ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.—Περὶ τῶν χαρακτηριστικῶν τιμῶν καὶ διανυσμάτων τῶν μετασχηματισμῶν τοῦ Lorentz, *ὑπὸ Ι. Γρατσιάτου**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Ἰω. Ξανθάκη.

§ 1. Εἰσαγωγή.

Συμφώνως πρὸς τὴν εἰδικὴν θεωρίαν τῆς Σχετικότητος αἱ καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι x,y,z καὶ ἡ χρονικὴ συντεταγμένη t γεγονότος ὡς πρὸς σύστημα ἀδρανείας S καὶ αἱ ἀντίστοιχοι συντεταγμέναι αὐτοῦ x', y', z', t' ὡς πρὸς σύστημα ἀδρανείας S′ κινούμενον σχετικῶς μὲ τὸ S συνδέονται διὰ γραμμικῶν σχέσεων αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται ἐξισώσεις μετασχηματισμοῦ τοῦ Lorentz.

Ἐὰν διὰ $x=y=z=t=o$ εἶναι $x'=y'=z'=t'=o$ αἱ γραμμικαὶ αὗται σχέσεις εἶναι ὁμογενεῖς καὶ ἔχομεν μετασχηματισμὸν Lorentz ὁμογενῆ.

Θέτοντες $x^0=ct$,[1] $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὡς ὁμογενεῖς μετασχηματισμοὺς τοῦ Lorentz ὅλους τοὺς ὁμογενεῖς γραμμικοὺς μετασχηματισμοὺς τῶν x^μ (x^0, x^1, x^2, x^3) οἱ ὁποῖοι ἀφήνουν ἀναλλοίωτον τὴν τετραγωνικὴν μορφὴν

$$(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2.$$

Ἑρμηνεύομεν τὰς συντεταγμένας x^μ ὡς ὀρθογωνίους συντεταγμένας εἰς τετραδιάστατον διάστημα σημείων ἢ ὡς ὀρθογωνίους συνιστώσας διανύσματος x (4 - διανύσματος) τοῦ ἀντιστοίχου διανυσματικοῦ διαστήματος, εἰς τὸ ὁποῖον ὁρίζομεν ὡς τετράγωνον τοῦ «μέτρου» τοῦ x (ἢ μετρικήν):

$$x^2=(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2 \tag{1}$$

καὶ ὡς ἐσωτερικὸν γινόμενον $x \cdot y$ δύο 4 - διανυσμάτων x καὶ y (ἐπίσης ἀναλλοίωτον τῶν μετασχηματισμῶν τοῦ Lorentz)

$$x \cdot y=x^0y^0-x^1y^1-x^2y^2-x^3y^3 \tag{2}$$

Τὸ τετραδιάστατον τοῦτο διάστημα καλοῦμεν διάστημα τοῦ Lorentz πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὸ διάστημα τοῦ Minkowski (x,y,z,ict).

Συμφώνως πρὸς τὴν (1) ὁ μετρικὸς τανυστὴς τοῦ διαστήματος τοῦ Lorentz εἶναι

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

* J. GRATSIATOS, Characteristic Values and Vectors of the Lorentz Transformations.

1. εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἰς τὸ κενὸν ἐκπεφρασμένη διὰ τῆς μονάδος μήκους τῶν x, y, z.

καὶ δέον νὰ διακρίνωμεν μεταξὺ τῶν ἀντιμεταβαλλομένων συνιστωσῶν x^μ καὶ τῶν συμμεταβαλλομένων x_μ:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu, \quad x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \text{ [1]}$$

$$\text{καὶ } g^{\mu\nu}g_{\nu\varrho} = g^\mu_\varrho = \delta^\mu_\varrho = 1, \text{ διὰ } \mu = \varrho \text{ καὶ } 0 \text{ διὰ } \mu \neq \varrho$$

Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$x \cdot y = x_\nu x^\nu, \quad x \cdot x = x^2 = x_\nu x^\nu.$$

Τὰ διανύσματα κατατάσσονται εἰς τρεῖς κατηγορίας, εἰς διανύσματα χρόνου, μηδενικὰ ἢ φωτὸς καὶ χώρου καθ' ὅσον

$$x^2 \text{ εἶναι } > 0, \text{ ἢ } = 0, \text{ ἢ } < 0.$$

§. 2. Ἰδιότητες τῶν μετασχηματισμῶν τοῦ Lorentz.

Παριστάνομεν τοὺς συντελεστὰς μετασχηματισμοῦ τοῦ Lorentz ἀπὸ συστήματος (x^μ) εἰς σύστημα $(x^{\mu'})$ μὲ $L^\mu_{\ \nu}$ οὕτως ὥστε διὰ πᾶν διάνυσμα a:

$$a^{\mu'} = L^\mu_{\ \nu}\, a^\nu \tag{4}$$

ἢ μὲ τὸν συμβολισμὸν τῶν πινάκων

$$a' = La,$$

ἔνθα a, L καὶ a′ εἶναι οἱ πίνακες

$$a = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L^0_{\ 0} \ldots L^0_{\ 4} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ L^4_{\ 0} \quad L^4_{\ 4} \end{pmatrix}, \quad a' = \begin{pmatrix} a^{0'} \\ \vdots \\ a^{4'} \end{pmatrix},$$

καὶ La τὸ γινόμενον τῶν πινάκων L καὶ a.

Ἀφοῦ τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων a, b εἶναι ἀναλλοίωτος τοῦ μετασχηματισμοῦ, ἤτοι

$$a' \cdot b' \equiv La \cdot Lb = a \cdot b,$$

εἶναι δὲ

$$a \cdot b = a\,G\,b, \text{ [2]}$$

ὅπου G ὁ πίναξ τοῦ μετρικοῦ τανυστοῦ (3), θὰ ἔχωμεν

$$L\,a\,G\,L\,b = a\,G\,b,$$

ἀλλὰ

$$L\,a\,G\,L\,b = a\,\tilde{L}\,G\,L\,b,$$

1. Οἱ ἑλληνικοὶ δεῖκται μ, ν, ... λαμβάνουν τιμὰς ἀπὸ 0 ἕως 3, οἱ λατινικοὶ k, l, ... ἀπὸ 1 ἕως 3 καὶ γίνεται ἄθροισις ὡς πρὸς ἕκαστον ἐπαναλαμβανόμενον δείκτην, οὕτως ὥστε $x \cdot y = x^0 y^0 - x^k y^k$.

