ἀριστοτεχνικὴ αὐτῆς χρῆσις γίνεται, μάλιστα δὲ ὑπὸ τοῦ Σωκράτους διακωμῳδεῖται ὁ παραλληλισμός[1]. Ἡ ὀρθόδοξος ἐκκλησιαστικὴ ποίησις, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖ τὸν παραλληλισμόν, δύναται νὰ εἶναι πηγὴ διὰ τὸν Σολωμόν, διότι ἀπὸ παιδικῆς ἡλικίας παρηκολούθει τὴν λατρευτικὴν ζωὴν τῆς Ἐκκλησίας μας, ἀλλὰ λόγῳ τῆς παιδικῆς ἀνωριμότητός του δὲν δύναμαι νὰ δεχθῶ συνειδητὴν ἐπίδρασιν διὰ τὰ σχήματα ταῦτα τοῦ λόγου, δέχομαι μόνον ὑποσυνείδητον αἰσθητικὴν ἀγωγὴν καὶ προετοιμασίαν τοῦ Σολωμοῦ διὰ τὴν εἰς ὥριμον ἡλικίαν συνειδητὴν ἀποδοχὴν τῶν σχημάτων τούτων. Τὰ δημοτικὰ τραγούδια, τὰ ὁποῖα ἐξ ἐπιδράσεως τῆς ἐκκλησιαστικῆς ποιήσεως χρησιμοποιοῦν τὸν παραλληλισμόν, δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἡ κυρία πηγή, δύνανται μόνον νὰ εἶναι δευτερεύουσα καὶ ἐνισχυτικὴ τῆς κυρίας πηγῆς, διότι ὁ Σολωμὸς πρὶν μελετήσῃ μετὰ προσοχῆς τὰ δημοτικὰ τραγούδια εἶχε γράψει τὴν «Ode per Prima Messa» ὅπου χρησιμοποιεῖ τὸ σχῆμα τοῦτο. Φρονῶ ὅτι μόνον ἡ Ἁγία Γραφή, ἡ ὁποία ἀριστοτεχνικῶς ἀνέπτυξε τὸν παραλληλισμόν, ὑπῆρξεν ἡ κυρία καὶ συνειδητὴ πηγὴ τοῦ Σολωμοῦ διὰ τὸ σχῆμα τῆς παλιλλογίας καὶ τοῦ παραλληλισμοῦ, διότι ὁ ἐθνικός μας ποιητὴς γνωρίζει ἄριστα τὴν Ἁγίαν Γραφήν, «προσπαθεῖ νὰ τὴν ἐνθυμῆται ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερον» καὶ θαυμάζει ὄχι μόνον τὴν ἰδεολογικὴν ἀλλὰ καὶ τὴν λογοτεχνικήν της ἀξίαν, καὶ διότι τὸ $^1/_5$ τῶν σχημάτων τοῦ παραλληλισμοῦ, τοὺς ὁποίους χρησιμοποιεῖ ὁ Σολωμός, ἀπηχεῖ ἰδέας ἐκ τῆς Ἁγίας Γραφῆς.

Ἑπομένως ἡ λογοτεχνικὴ ἐπίδρασις τῆς Ἁγίας Γραφῆς ἐπὶ τοῦ ἐθνικοῦ μας ποιητοῦ Δ. Σολωμοῦ ὑπῆρξεν ἐνσυνείδητος καὶ πλουσία[2].

ΙΣΤΟΡΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.— **Σκέψεις τινὲς ἐπὶ τῶν διαστάσεων τῆς ὀρθογωνίου βάσεως τῶν ναῶν τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς τέχνης,** ὑπὸ ***Χρ. Μ. Κεφάλα.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχ. Στεφανίδου.

Α. Λόγοι οἱ ὁποῖοι μᾶς ὡδήγησαν εἰς τὴν ἔρευναν ταύτην.

Ἡ διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἡ ὁποία ἀναφέρεται εἰς τὰ στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου καὶ ἡ ὁποία κατὰ καιροὺς ἔλαβε διαφόρους ὀνομασίας, διότι ἐθεωρήθη ὅτι εἰς πολλὰ ἔδιδε λύσιν, ἐκλήθη κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ 19ου αἰῶνος χρυσῆ τομή, καὶ ἐπιστεύθη ὅτι δι' αὐτῆς ἔχομεν κριτήριον ἢ ἀρχὴν τοῦ καλλίστου ὀρθογωνίου.

