cylindriques, pour $n = \frac{5}{2}$ coniques et pour $\frac{1}{2} < n < \frac{5}{2}$ du genre paraboloïde, parmi lesquels le paraboloïde commun correspond à $n = \frac{3}{2}$. Nous remarquons que pour les valeurs $\frac{3}{2} > n > \frac{1}{2}$ nous avons *les paraboloïdes aplatis,* et pour $\frac{3}{2} < n < \frac{5}{2}$ *les paraboloïdes aigus,* qu'on peut aussi appeler *des oxyparaboloïdes.* Quant aux vases pour lesquels $n > \frac{5}{2}$, ce sont *des entonnoirs paraboliques* et ils ne peuvent pas servir pratiquement comme de clepsydres.

3. Soit maintenant une valeur de **n** entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2}$, pour laquelle l'équation (7) du méridien parabolique est satisfaite. Nous appellerons *entonnoir correspondant du paraboloïde,* pour lequel entonnoir nous aurons $n' > \frac{5}{2}$, celui dont l'équation du méridien

$$(7') \qquad z^{2n'-1} = \lambda'^2 x^4 = \left(\frac{m}{n'}\right)^2 x^4,$$

peut devenir

$$(11) \qquad x^{2n-1} = \lambda_1^2 z^4, \quad \left(\lambda_1^2 = \frac{1}{\lambda'^{\frac{2n-1}{2}}}\right)$$

c.-à-d. la même équation (7), avec entre-changement des coordonnées, (au facteur de proportionnalité près).

Cela se peut toujours, après avoir rejeté un certain nombre des courbes imaginaires[1] introduites, à savoir les courbes

$$z^8 + \lambda'^{2n-1} x^{2(2n-1)} = 0,$$

et nous trouvons entre les valeurs ainsi correspondant de n et de n', la relation

$$(12) \qquad n' = \frac{2n+15}{2(2n-1)},$$

qui peut s'écrire aussi

$$(13) \qquad (2n-1)(2n'-1) = 16.$$

[1] Puisque $\lambda' = \frac{m}{n'} > 0$

On peut donc d'une valeur n déduire la valeur correspondante n′ et vice-versâ par la transformation homographique (12), qui se trouve être ici *involutive.*

Bornons-nous au cas *purement mathématique* où λ est pris la même constante positive, indépendante de n; alors toutes les courbes ayant équation

$$z^{2n-1} = \lambda^2 x^4, \qquad \left(n > \frac{1}{2}\right)$$

passent par le même point de l'angle positif, ayant les coordonnées $x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, $z = 1$, comme l'indique la Fig. 5. Donc, tous nos vases paraboliques et nos entonnoirs, ainsi que le cône et le cylindre correspondants, se coupent suivant le même cercle de rayon $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Dans ce cas, deux méridiens correspondants ont au point de rencontre leurs tangentes faisant les angles φ et φ' avec l'axe positif des x, satisfaisant à la relation

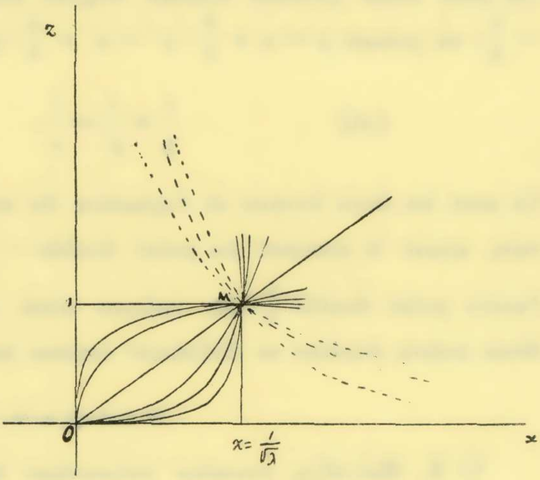

Fig. 5

$$(14) \qquad \operatorname{tang} \varphi . \operatorname{tang} \varphi' = \lambda = \operatorname{tang}^2 \alpha$$

α étant l'angle de la droite OM avec l'axe des x; et pour $\lambda = 1$, ces angles sont complémentaires.

En revenant au cas général, *les éléments doubles* de la transformation précédente sont les racines de l'équation

$$(2n-1)^2 = 16,$$

soit $n_1 = -\frac{3}{2}$ et $n_2 = \frac{5}{2}$. On peut donc, *au point de vue mathématique,* étendre les valeurs de n au dessous de $\frac{1}{2}$ et y englober les lignes hyperboliques. Elles se séparent entre elles par la valeur $n_1 = -\frac{3}{2}$, qui convient à l'hyperbole commune équilatérale, en deux groupes *de courbes correspondantes,* situées de part et d'autre de cette hyperbole. Et dans le cas spécial examiné précédemment, toutes ces hyperboles se recontrent aussi au même point — ce sont les lignes ponctuées de la Fig. 5 — et les hyperboloïdes de révolution passent par le même cercle de rayon $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

Or, si nous prenons, d'après le procédé bien connu, comme origine des valeurs de n le milieu de la distance de deux éléments doubles, c.-à-d. la valeur $\frac{1}{2}$, et si nous posons $\nu = n - \frac{1}{2}$, $\nu' = n' - \frac{1}{2}$, l'équation (13) devient

$$\nu\nu' = 2^2 \tag{15}$$

On peut aussi prendre comme origine des valeurs de n l'élément double $-\frac{3}{2}$; en posant $p = n + \frac{3}{2}$, $p' = n' + \frac{3}{2}$, la même relation peut s'écrire

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{2}. \tag{16}$$

Ce sont les deux formes *de l'équation* du miroir sphérique de petite ouverture, ayant le sommet au point double $-\frac{3}{2}$, et le centre de courbure à l'autre point double $\frac{5}{2}$; les valeurs ainsi correspondantes autour de ces deux points doubles se déduisent comme les foyers conjugués du miroir.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ Κ. Μαλτέζος, γενικεύων παλαιοτέραν ἐργασίαν του, ζητεῖ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ μεσημβρινοῦ ἀγγείου ἐκ περιστροφῆς ἔχοντος εἰς τὸ κέντρον τοῦ πυθμένος μικρὰν ὀπήν, ὅταν οἱ χρόνοι τῆς ἐκροῆς εἶναι ἀνάλογοι τῆς $n^{\text{στῆς}}$ δυνάμεως τοῦ ὕψους τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ, (**n** ὄντος θετικοῦ ἀριθμοῦ), εὑρίσκει δὲ αὐτὴν τῆς μορφῆς (7), τὴν ὁποίαν διερευνᾷ. Δεικνύει δ' ὅτι εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ n μεταξὺ τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ τοῦ $\frac{5}{2}$ ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ αὐτοῦ μεγαλυτέρα τοῦ $\frac{5}{2}$, ἀνευρισκομένη δι' ὁμογραφικοῦ μετασχηματισμοῦ. Ἐπίσης διὰ τὴν θεωρητικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $n < \frac{1}{2}$, εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ n μεταξὺ τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ τοῦ $-\frac{3}{2}$ ἀντιστοιχεῖ μία τιμή του μικροτέρα τοῦ $-\frac{3}{2}$, διδομένη διὰ τῆς αὐτῆς ὁμογραφικῆς σχέσεως. Αἱ δὲ ἀντίστοιχοι τιμαὶ πέριξ ἑκατέρας τῶν θέσεων τούτων εὑρίσκονται, ὅπως αἱ συζυγεῖς ἑστίαι εἰς τὸ μικροῦ ἀνοίγματος σφαιρικὸν κάτοπτρον.