2. aGb εἶναι τὸ γινόμενον τῶν πινάκων a καὶ Gb, τοῦ Gb θεωρουμένου ὡς πίνακος μὲ μίαν στήλην καὶ τοῦ a μὲ μίαν γραμμὴν οὕτως ὥστε $aGb = (a^0, a^k)\begin{pmatrix} b^0 \\ -\beta^k \end{pmatrix} = a.b$

ὅπου:

$$\tilde{L}^{\mu}{}_{\nu} = L^{\nu}{}_{\mu} .$$

ἑπομένως:

$$a \tilde{L} G L b = a G b. \tag{5}$$

Ἐκ τῆς (5) ἕπεται ὅτι πᾶς ὁμογενὴς μετασχηματισμὸς τοῦ Lorentz χαρακτηρίζεται ὑπὸ τῆς συνθήκης:

$$\tilde{L} G L = G, \tag{6}$$

ἡ ὁποία δύναται νὰ γραφῇ

$$g_{\mu\nu} L^{\mu}{}_{\varrho} L^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\varrho\sigma} \tag{7}$$

ἢ ἀκόμη

$$L^{o}{}_{\varrho} L^{o}{}_{\sigma} - L^{k}{}_{\varrho} L^{k}{}_{\sigma} = \varepsilon_{\varrho} \delta_{\varrho\sigma} \tag{7'}$$

(ἄνευ ἀθροίσεως ὡς πρὸς ϱ), μὲ $\varepsilon_0 = 1 \quad \varepsilon_k = -1$.

Ἀπὸ τὰς (6) ἢ τὰς (7) προκύπτει ὅτι ἡ ὁρίζουσα D(L) τοῦ πίνακος L εἶναι ἴση πρὸς ± 1 καὶ ὅτι ὁ πίναξ τοῦ ἀντιστρόφου μετασχηματισμοῦ εἶναι

$$L^{-1} = G \tilde{L} G \tag{8}$$

$$\text{ἢ } (L^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = \varepsilon_{\mu} \varepsilon_{\nu} L^{\nu}{}_{\mu}$$

(ἄνευ ἀθροίσεως).

Ὁμογενεῖς μετασχηματισμοὶ Lorentz μὲ D(L) = 1 λέγονται κυρίως μετασχηματισμοὶ Lorentz, μετασχηματισμοὶ δὲ μὲ $L^{o}{}_{o} \geqq 1$ [1] ὀρθόχρονοι. Οἱ τελευταῖοι ἀφήνουν τὸ σημεῖον τῆς συνιστώσης 0 παντὸς διανύσματος χρόνου ἢ φωτὸς ἀναλλοίωτον: Διὰ

$$L^{o}{}_{o} = 1 \text{ εἶναι } L^{o}{}_{k} = 0 \text{ καὶ διὰ } L^{o}{}_{o} > 1$$

$$(L^{o}{}_{k} a^{k}{}_{o})^2 \leqq (L^{o}{}_{k} L^{o}{}_{k}) (a^{k} a^{k}) = (L^{o2}_{o} - 1) a^{k} a^{k},$$

$$(L^{o}{}_{k} a^{k})^2 < L^{o2}_{o} a^{k} a^{k} \leqq (L^{o}{}_{o} a^{o})^2,$$

διότι διὰ πᾶν διάνυσμα χρόνου ἢ φωτὸς εἶναι:

$$0 < a^{k} a^{k} \leqq (a^{o})^2$$

Συνεπῶς

$$| L^{o}{}_{k} a^{k} | < | L^{o}{}_{o} a^{o} |$$

καὶ τὸ

$$a^{o'} = L^{o}{}_{o} a^{o} + L^{o}{}_{k} a^{k}$$

εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸ a^{o}.

---

1. Ἐκ τῶν (7') συνάγεται $| L^{o}{}_{o} | \geqq 1$

§ 3. Χαρακτηριστικαὶ τιμαὶ καὶ διευθύνσεις τῶν μετασχηματισμῶν τοῦ Lorentz.

Χαρακτηριστικαὶ τιμαὶ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς s (χαρακτηριστικῆς ἐξισώσεως)

$$D\,(L^{\mu}{}_{\nu} - s\,\delta^{\mu}{}_{\nu}) = 0 \tag{9}$$

χαρακτηριστικὸν δὲ διάνυσμα (ἢ διεύθυνσις) εἶναι πᾶν διάνυσμα u ἐπαληθεῦον τὴν ἐξίσωσιν

$$Lu = su\,, \tag{10}$$

ὅπου s εἶναι μία πραγματικὴ ῥίζα τῆς (9).

Τὰ χαρακτηριστικὰ διανύσματα ἔχουν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας.

α) Ἐὰν χαρακτηριστικὸν διάνυσμα u δὲν εἶναι διάνυσμα φωτός, ἡ ἀντίστοιχος πρὸς αὐτὸ χαρακτηριστικὴ τιμὴ λ εἶναι ἴση πρὸς ± 1.

Διότι ἂν

$$Lu = \lambda u$$

$$Lu \cdot Lu = u \cdot u = \lambda^2 (u \cdot u),$$

καὶ ἀφοῦ $u \cdot u \neq 0$, εἶναι $\lambda^2 = 1$.

β) Ἂν $\lambda \neq \pm 1$ (καὶ πραγματική) τὸ ἀντίστοιχον χαρακτηριστικὸν διάνυσμα εἶναι φωτός, ὡς προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως.