Ἐπειδὴ πολλοὶ τῶν νεωτέρων συγγραφέων δὲν πιστεύουν εἰς τὴν ὀρθότητα τῆς

1 Πλάτωνος Συμπ. 196-197.

2 Ἀνάπτυξιν τῆς λογοτεχνικῆς ἐπιδράσεως τῆς Ἁγ. Γραφῆς ἐπὶ τοῦ ἐθνικοῦ ποιητοῦ Δ. Σολωμοῦ καὶ πίνακα χωρίων ἑλληνικῶν ποιημάτων τοῦ Σολωμοῦ χρησιμοποιούντων τὸ σχῆμα τοῦ Παραλληλισμοῦ θὰ δημοσιεύσω προσεχῶς εἰς εἰδικὴν μελέτην μου.

ὑποθέσεως ταύτης, καθ' ὅσον καὶ αἱ ἐκ τῶν ὑστέρων προσπάθειαι διὰ μίαν ἐπιστημονικὴν ἢ ψυχολογικὴν ἑρμηνείαν τῆς ὑποθέσεως ταύτης ἀπέτυχεν, ἠθελήσαμεν νὰ ἐρευνήσωμεν μήπως τοῦτο ἦτο ἀντίληψις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, ἐφ' ὅσον καὶ ἡ τομὴ αὕτη ἦτο ἔργον ἰδικόν των.

Πρὸ πάσης ὅμως ἐρεύνης ἡμῶν ἠθελήσαμεν νὰ ἐξακριβώσωμεν κατὰ πόσον ἡ χρυσῆ τομὴ ἐχρησιμοποιήθη πράγματι εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν καλλίστων ὀρθογωνίων· Πρὸς τοῦτο ὅμως ἔπρεπε νὰ γνωρίσωμεν διαστάσεις διαφόρων ὀρθογωνίων κατασκευασθέντων ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων.

Ἡ ἐπὶ τῶν ἀρχαίων κειμένων μελέτη ἡμῶν δὲν ἔδωκε περιγραφὰς τοιούτων ὀρθογωνίων. Ἡ περαιτέρω ὅμως μελέτη ἔδωκεν ὅτι εἰς κάθε ἐποχὴν τῆς Ἀρχαίας ἱστορίας ἡ κατασκευὴ τῶν ναῶν εἶχε πάντοτε σχέσιν πρὸς τὰς ἑκάστοτε μαθηματικὰς γνώσεις, εἴτε ἀμέσως εἴτε ἐμμέσως, διότι σχέσιν πρὸς αὐτὰς εἶχε καὶ ἡ Ἀρχιτεκτονικὴ τῆς ἐποχῆς. Οὕτω εὕρομεν ὅτι 1) ἡ κατασκευὴ τοῦ Ναοῦ τοῦ Σολομῶντος σχετίζεται μὲ τὰς τότε γνώσεις τῆς κατασκευῆς κανονικοῦ ἑξαγώνου 2) ὁ ναὸς τοῦ Ἄθορ ἐν Αἰγύπτῳ, κατασκευασθεὶς τῷ 300 π. Χ., φέρει ἀνάγλυφον, τὸ ὁποῖον παριστᾷ πῶς ὁ Φαραὼ καὶ ἡ θεὰ τῶν μαθηματικῶν προσδιορίζουν τὸ σχῆμα τοῦ ναοῦ τούτου, τὸ ὁποῖον εἶναι ὀρθογώνιον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον μὲ πλευρὰς τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ τριγώνου, μὲ διαστάσεις λόγου 1 πρὸς $\sqrt{3}$. 3) Ἡ κατασκευὴ τῶν πυραμίδων τῆς Αἰγύπτου ἐγένετο μὲ τὴν βοήθειαν τῶν τότε μαθηματικῶν γνώσεων καὶ τόσα ἄλλα.

Ἐπειδὴ εἶναι γνωστὴ ἡ ἐπίδρασις τῆς Αἰγύπτου ἐπὶ τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ πνεύματος, ὑπεθέσαμεν ὅτι καὶ τῶν ἑλληνικῶν ναῶν ἡ κατασκευὴ θὰ εἶχεν ἄμεσον σχέσιν καὶ μὲ τὰς τότε μαθηματικὰς γνώσεις αὐτῶν.