γ) Δύο χαρακτηριστικὰ διανύσματα u,v ἀντιστοιχοῦντα, τὸ μὲν u πρὸς 1 (ἢ -1), τὸ δὲ v πρὸς $\lambda \neq 1$ (ἢ -1) τὰ u,v εἶναι κάθετα ἐπ᾽ ἄλληλα:

$$Lu \cdot Lv = \pm \lambda\,(u \cdot v) = u \cdot v$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\pm \lambda \neq 1\,, \text{ εἶναι } u \cdot v = 0\,.$$

Θεωροῦμεν ἐνταῦθα τοὺς μετασχηματισμοὺς L+ μὲ ὁρίζουσαν +1 δυνάμεθα δὲ νὰ περιορισθῶμεν εἰς τοὺς ἐξ αὐτῶν ὀρθοχρόνους, τῆς μεταβάσεως εἰς τοὺς μὴ ὀρθοχρόνους ἢ ἐναντιοχρόνους γινομένης διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν $L^{\mu}{}_{\nu}$ ἐπὶ -1.

Διὰ τοὺς L+ ἡ (9) ἀναπτυσσομένη λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$s^4 + as^3 + bs^2 + as + 1 = 0\,, \tag{11}$$

μὲ τοὺς συντελεστὰς τοῦ s^3 καὶ τοῦ s ἴσους πρὸς $-L^{\nu}{}_{\nu}$. Ἡ ἐξίσωσις ἔχει ἑπομένως τέσσαρας ῥίζας διαφόρους τοῦ 0 ἂν δὲ ἔχῃ τὴν ῥίζαν ± 1 αὕτη εἶναι τοὐλάχιστον διπλῆ.

Ἀποδεικνύεται ἀφ᾽ ἑτέρου[1] ὅτι πᾶς L+ κέκτηται τοὐλάχιστον ἓν χαρακτηριστικὸν διάνυσμα φωτὸς καὶ ὅτι ἂν ἐπὶ πλέον ὁ L+ εἶναι ὀρθόχρονος, ἡ ἀντίστοιχος χαρακτηριστικὴ τιμὴ εἶναι θετική[2].

1. W. H. Greub, Linear Algebra, Springer 1963, σελ. 247.

2. Τοῦτο ἄλλωστε εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς ἰδιότητος ὅτι $(Lu)^0$ εἶναι ὁμόσημον πρὸς u^0.

Ὅθεν ἡ ἐξίσωσις (11) ἔχει τότε τοὐλάχιστον δύο θετικὰς ρίζας ἀντιστρόφους πρὸς ἀλλήλας (ἐνδεχομένως ἴσας πρὸς $+1$).

Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ διακρίνωμεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις:

1η περίπτωσις. Ἡ ἐξίσωσις (9) ἔχει δύο θετικὰς ρίζας λ καὶ $1/\lambda$ ἀνίσους.

Τότε αἱ δύο αὗται ρίζαι εἶναι $\neq 1$, ἔστω $\lambda < 1 < 1/\lambda$, καὶ δύο πρὸς αὐτὰς ἀντίστοιχα χαρακτηριστικὰ διανύσματα $u_{(1)}$ (πρὸς τὴν λ) καὶ $u_{(2)}$ (πρὸς τὴν $1/\lambda$) εἶναι, κατὰ τὰς ἀνωτέρω γεν. ἰδιότητας τῶν διανυσμάτων τούτων διανύσματα φωτός, προφανῶς ἀνεξάρτητα ἀλλήλων.

Τὰ δύο ταῦτα διανύσματα ὁρίζουν ἓν 2-ἐπίπεδον χρόνου[1] (διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων), τὸ ὁποῖον ὁ μετασχηματισμὸς L ἀφήνει, ὡς σύνολον, ἀναλλοίωτον, ἤτοι μετασχηματίζει πᾶν διάνυσμα αὐτοῦ εἰς διάνυσμα τοῦ ἰδίου:

$$L\,(a u_{(1)} + \beta u_{(2)}) = \lambda a u_{(1)} + {}^{\beta}/_{\lambda} u_{(2)}$$

Ἑπομένως ὁ L μετασχηματίζει εἰς ἑαυτὸ καὶ τὸ 2-ἐπίπεδον διὰ τῆς ἀρχῆς, τὸ πλήρως κάθετον ἐπὶ τὸ προηγούμενον, τὸ ὁποῖον εἶναι 2-ἐπίπεδον χώρου[2].

Δυνάμεθα συνεπῶς νὰ λάβωμεν σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων $\bar{x}^{\mu}$ μὲ τοὺς ἄξονας $\bar{x}^0$, $\bar{x}^1$ ἐντὸς τοῦ πρώτου, τοὺς $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$ ἐντὸς τοῦ δευτέρου 2-ἐπιπέδου. Δυνάμεθα π.χ., ὑποθέτοντες $u^{o}_{(1)} > 0$ καὶ $u^{o}_{(2)} > 0$ νὰ λάβωμεν τὸν ἄξονα $\bar{x}^0$ κατὰ τὸ διάνυσμα $u_{(1)} + u_{(2)}$ καὶ τὸν $\bar{x}^1$ κατὰ τὸ $u_{(1)} - u_{(2)}$[3]. Οἱ ἄξονες $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$ λαμβάνονται κατόπιν παράλληλοι πρὸς δύο διανύσματα τοῦ δευτέρου 2-ἐπιπέδου κάθετα ἐπ᾽ ἄλληλα καὶ τοιαῦτα ὥστε ἡ ὁρίζουσα τοῦ μετασχηματισμοῦ ἀπὸ x^{μ} εἰς $\bar{x}^{\mu}$ νὰ εἶναι ἴση πρὸς 1.

---

1. Πρβ. J. L. Synge, Relativity the Special Theory, North-Holland, Publ. Co. Amsterdam 1956, σελ. 61, I. Γρατσιάτου, Ἐπετηρὶς Φυσικομ. Σχολῆς Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης 1959, σελ. 9.

2. Θεωροῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν L ὡς μετασχηματίζοντα γεγονότα ἢ σημεῖα καὶ ὄχι ἄξονας.

3. Τὸ διάνυσμα $u_{(1)} + u_{(2)}$ εἶναι χρόνου, τὸ δὲ $u_{(1)} - u_{(2)}$ χώρου κάθετον ἐπὶ τὸ $u_{(1)}$ δυνάμει τῶν σχέσεων

$$(u_{(1)} \pm u_{(2)})^2 = u^2_{(1)} + u^2_{(2)} \pm 2\, u_{(1)} \cdot u_{(2)} = \pm 2\, u_{(1)} \cdot u_2 \gtrless 0\,,$$

$$(u_{(1)} + u_{(2)}) \cdot (u_{(1)} - u_{(2)}) = u^2_{(1)} - u^2_{(2)} = 0\,.$$

Ὁ πίναξ ὁ παριστῶν τὸν μετασχηματισμὸν L εἰς τὸ σύστημα $\bar{x}^\mu$ εἶναι τότε τῆς μορφῆς

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} \bar{L}^0{}_0 & \bar{L}^0{}_1 & 0 & 0 \\ \bar{L}^1{}_0 & \bar{L}^1{}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{L}^2{}_2 & \bar{L}^2{}_3 \\ 0 & 0 & \bar{L}^3{}_2 & \bar{L}^3{}_3 \end{pmatrix} . \tag{12}$$

Μεταξὺ τῶν πινάκων L καὶ $\bar{L}$ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\bar{L} = \Lambda\, L\, \Lambda^{-1} , \tag{13}$$

ὅπου Λ εἶναι ὁ πίναξ τοῦ μετασχηματισμοῦ ἀπὸ x^μ εἰς $\bar{x}^\mu$ οὕτω δηλ. ὥστε διὰ τυχὸν διάνυσμα

$$u = \begin{pmatrix} u^0 \\ \vdots \\ u^3 \end{pmatrix} \text{ εἰς τὸ σύστημα } \bar{x}^\mu, \text{ καὶ}$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{u}^0 \\ \vdots \\ \bar{u}^3 \end{pmatrix} \text{ εἰς τὸ } \bar{x}^\mu, \text{ θὰ εἶναι:}$$

$$\bar{u} = \Lambda\, u .$$

Ὁ πίναξ $\bar{L}$ ἔχει τὰς αὐτὰς χαρακτηριστικὰς τιμὰς μὲ τὸν L. Τὰ χαρακτηριστικὰ διανύσματα φωτὸς θὰ ἔχουν τὰς συνιστώσας

$$\begin{aligned} &\bar{u}^2_{(1)} = \bar{u}^3_{(1)} = \bar{u}^2_{(2)} = \bar{u}^3_{(2)} = 0 \\ \text{καὶ } &\bar{u}^1_{(1)} = u^0_{(1)} > 0 , \quad -\bar{u}^1_{(2)} = +u^0_{(2)} = u^0_{(1)} > 0 \end{aligned} \tag{14}$$

ἀφοῦ ὁ ἄξων $\bar{x}^1$ ἐλήφθη κατὰ τὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν τοῦ $u_{(1)} - u_{(2)}$.

Ἔχομεν ἑπομένως τὰς σχέσεις

$$\begin{aligned} \bar{L}^0{}_0\, \bar{u}^0_{(1)} + \bar{L}^0{}_1\, \bar{u}^1_{(1)} &= \lambda\, \bar{u}^0_{(1)} \\ \bar{L}^1{}_0\, \bar{u}^0_{(1)} + \bar{L}^1{}_1\, u^1_{(1)} &= \lambda\, \bar{u}^1_{(1)} \end{aligned} \tag{15}$$

καὶ δύο ἀντιστοίχους διὰ τὸ $\bar{u}_{(2)}$ μὲ $^1/_\lambda$ ἀντὶ τοῦ λ.

Ἐκ τῶν (14), (15) καὶ τῶν (7΄) εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} \bar{L}^0{}_0 &= \bar{L}^1{}_1 = {}^1/_2\, (\lambda + {}^1/_\lambda) \\ \bar{L}^0{}_1 &= \bar{L}^1{}_0 = {}^1/_2\, (\lambda - {}^1/_\lambda) \end{aligned} \tag{16}$$

Ἀφ' ἑτέρου ὁ πίναξ

$$\begin{pmatrix} \bar{L}^2{}_2 & \bar{L}^3{}_3 \\ \bar{L}^3{}_2 & \bar{L}^3{}_3 \end{pmatrix}$$

παριστᾷ ὀρθογώνιον μετασχηματισμὸν (περιστροφὴν) ἐντὸς τοῦ εὐκλειδείου ἐπιπέδου $\bar{x}^2$ $\bar{x}^3$ καὶ ἔχει συνεπῶς τὴν μορφὴν

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{17}$$

Ἐξ αὐτῆς συνάγεται ὅτι αἱ δύο ὑπόλοιποι χαρακτηριστικαὶ τιμαὶ τοῦ θεωρουμένου μετασχηματισμοῦ εἶναι αἱ $e^{\pm i\varphi}$ καὶ ὅτι ἄλλα χαρακτηριστικὰ διανύσματα αὐτοῦ δὲν ὑπάρχουν, ἐκτὸς ὅταν $\varphi = o$ (ἢ π) ὁπότε ἔχομεν καὶ ὅλα τὰ διανύσματα τοῦ 2-ἐπιπέδου $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$ διὰ τὴν διπλῆν χαρακτηριστικὴν τιμὴν 1 (ἢ -1).

Λέγομεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ πίναξ τοῦ μετασχηματισμοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν μερικῶς διαγώνιον μορφὴν (12)[1].

2α Περίπτωσις: Ἡ ρίζα τῆς (9) εἰς ἣν ἀντιστοιχεῖ χαρακτηριστικὸν διάνυσμα φωτὸς εἶναι ἴση πρὸς 1.

Τότε ἡ ρίζα αὐτὴ εἶναι διπλῆ (τοὐλάχιστον) καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχουν δύο χαρακτηριστικαὶ διευθύνσεις φωτὸς ἢ μία μόνον. Δι᾽ αὐτὸ διαιροῦμεν τὴν περίπτωσιν ταύτην εἰς δύο μερικάς:

Περίπτωσις 2α. Εἰς τὴν ρίζαν 1 ἀντιστοιχοῦν δύο χαρακτηριστικὰ διανύσματα φωτός.

Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ὑπάρξεως τῶν ἐν λόγῳ διανυσμάτων θεωροῦμεν δύο τυχόντα διανύσματα φωτὸς $u_{(1)}$ καὶ $u_{(2)}$ καὶ ἀποδεικνύομεν ὅτι ὑπάρχουν μετασχηματισμοὶ τοῦ Lorentz ἀφήνοντες τὰς συνιστώσας αὐτῶν ἀναλλοιώτους:

$$Lu_{(1)} = u_{(1)}\,, \quad Lu_{(2)} = u_{(2)}\,.$$

Διὰ τὰ διανύσματα $u_{(1)}$, $u_{(2)}$ ἰσχύουν τὰ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ἐκτεθέντα καὶ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν σύστημα ἀξόνων $\bar{x}^\mu$ ἀκριβῶς ὅπως ἐκεῖ καὶ θὰ ἔχωμεν πάλιν

$$\bar{L} = \Lambda\, L\, \Lambda^{-1}\,.$$

---

1. Παράδειγμα μετασχηματισμοῦ τῆς μορφῆς (12) εἶναι ὁ ἀπὸ συστήματος (x^μ) εἰς ($x^{\mu'}$) κινούμενον σχετικῶς μὲ τὸ πρῶτον κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος x μὲ ταχύτητα v καὶ μὲ ἄξονας x y z συμπίπτοντας μὲ τοὺς ἀντιστοίχους x′ y′ z′ διὰ $t = t' = 0$, ὁ ὀνομαζόμενος εἰδικὸς μετασχηματισμὸς Lorentz μὲ πίνακα

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. Αἱ χαρακτηριστικαὶ τιμαὶ εἶναι $\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\pm 1/2}$ τὰ δὲ χαρακτηριστικὰ διανύσματα τὰ $(1 \pm 1\ 0\ 0)$ καὶ ὅλα τὰ διανύσματα τοῦ ἐπιπ. y z.

Ἐνταῦθα ὁ $\bar{L}$ μετασχηματίζει τοὺς ἄξονας $\bar{x}^0\ \bar{x}^1$ εἰς ἑαυτοὺς καὶ τὸ 2-ἐπίπ. $\bar{x}^2\ \bar{x}^3$ εἰς ἑαυτό, ἑπομένως ἔχει τὴν μορφὴν

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{18}$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ (16), (17) διὰ $\lambda = 1$.

Ὁ πίναξ Λ εὑρίσκεται ἐὰν γράψωμεν τὰς ἐξισώσεις τὰς ἐκφραζούσας ὅτι μετασχηματίζει τὰ διανύσματα (ἤ διευθύνσεις) $u_{(1)}$, $u_{(2)}$ εἰς τοὺς ἄξονας $\bar{x}^0$, $\bar{x}^1$ ἀντιστοίχως.

Ἐὰν λάβωμεν τὰ $u_{(1)}$, $u_{(2)}$ οὕτως ὥστε νὰ εἶναι: $2\,(u_{(1)} \,.\, u_{(2)}) = 1$, ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις

$$\Lambda\,(u_{(1)} + u_{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda\,(u_{(1)} - u_{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Ἐξ αὐτῶν εὑρίσκεται

$$\begin{aligned} \Lambda^0_{\ \mu} &= \varepsilon_\mu\,(u^\mu_{(1)} + u^\mu_{(2)}) \\ \Lambda^1_{\ \mu} &= \varepsilon_\mu\,(u^\mu_{(1)} - u^\mu_{(2)}) \end{aligned} \tag{20}$$

(ἄνευ ἀθροίσεως ὡς πρὸς μ).

Τὰ στοιχεῖα $\Lambda^2_{\ \mu}$, $\Lambda^3_{\ \mu}$ δὲν προσδιορίζονται μονοσημάντως ἐκ τῶν (19). Τὰ $\varepsilon_\mu\Lambda^2_{\ \mu}$, $\varepsilon_\mu\Lambda^3_{\ \mu}$ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς αἱ μ-συνιστῶσαι ζεύγους διανυσμάτων εὑρισκομένων ἐντὸς τοῦ 2-ἐπιπέδου τοῦ καθέτου πρὸς τὸ 2-ἐπίπ. $u_{(1)}$, $u_{(2)}$ καὶ καθέτων πρὸς ἄλληλα καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν οὕτως ὥστε $D(\Lambda) = 1$.

Ἀντιστρόφως πᾶς μετασχηματισμὸς Λ τοῦ τύπου (20) μετασχηματίζει τὰ $u_{(1)} \pm u_{(2)}$ κατὰ τὰς (19), ὁ $\bar{L}$ (διὰ τυχὸν φ) ἀφήνει τὰς συνιστώσας εἰς τὰς (19) ἀναλλοιώτους καὶ ὁ $\overset{-1}{\Lambda}$ ἐπαναφέρει αὐτὰς εἰς τὰς ἀρχικάς των τιμάς, οὕτως ὥστε ὁ $L = \overset{-1}{\Lambda}\,\bar{L}\,\Lambda$ διατηρεῖ τόσον τὸ $u_{(1)}$, ὅσον καὶ τὸ $u_{(2)}$ ἀναλλοίωτον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ μετασχηματισμὸς L ἀνάγεται εἰς περιστροφὴν ἐντὸς τοῦ 2-ἐπιπ. $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$ κατὰ γωνίαν φ καὶ ἔχει ὡς χαρακτηριστικὰ διανύσματα ὅλα τὰ διανύσματα τοῦ 2-ἐπιπέδου $u_{(1)}$, $u_{(2)}$ ὅταν δὲ $\varphi = \pi$ καὶ τὰ τοῦ 2-ἐπιπέδου $\bar{x}^2, \bar{x}^3$ (διὰ $\varphi = 0$, $L = \overline{I}$)[1].