Κατόπιν τούτου ἐζητήσαμεν τὰς διαστάσεις τῶν ὀρθογωνίων βάσεων τῶν ἀρχαίων ἑλληνικῶν ναῶν. Εἰς τὸ ζήτημα τοῦτο εὕρομεν μίαν μικρὰν δυσκολίαν, διότι οἱ διάφοροι συγγραφεῖς, οἱ ὁποῖοι περιγράφουν τοὺς ναούς, διαφωνοῦν ὡς πρὸς αὐτὰς πολλάκις κατὰ ἑκατοστά τινα τοῦ μέτρου. Ἐλάβομεν λοιπὸν ὡς βάσιν τὸν ἀμερικανὸν συγγραφέα Robertson τοῦ ὁποίου τὸ ἔργον Greek and Roman Architecture φέρει εἰς τὸ τέλος πίνακα διαστάσεων τῶν διαφόρων ναῶν.

Αἱ διαστάσεις τῶν ὀρθογωνίων βάσεων τῶν ναῶν ἀποκλείουν νὰ εὑρέθησαν βάσει τῆς λεγομένης χρυσῆς τομῆς.

Κατόπιν τῆς ἀρνήσεως ταύτης ἠθελήσαμεν νὰ ἐρευνήσωμεν, ἐὰν πράγματι ὑπῆρχε παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις ἀντίληψίς τις περὶ καλλίστου ὀρθογωνίου.

Β'. Τὸ κάλλιστον ὀρθογώνιον παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις.

Νέα ἔρευνα ἐπὶ τῶν ἀρχαίων κειμένων ἐντὸς τῶν πλαισίων τῆς ἡμετέρας δυνατότητος δὲν ἔφερεν εἰς φῶς πολλὰ πράγματα. Ἄξιον προσοχῆς ἐθεωρήσαμεν ὅσα ὁ Πλάτων ἀναφέρει εἰς τὸν Τίμαιον καὶ δὴ εἰς τὸ 20ὸν κεφάλαιον αὐτοῦ.

Οὗτος ἀφοῦ διακρίνει ἐξ ὅλων τῶν τριγώνων τὸ ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς καὶ τὸ ὀρθογώνιον σκαληνὸν προσθέτει «Τοῖν δὴ δυοῖν τριγώνοιν τὸ μὲν ἰσοσκελὲς μίαν εἴληχε φύσιν, τὸ δὲ πρόμηκες ἀπεράντους· προαιρετέον οὖν αὖ τῶν ἀπείρων τὸ κάλλιστον, εἰ μέλλομεν ἄρξεσθαι κατὰ τρόπον..... τιθέμεθα δ' οὖν τῶν πολλῶν τριγώνων κάλλιστον ἕν, ὑπερβάντες τἆλλα, ἐξ οὗ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἐκ τρίτου συνέστηκε... τὸ δὲ τριπλῆν κατὰ δύναμιν ἔχον τῆς ἐλάσσονος τὴν μείζω πλευράν». Ἤτοι κατὰ τὸν Πλάτωνα τὸ κάλλιστον τρίγωνον εἶναι τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον καθέτους πλευρὰς τὰς πλευρὰς τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου καὶ τετραγώνου, μεγέθη ἀσύμμετρα.

Κατόπιν τούτων ἐτέθη ὑφ' ἡμῶν νέα ὑπόθεσις ὅτι ἴσως κάλλιστον ὀρθογώνιον παρὰ τοῖς ἀρχαίοις Ἕλλησιν ἦτο τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον διαστάσεις τὰς διαστάσεις τοῦ ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος ἀναφερομένου καλλίστου ὀρθογωνίου τριγώνου.

Καὶ πάλιν αἱ διαστάσεις τῶν ναῶν ἀπέρριψαν τὴν ὑπόθεσίν μας ταύτην.