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς 2β. Ἡ 1 εἶναι χαρακτηριστικὴ τιμὴ εἰς ἣν ἀντιστοιχεῖ ἓν μόνον χαρακτηριστικὸν διάνυσμα φωτός.

Ἐὰν τὸ ἐν λόγῳ διάνυσμα εἶναι τὸ u καὶ ὑποθέσωμεν $u^0 = 1$ τὰ u^k εἶναι συνιστῶσαι διανυσματικῆς μονάδος τοῦ εὐκλειδείου διαστήματος $(x^1 x^2 x^3)$. Διὰ μιᾶς περιστροφῆς R εἰς τὸ διάστημα τοῦτο φέρομεν τοὺς ἄξονας $x^1 x^2 x^3$ εἰς τὴν θέσιν $\bar{x}^1\ \bar{x}^2\ \bar{x}^3$ οὕτως ὥστε εἷς ἐκ τῶν τελευταίων, ἔστω ὁ $\bar{x}^1$ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν u^k. Εἰς τὴν περιστροφὴν R ἀντιστοιχεῖ μετασχηματισμὸς

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, \tag{21}$$

διὰ τὸν ὁποῖον

$$\bar{u} = \Lambda u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ὁ πίναξ $\bar{L} = \Lambda L \Lambda^{-1}$ ὁ παριστῶν τὸν L εἰς τὸ σύστημα $\bar{x}^\mu$ ἀφήνει τὸ $\bar{u}$ ἀναλλοίωτον.

Τοῦτο σημαίνει

$$\begin{aligned} \bar{L}^\mu{}_\nu\, \bar{u}^\nu &= 1\,, \ (\text{διὰ } \mu = 0,1) \\ \bar{L}^\mu{}_\nu\, \bar{u}^\nu &= 0\,, \ (\text{διὰ } \mu = 2,3) \end{aligned} \tag{22}$$

Ἐκ τῶν (22) καὶ τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν $\bar{L}^0{}_\nu$ καὶ $\bar{L}^1{}_\nu$ προσδιορίζονται μο-

---

1) Παράδειγμα μετασχηματισμοῦ τοῦ τύπου τούτου εἶναι ὁ

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

μὲ χαρακτηριστικὰ διανύσματα τὰ (1 1 0 0), (1 0 − 1 0), $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

$$\text{καὶ } \Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

νοσημάντως αἱ δύο πρῶται γραμμαὶ τοῦ πίνακος $\overline{L}$ ἐὰν ληφθοῦν αὐθαιρέτως τὰ στοιχεῖα $\overset{-o}{L}_2 = a$, $\overset{-o}{L}_3 = b$ [1]

Αἱ τιμαὶ τῶν $\overset{-o}{L}_\nu$, $\overset{-1}{L}_\nu$ εἶναι αἱ ἀκόλουθοι

$$\begin{aligned} &\overset{-o}{L}_0 = 1 + \frac{a^2+b^2}{2}, \quad \overset{-o}{L}_1 = -\frac{a^2+b^2}{2}, \quad \overset{-0}{L}_2 = a \quad \overset{-0}{L}_3 = b \\ &\overset{-1}{L}_0 = \frac{a^2+b^2}{2} \quad \overset{-1}{L}_1 = 1 - \frac{a^2+b^2}{2} \quad \overset{-1}{L}_2 = a \quad \overset{-1}{L}_3 = b \end{aligned} \tag{23}$$

Τὰ στοιχεῖα τῶν δύο τελευταίων γραμμῶν ὑπολογίζονται ἐκ τῶν σχέσεων μεταξύ των καὶ μετὰ τῶν ἀνωτέρω καὶ τῆς συνθήκης $D(\overline{L}) = 1$ εἶναι δὲ τὰ ἑξῆς:

$$\begin{aligned} &\overset{-2}{L}_0 = a\cos\varphi - b\sin\varphi, \quad \overset{-2}{L}_1 = -\overset{-2}{L}_0, \overset{-2}{L}_2 = \cos\varphi \quad \overset{-2}{L}_3 = -\sin\varphi \\ &\overset{-3}{L}_0 = a\sin\varphi + b\cos\varphi, \quad \overset{-3}{L}_1 = -\overset{-3}{L}_0, \overset{-3}{L}_2 = \sin\varphi \quad \overset{-3}{L}_3 = \cos\varphi \end{aligned} \tag{23'}$$

ὅπου φ εἶναι μία αὐθαίρετος γωνία.

Ἀντιστρόφως, πᾶς μετασχηματισμὸς τοῦ τύπου τούτου μετασχηματίζει τὸ διάνυσμα $\overline{u}$ (1 1 0 0) εἰς ἑαυτό. Τότε διὰ πάντα Λ τοῦ τύπου (21) τὸ διάνυσμα $u = \Lambda^{-1}\overline{u}$ μετασχηματίζεται ὑπὸ τοῦ $\Lambda^{-1}\overline{L}\Lambda$ εἰς ἑαυτὸ καὶ ὁ Λ δύναται νὰ ληφθῇ οὕτως ὥστε τὸ u νὰ εἶναι οἱονδήποτε διάνυσμα φωτός.

Εἰς τοὺς ὡς ἄνω μετασχηματισμοὺς L περιλαμβάνονται καὶ οἱ ἔχοντες δύο χαρακτηριστικὰ διανύσματα φωτός. Ἐὰν ταῦτα εἶναι τὸ u $(1\ u^1 u^2 u^3)$ καὶ τὸ v $(1\ v^1 v^2 v^3)$ δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ περιστροφὴ R εἶναι τοιαύτη ὥστε ὁ ἄξων x^1 νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν διανυσματικὴν μονάδα u^k καὶ ὁ $\overline{x}^2$ (ἢ ὁ $\overline{x}^3$) νὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ ἐπιπέδου τῶν u^k, v^k.