Νέαι σκέψεις μᾶς ὡδήγησαν εἰς ἔρευναν τῆς ἱστορίας τῶν Αἰγυπτίων καὶ Ρωμαίων καθ' ὅσον 1) οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες τὰ πρῶτα περὶ Γεωμετρίας ἐδιδάχθησαν παρὰ τῶν Ἰνδιῶν καὶ Αἰγυπτίων καὶ 2) ἡ τέχνη καὶ ἐπιστήμη τῶν Ρωμαίων πιστεύεται ὅτι φέρει τὴν ἐπίδρασιν τῶν ἀντιλήψεων τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ πνεύματος.

Ἡ μελέτη ἔφερεν εἰς φῶς κοινὴν κατασκευὴν ὀρθογωνίου καὶ εἰς τὰς δύο ἐποχὰς καὶ ἔδωκε τὴν ἐντύπωσιν ὅτι θὰ ἔλυε τὸ ὑπὸ μελέτην πρόβλημα ὁριστικῶς.

Ὁ Cantor (1880) ἀναφέρει εἰς τὴν ἱστορίαν του περὶ τῶν μαθηματικῶν, ὅτι οἱ Ρωμαῖοι διεχώριζον τοὺς ἀγροὺς εἰς ὀρθογώνια, τῶν ὁποίων αἱ διαστάσεις ἔχουν λόγον 1 πρὸς 2. Τὸ αὐτὸ ὅμως εὕρομεν ὅτι συνέβαινε καὶ εἰς τοὺς τάφους τῆς πρώτης δυναστείας τῆς Αἰγύπτου, οἱ ὁποῖοι ἐκτίσθησαν 4000 περίπου ἔτη π. Χ. καὶ οἱ ὁποῖοι ἀπεκαλύφθησαν κατὰ τὰς ἀνασκαφάς, αἱ ὁποῖαι ἔγιναν τῷ 1767 ἐπὶ Ναπολέοντος. Τέλος οἱ Ρωμαῖοι Μᾶρκος Vitruvius Pollio περὶ τὸν πρῶτον πρὸ Χριστοῦ αἰῶνα γράφει ὅτι οἱ κίονες τῶν ναῶν πρέπει νὰ διαχωρίζωνται οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζεται ὀρθογώνιον τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις νὰ ἔχουν λόγον 1 πρὸς 2.

Ἐτέθη λοιπὸν ἡ ὑπόθεσις ὅτι καὶ παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις ἴσως κάλλιστον ὀρθογώνιον θὰ ἦτο τοῦτο, δηλαδὴ τὸ ἔχον λόγον διαστάσεων 1 πρὸς 2 καὶ μάλιστα ἴσως ἡ ἀντίληψις αὕτη νὰ ἦτο ἡ αὐτὴ δι' ὅλας τὰς ἐποχάς. Ἡ ὑπόθεσις αὕτη φαίνεται μάλιστα νὰ ἔχῃ ἅμα μαθηματικήν τε καὶ ψυχολογικὴν βάσιν. Οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 2 εἶναι πρῶτοι ἀριθμοὶ τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀκεραίων καὶ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου. Καὶ πάλιν ὅμως αἱ διαστάσεις τῶν ναῶν τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων ἀπέρριψαν καὶ τὴν ὑπόθεσιν ταύτην.

Ἡ διαρκὴς αὕτη ἄρνησις τῶν διαφόρων ὑποθέσεων, αἱ ὁποῖαι τόσα ὑπὲρ αὐτῶν διέθετον, μᾶς ἠνάγκασαν νὰ λάβωμεν θέσιν ἔναντι τοῦ προβλήματος τῆς κατασκευῆς τῆς ὀρθογωνίου βάσεως τῶν διαφόρων ἑλληνικῶν ναῶν.

Γ'. Ὑπόθεσις διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ὀρθογωνίου βάσεως τῶν ἑλληνικῶν ναῶν.

Πρὸς τοῦτο κατ' ἀρχὰς ἐμελετήσαμεν εὐρύτερον τὰς περὶ καλοῦ ἀντιλήψεις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ὡς καὶ τῶν ὅσων περὶ ἁρμονίας ἀναφέρει ὁ Πρόκλος καὶ περὶ μουσικῆς ὁ Ἀρχύτας.

Ὁμολογοῦμεν ὅτι ἡ εὐρυτάτη χρῆσις τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἰς τὸν σχηματισμὸν ἁρμονιῶν, ἰδίως εἰς Πρόκλον, δὲν μᾶς ἐξένισεν.

Εἴχομεν τὴν γνώμην ὅτι ἂν πράγματι ὑπάρχῃ μία καθαρῶς ἑλληνικὴ ἀντίληψις περὶ τοῦ καλλίστου ὀρθογωνίου, αὕτη θὰ ἦτο μᾶλλον μαθηματικὴ παρὰ ψυχολογική, στηριζομένη ἐπὶ τῆς τότε μαθηματικῆς γνώσεως. Συνεπῶς αἱ διαστάσεις ἑνὸς τοιούτου ὀρθογωνίου ὤφειλον κατὰ τὴν γνώμην ἡμῶν α) νὰ μὴ εἶναι μακρὰν τῶν περὶ τετραγωνικῆς ρίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ γνώσεων αὐτῶν, β) νὰ μὴ εἶναι μακρὰν τῶν περὶ τετραγωνικῆς ρίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ γνώσεων αὐτῶν.

Μετὰ ταῦτα ἐπεδόθημεν εἰς τὴν συστηματικὴν μελέτην τῶν διαστάσεων τοῦ πίνακος Robertson καὶ ὡδηγήθημεν εἰς τὰ κάτωθι συμπεράσματα α) ὅτι οἱ πλεῖστοι τῶν ναῶν ἔχουν διαστάσεις, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι μικρότερος τοῦ 1/2 καὶ μεγαλύτερος τοῦ 1/3 β) ὅτι ἐλάχιστοι μόνον ναοὶ ἔχουν λόγον διαστάσεων μεγαλύτερον τοῦ 1/2 καὶ μικρότερον τοῦ 5/9, ὡς οἱ ναοὶ Ποσειδῶνος ἐν Ποσειδωνίᾳ 0,507, Ἀσκληπιοῦ Ἐπιδαύρου 0,517, Ἀθηνᾶς Περγάμου 0,563, Ἀθηνᾶς Πριήνης 0,525, Ἀρτέμιδος Μαγνησίας 0,56 καὶ Διονύσου ἐν Τέῳ 0,528. Οἱ ναοὶ τοῦτοι εἶναι οἱ νεώτεροι.

Κατόπιν τούτων ἡ μελέτη ἡμῶν διηρέθη εἰς δύο· ἡ μία ἀφορᾷ τοὺς ναοὺς οἱ ὁποῖοι ἔχουν διαστάσεις μὲ λόγον μεταξὺ 1/2 καὶ 1/3 καὶ ἡ ἄλλη τοὺς ναοὺς οἱ ὁποῖοι ἔχουν διαστάσεις μὲ λόγον μεταξὺ 1/2 καὶ 5/9.

Ὡς γνωστὸν οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι δύνανται νὰ εἶναι πλευραὶ τοῦ αὐτοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, εἶναι οἱ 2α, α^2-1 καὶ α^2+1 διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ α, διότι

$$(2\alpha)^2+(\alpha^2-1)=(\alpha^2+1)^2.$$

Οἱ λόγοι τῶν πλευρῶν εἶναι

$$\frac{2\alpha}{\alpha^2-1},\quad \frac{2\alpha}{\alpha^2+1},\quad \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}$$

Ἐκ τούτων 1) ὁ λόγος $\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 1/2 δι' ἀκεραίας τιμὰς τοῦ α, διότι

$$\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1}-\frac{1}{2}=\frac{\alpha^2-3}{\alpha^2+1},$$

ὅπερ εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $\alpha>\sqrt{3}$.

2) Ὁ λόγος $\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ διὰ $\alpha=2,3,4,5,6\dots$ δίδει

$$\frac{4}{5},\ \frac{6}{10}=\frac{3}{5},\ \frac{8}{17},\ \frac{10}{26}=\frac{5}{13},\ \frac{12}{37}\dots$$

Ἐκ τούτων οἱ μόνοι λόγοι μεταξὺ $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{3}$ εἶναι οἱ $\frac{8}{17}$ καὶ $\frac{5}{13}$, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς ὅλον τὸν πίνακα Robertson.