Εἰς τὴν R ἀντιστοιχεῖ κατὰ τὴν (21) μετασχηματισμὸς Λ τοιοῦτος ὥστε

$$\overline{u} = \Lambda u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ καὶ } \overline{v} = \Lambda v = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ἢ } \overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \nu_1 \\ 0 \\ \nu_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{ὅπου } \mu_1^2 + \mu_2^2 = 1, \ \mu_2 \neq 0, \text{ ἢ } \nu_1^2 + \nu_3^2 = 1, \ \nu_3 \neq 0$$

Τότε ὁ $\overline{L} = \Lambda L \Lambda^{-1}$ ἔχει τὰ χαρακτηριστικὰ διανύσματα $\overline{u}$ καὶ $\overline{v}$:

$$\overline{L}\,\overline{u} = \overline{u}, \quad \overline{L}\,\overline{v} = \overline{v} \tag{24}$$

1) Ὅλα τὰ ἐν λόγῳ στοιχεῖα προκύπτουν ἐκ γραμμικῶν σχέσεων πλὴν τῶν $\overset{-1}{L}_2$, $\overset{-1}{L}_3$ διὰ τὰ ὁποῖα προκύπτει δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις δίδουσα

$$\overset{-1}{L}_2 = a \pm \sqrt{-(\overset{-1}{L}_3 - b)^2} \text{ ἤτοι } \overset{-1}{L}_3 = b, \ \overset{-1}{L}_2 = a,$$

ἵνα ἔχωμεν πραγματικὰς τιμάς.

Ὁ $\overline{L}$ εἶναι κατὰ τὰ προηγούμενα τοῦ τύπου (23), (23'). Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (24) εὑρίσκεται ἡ γωνία φ καὶ τὰ μ_1, μ_2 (ἢ ν_1, ν_2)

$$\cos\varphi = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\mu_1 = \frac{(a^2+b^2)^2 - 4a^2}{(a^2+b^2)^2 + 4a^2}, \quad \mu_2 = \frac{-4a\,(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2+4a^2}, \tag{25}$$

ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν $a \neq 0$, ἢ

$$\cos\varphi = \frac{-2ab}{a^2+b^2}, \quad \sin\varphi = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

$$\nu_1 = \frac{(a^2+b^2)^2 - 4b^2}{(a^2+b^2)^2 + 4b^2}, \quad \nu_2 = \frac{-4b\,(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2+4b^2}, \tag{25α}$$

ἐὰν $b \neq 0$

Ἀντιστρόφως, πᾶς μετασχηματισμὸς $\overline{L}$ τοῦ τύπου (23) ἔχει διὰ τὰς εἰδικὰς ταύτας τιμὰς τῆς γωνίας φ δύο ἀκριβῶς χαρακτηριστικὰ διανύσματα φωτὸς καὶ ἐπειδὴ ὁ Λ δύναται νὰ ληφθῇ οὕτως ὥστε τὰ $u = \Lambda^{-1}\overline{u}$, $v = \Lambda^{-1}\overline{v}$, νὰ εἶναι οἱαδήποτε, πᾶς L ἔχων τὴν ἰδιότητα ταύτην δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$L = \Lambda^{-1}\,\overline{L}\,(a, b, \varphi\,(a, b)\,)\,\Lambda$$

ὅπου a καὶ b εἶναι αὐθαίρετοι ἀριθμοί, ἐξ ὧν ὁ εἷς τοὐλάχιστον εἶναι $\neq 0$ καὶ φ ἡ γωνία (25) ἢ (25α).

Ἐξαιρουμένων τῶν τιμῶν αὐτῶν τῆς φ πᾶς $\overline{L}$ τῆς μορφῆς (23) (καὶ ὁ ἀντίστοιχος L) κέκτηται μίαν ἀκριβῶς χαρακτηριστικὴν διεύθυνσιν φωτὸς (ἐφ' ὅσον φυσικὰ δὲν εἶναι $a = b = 0$) καὶ οὐδεμίαν χαρακτηριστικὴν διεύθυνσιν χρόνου [1]).

Δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ χαρακτηριστικὸν διάνυσμα χώρου v ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χαρακτηριστικὴν τιμὴν 1. Τότε κατὰ τὴν προηγουμένην παρατήρησιν τὸ 2-ἐπίπ. $\overline{u}, \overline{v}$ εἶναι ἐπίπ. φωτὸς καὶ τὸ $\overline{v}$ δύναται νὰ ληφθῇ κάθετον ἐπὶ τὸ $\overline{u}$, ὁπότε $\overline{v}^0 = \overline{v}^1$.

1) Ἐὰν ὑπῆρχε τοιαύτη διεύθυνσις, ὅλαι αἱ διευθύνσεις τῶν 2-ἐπιπ. αὐτῆς καὶ τῆς (1 1 0 0) θὰ ἦσαν χαρακτηριστικαί, ἑπομένως καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς τομῆς τοῦ ἐν λόγῳ 2-ἐπιπ. καὶ τοῦ κώνου φωτὸς $\chi_\mu \chi^\mu = 0$ ἡ διάφορος τῆς (1 1 0 0).

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν

$$(\bar{L}\,\bar{v})^0 = (\bar{L}\,\bar{v})^1 = \bar{v}^0 + a\,\bar{v}^2 + b\,\bar{v}^3 = \bar{v}^0$$

$$(\bar{L}\,\bar{v})^2 = \bar{v}^2 \cos\varphi - \bar{v}^3 \sin\varphi = \bar{v}^2$$

$$(\bar{L}\,\bar{v})^3 = \bar{v}^2 \sin\varphi + \bar{v}^3 \cos\varphi = \bar{v}^3$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων προκύπτει

$$\cos\varphi = 1\,,\ \sin\varphi = 0\,,\ \frac{\bar{v}^2}{\bar{v}^3} = -\,b/a$$

καὶ δύναται νὰ τεθῇ $\bar{v} = (0\,0 - b\ a)$.

Ἑπομένως αἱ χαρακτηριστικαὶ τιμαὶ $e^{\pm i\varphi}$ τοῦ πίνακος συμπίπτουν εἰς τὴν 1 καὶ τὸ $\bar{v}$ δέον νὰ θεωρηθῇ ὡς διπλοῦν χαρακτηριστικὸν διάνυσμα ἀντίστοιχον πρὸς τὴν διπλῆν τιμὴν 1, ὁμοίως δὲ καὶ τὸ $\bar{u}$.