3) Ὁ λόγος $\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}$ διὰ $\alpha=3,4,5,6,7,\dots$ δίδει τιμὰς

$$\frac{6}{8}=\frac{2}{3},\ \frac{8}{15},\ \frac{10}{24}=\frac{5}{12},\ \frac{12}{35},\ \frac{14}{48}=\frac{7}{24}.$$

Ἐκ τούτων μεταξὺ $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{3}$ εἶναι μόνον οἱ λόγοι $\frac{5}{12}$ καὶ $\frac{12}{35}$, τοὺς ὁποίους δὲν συνηντήσαμεν εἰς τὸν πίνακα Robertson.

Συμπέρασμα. Οἱ λόγοι πλευρῶν ὀρθογωνίου δὲν εἶναι λόγοι διαστάσεως ναοῦ τινος. Κατόπιν τούτου ἐσχηματίσαμεν τοὺς ἑξῆς λόγους ἢ ἁρμονίας κατὰ Πρόκλον.

1) Τὸν λόγον τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῆς καὶ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς, ἤτοι $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2\ 1+\alpha^2+1}=\frac{\alpha^2+1}{2\alpha^2}$.

Οὗτος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{2}$, διότι $\frac{\alpha^2+1}{2\alpha^2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2\alpha^2}$, ὅστις ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ α.

Ἐπίσης ἡ παράγωγος αὐτοῦ $\left[\frac{\alpha^2+1}{2\alpha^2}\right]'=\frac{-\alpha}{\alpha^4}=\frac{-1}{\alpha^3}$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἑπομένως εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τοῦ α.

2) Τὸν λόγον τῆς ὑποτεινούσης πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῆς καὶ τῆς μικροτέρας πλευρᾶς, ἤτοι $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2+1+2\alpha}-\frac{1}{2}=\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2}$. Εἶναι ὅμως αὔξουσα συνάρτησις, διότι ἡ παράγωγος αὐτῆς $\left[\frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2}\right]'=\frac{2\alpha(\alpha-1)}{(\alpha+1)^4}$ εἶναι θετικὴ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $\alpha>1$. Ἄρα ἀποκλείεται, διότι λαμβάνει τιμὰς πολὺ μεγαλυτέρας τοῦ 0,5 ταχέως.

3) Τὸν λόγον τῆς μεγαλυτέρας καθέτου πλευρᾶς πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῆς καὶ τῆς ὑποτεινούσης ἤτοι τὸν λόγον $\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-1+\alpha^2+1}=\frac{\alpha^2-1}{2\alpha^2}$, ὅστις εἶναι πάντοτε μικρότερος τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{3}$· διότι $\frac{1}{2}-\frac{\alpha^2-1}{2\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha^2}$ θετικὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ α καὶ $\frac{\alpha^2-1}{2\alpha^2}-\frac{1}{3}=\frac{\alpha^2-3}{2\alpha^2}$ θετικὸν διὰ $\alpha>\sqrt{3}$.

4) Τὸν λόγον τῆς μικροτέρας πλευρᾶς πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῆς καὶ τῆς ὑποτεινούσης, ἤτοι $\frac{2\alpha}{(\alpha+1)^2}$. Οὗτος εἶναι μικρότερος τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{3}$ διὰ τιμὰς τοῦ α μόνον μεταξὺ 3 καὶ 4, ἄρα ἀποκλείεται.

Ἐκ τῶν λόγων τούτων διακρίνεται 1) διὰ τιμὰς μικροτέρας τοῦ 0,5 ὁ λόγος τῆς μεγαλυτέρας καθέτου πλευρᾶς πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῆς καὶ τῆς ὑποτεινούσης, ἤτοι ὁ λόγος $\frac{\alpha^2-1}{2\alpha^2}$, ὅστις εἶναι πάντοτε μικρότερος τοῦ $\frac{1}{2}$ καὶ μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{3}$.

Ἵνα ὁ τύπος οὗτος λαμβάνῃ τιμὰς ἀκεραίας καὶ ἀσυμμέτρους, ρίζας ἀκεραίων ἀριθμῶν θέτομεν $\alpha^2 = 2\nu + 1$ καὶ $\alpha^2 = 2\nu$ καὶ λαμβάνομεν

$$\lambda_1 = \frac{2\nu}{2(2\nu+1)} = \frac{\nu}{(2\nu+1)} \quad \text{καὶ} \quad \lambda_2 = \frac{2\nu-1}{4\nu}.$$

Οἱ δύο οὗτοι λόγοι ἐπαληθεύονται ἀκριβῶς ἀπὸ τὰς διαστάσεις τῶν ναῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἢ ἔχουν ἑκατοστὰ πολλαπλάσιον τοῦ 10 καὶ 25, ὅπως συμβαίνει μὲ τοὺς ναοὺς Ἀρτέμιδος ἐν Κερκύρᾳ, Ἀθηνᾶς Συρακουσῶν, Διὸς Νεμέας, Διοσκούρων Ἀκράγαντος, Ἀπόλλωνος Δελφῶν, Ἥρας ἐν Ὀλυμπίᾳ καὶ ἄλλων. Καὶ τῶν λοιπῶν ὅμως ναῶν αἱ διαστάσεις ἐπαληθεύουν τοὺς τύπους, ἀρκεῖ νὰ ἐπέλθῃ βελτίωσις τῶν διαστάσεων αὐτῶν κατὰ ἑκατοστά τινα, διαφορὰ ἡ ὁποία δὲν ὑπερβαίνει τὴν μέσην διαφορὰν τῶν διαφόρων συγγραφέων, διότι, ὡς προείπομεν, οὗτοι δὲν συμφωνοῦν ἀπολύτως διὰ τὰς διαστάσεις τῶν διαφόρων ναῶν. Ἄλλωστε ἡ διαφορὰ αὕτη ἴσως νὰ ὀφείλεται εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ρίζης ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὁ ὁποῖος τὴν τότε ἐποχὴν δὲν ἦτο τόσον ἀκριβὴς ὅσον σήμερον.

Ὅπως μὴ βελτιῶμεν ὅλας τὰς διαστάσεις τοῦ πίνακος Robertson, διότι ἡ πρὸς τοῦτο ἐργασία ἦτο λίαν ἐπίπονος, ἐλάβομεν ἐξ ὅλου τοῦ πίνακος ὅλους τοὺς ναοὺς τῶν ὁποίων αἱ ὀνομασίαι ἄρχονται ἐκ τοῦ γράμματος Α διὰ νὰ διακρίνωμεν τὴν ἀκρίβειαν τῶν ἀναφερομένων (βλέπε κατωτέρω πίνακα Ι).

2) Διὰ λόγους μεγαλυτέρους τοῦ $\frac{1}{2}$ ἔχομεν τὸν τύπον $\frac{\alpha^2+1}{2\alpha^2}$. Οὗτος διὰ $\alpha^2 = 2\nu$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{2\nu+1}{4\nu}$ καὶ διὰ $\alpha^2 = 2\nu + 1$ λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\frac{2\nu+2}{4\nu} = \frac{\nu+1}{2\nu}.$$

Ὁ λόγος οὗτος ἐπαληθεύει ναοὺς μὲ διαστάσεις λόγου μεγαλυτέρου τοῦ $\frac{1}{2}$ (βλέπε κατωτέρω πίνακα ΙΙ).

Συμπέρασμα: 1) Ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον δίδει τὰς διαστάσεις τοῦ καλλίστου ὀρθογωνίου παρὰ τοῖς ἀρχαίοις Ἕλλησι φαίνεται νὰ μὴν εὐσταθῇ.

ΠΙΝΑΞ Ι.