Ὅθεν ὁ μετασχηματισμὸς

$$\bar{L}(a,b,0) = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{a^2+b^2}{2} & -\dfrac{a^2+b^2}{2} & a & b \\ \dfrac{a^2+b^2}{2} & 1-\dfrac{a^2+b^2}{2} & a & b \\ a & -a & 1 & 0 \\ b & -b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

μὲ τὴν τετραπλῆν χαρακτηριστικὴν τιμὴν 1 διὰ a, b αὐθαίρετα, ἀλλὰ $\dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \mp 1 \mp \dfrac{-2ab}{a^2+b^2}$ ἔχει ὡς χαρακτηριστικὰς διευθύνσεις ὅλας τὰς διευθύνσεις τοῦ 2-ἐπιπ. τῶν (1 1 0 0), (0 0 − b a) καὶ ἀφήνει, ὡς σύνολον, ἀναλλοίωτον τὸ κάθετον εἰς αὐτὸ 2-ἐπίπ., ἤτοι τὸ τῶν (1 1 0 0) (0 0 a b) τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ διευθύνσεις ἐκτὸς τῆς (1 1 0 0) περιστρέφονται ἐντὸς αὐτοῦ.

Ἄλλαι χαρακτηριστικαὶ διευθύνσεις τοῦ $\bar{L}$ (a, b φ) ὑπάρχουν ὅταν αἱ ὑπόλοιποι χαρακτηριστικαὶ τιμαὶ αὐτοῦ $e^{\pm i\varphi}$ εἶναι πραγματικαὶ καὶ διάφοροι τῆς μονάδος, ἤτοι $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi = -1$. Αἱ ἀντίστοιχοι διευθύνσεις εἶναι, κατὰ τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν χαρακτηριστικῶν διευθύνσεων, κάθετοι ἐπὶ τὴν (1 1 0 0) καί, ὡς εὐκόλως προκύπτει, εἶναι ὅλαι αἱ διευθύνσεις τοῦ 2-ἐπιπ. χώρου τῶν διανυσμάτων $(a/2\,,\ a/2\,,\,0\,0)\,,\ (b/2\ \ b/2\ 0\,0)$, καθέτου ἐπὶ τὸ (1 1 0 0).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι ἂν τὸ cosφ εἶναι διάφορον τῶν ± 1 καὶ τῶν τιμῶν (25), (25α) ὁ μετασχηματισμὸς $\bar{L}$ (a, b, φ) ἔχει ὡς μοναδικὴν χαρακτηριστικὴν διεύθυνσιν τὴν (1 1 0 0). Δι' ὅλας δὲ τὰς τιμὰς τῆς φ διὰ τὰς ὁποίας τὸ cosφ εἶναι διάφορον τῶν (25) καὶ (25α), τόσον ὁ $\bar{L}$ ὅσον καὶ ὁ ἀντίστοιχος L δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναχθοῦν εἰς τὴν μερικῶς διαγώνιον μορφὴν (12)[1].

1) Ἐπὶ τοῦ σημείου τούτου διατυποῦνται ἐν τῇ βιβλιογραφίᾳ ἐσφαλμέναι ἀπόψεις. Οὕτως ὁ Synge εἰς τὸ ἀνωτέρω ἀναφερόμενον σύγγραμμά του (σελ. 94) καταλήγει εἰς τὸ συμπέ-

SUMMARY

In this papers the eigenvalues and eigenvectors of the proper orthochronous Lorentz transformations are investigated.

On the basis of the known property that every transformation possesses at least one characteristic light vector corresponding to a positive eigenvalue it is shown, that there exist two eigenvalues reciprocal to one another and positive and two of the form $e^{\pm i\varphi}$, where φ is a real angle.

When the real eigenvalues are unequal, there are two corresponding light eigenvectors. In this case the transformation matrix can be reduced to the form (12) and the transformation is equivalent to a Lorentz transformation with symmetric matrix in the 2-flat of the light eigenvectors followed by (or preceded by) a rotation through φ in the space-like 2-flat orthogonal to the former.

If the eigenvalues are 1, 1, $e^{\pm i\varphi}$ the transformation can have two light eigenvectors or only one. In the former case the transformation is equivalent to a rotation through φ in a space-like 2-flat, in the latter the transformation matrix cannot be reduced to the partially diagonal form. There exist in this case no other eigenvector, except when $\cos\varphi = 1$.

All space 4-vectors of a light-like 2-flat containing the light eigenvectors are then eigenvectors and the light-like 2-flat orthogonal to this is transformed in to itself.

The form of the transformation matrix for these «singular» cases is found ((23), (23')).

ρασμα «Any finite Lorentz transformation of the restricted class defined in (35) (δηλ. μὲ $L^0_0 > 0$ καὶ $D(L) = 1$) is equivalent to a 4-screw» ὁρίζων τὸ 4-screw ὡς ἑξῆς: «It is a Lorentz transformation consisting of a rotation in a time-like 2-flat Π followed by (or preceded by) a rotation in a space-like 2-flat Π*, the 2-flats Π and Π* being orthogonal to one another».

Οἱ μετασχηματισμοὶ οἱ ἔχοντες τὴν ἰδιότητα ταύτην εἶναι οἱ τῶν περιπτώσεων 1 καὶ 2α, οἱ ἔχοντες (διὰ $L^0_0 > 1$) δύο χαρακτηριστικὰς διευθύνσεις φωτός, οὐχὶ δὲ οἱ τῆς 2β μὲ μίαν μόνον τοιαύτην διεύθυνσιν.

Εἰς τὴν δευτέραν ἔκδοσιν τοῦ βιβλίου του (1965, σελ. 436) ὁ Synge ἀποδεικνύει τὴν ὕπαρξιν τῶν μετασχηματισμῶν αὐτῶν διὰ τῆς μεθόδου τῶν «Spinors», δὲν προσδιορίζει ὅμως τὴν μορφὴν τῶν ἀντιστοίχων πινάκων.