Α/Α	Ναός	Διαστάσεις Robertson		Διαστάσεις βελτιωμέναι		Λόγος διαστάσεων	$\frac{\nu}{2\nu+1}$	$\frac{2\nu-1}{\nu}$
		Μῆκος	Πλάτος	Μῆκος	Πλάτος			
1	Ἀρτέμιδος Κερκύρας	24,00	49,00	—	—	$\frac{24}{49}$	$\nu = 29$	
2	Ἀθηνᾶς Συρακουσῶν	22,00	55,00	—	—	$\frac{22}{55} = \frac{22:11}{55:11} = \frac{2}{5}$	$\nu = 2$	
3	Διὸς Νεμέας	20,00	42,50	—	—	$\frac{200}{4250} = \frac{100:25}{4250:25} = \frac{8}{17}$	$\nu = 8$	
4	Διοσκούρων Ἀκράγαντος	14,00	31,50	—	—	$\frac{140}{315} = \frac{140:35}{315:35} = \frac{4}{9}$	$\nu = 4$	
5	Ἀπόλλωνος Δελφῶν	23,80	59,50			$\frac{238}{595} = \frac{238:119}{595:119} = \frac{2}{5}$	$\nu = 2$	
6	Ἥρας ἐν Ὀλυμπίᾳ	18,75	50,00	—	—	$\frac{1875}{5000} = \frac{1875:625}{5000:625} = \frac{3}{8}$		$\nu = 2$
7	Ἀπόλλωνος Κορίνθου	21,36	53,30	21,32	—	$\frac{2132}{5330} = \frac{2132:533}{5330:533} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	$\nu = 2$	
8	Παρθενὼν Ἀκροπόλ.	30,86	69,50	30,38	69,48	$\frac{3088:722}{6948:722} = \frac{4}{9}$	$\nu = 4$	
9	Ἀθηνᾶς (Πολιὰς)	21,34	43,44	21,35	43,45	$\frac{2135:79}{4345:79} = \frac{27}{55}$	$\nu = 27$	
10	Ἀρκαδίας (Ὀρχομενὸς)	13,33	31,22	13,38	—	$\frac{1338:446}{3122:446} = \frac{3}{7}$	$\nu = 3$	
11	Ἀφαίας Αἰγίνης	13,80	28,50	—	28,52	$\frac{1380:92}{2852:52} = \frac{15}{31}$	$\nu = 15$	
12	Ἀπόλλωνος Δήλου	13,55	29,40	13,56	22,38	$\frac{1356:226}{2938:226} = \frac{6}{13}$	$\nu = 6$	
13	Ἀρτέμιδος Καλυδῶνος	14,90	32,40	14,85	—	$\frac{1485:135}{3240:135} = \frac{11}{24}$		$\nu = 6$
14	Ἀπόλλωνος Β' Θηβῶν	22,83	46,25	22,675	46,257	$\frac{22675:907}{46257:907} = \frac{25}{51}$	$\nu = 25$	
15	Ἀρτέμιδος Σάρδεων	48,50	104,00	48,75	—	$\frac{4875:325}{10400:325} = \frac{15}{32}$		$\nu = 8$
16	Ἐν Ἄσσῳ ναὸς (Δωρικὸς)	14,03	30,31	13,98	30,25	$\frac{13,98:233}{30,25:233} = \frac{6}{13}$	$\nu = 6$	
17	Ἐν Ἀρκαδίᾳ (Ὀρχομενὸς)	13,33	31,28	13,35	31,15	$\frac{1335:445}{3115:445} = \frac{3}{7}$	$\nu = 3$	
18	Ἀθηνᾶς Δελφῶν	13,25	27,45	13,5	27,5	$\frac{135:5}{275:5} = \frac{27}{55}$	$\nu = 27$	

ΠΙΝΑΞ I.

Α/Α	Ναός	Διαστάσεις Robertson		Διαστάσεις βελτιωμέναι		Λόγος διαστάσεων	$\frac{\nu}{2\nu+1}$	$\frac{2\nu-1}{4\nu}$
		Μῆκος	Πλάτος	Μῆκος	Πλάτος			
19	Ἀρτέμιδος Καλυδῶνος	14,90	32,40	14,85	32,40	$\frac{1485:135}{3240:135}=\frac{11}{24}$		$\nu=6$
20	Ἀθηνᾶς ἐν Τεγέᾳ	19,16	47,52	19,04	47,60	$\frac{1904:952}{4760:952}=\frac{2}{7}$	$\nu=2$	
21	Ἀπόλλωνος Μιλήτου	51,13	109,42	51,30	109,44	$\frac{5130:342}{10944;342}=\frac{15}{32}$		$\nu=8$
22	Ἀθηνᾶς Σάρδεων	48,5	104,00	48,5	103,95	$\frac{48500:693}{10395:693}=\frac{7}{15}$	$\nu=7$	

ΠΙΝΑΞ II.

Α/Α	Ναός	Διαστάσεις Robertson		Διαστάσεις βελτιωμέναι		Λόγος διαστάσεων	τύπος	
		Πλάτος	Μῆκος	Πλάτος	Μῆκος		$\frac{2\nu+1}{4\nu}$	$\frac{\nu+1}{2\nu+1}$
1	Ποσειδῶνος ἐν Ποσειδωνίᾳ	27,52	54,30	27,47	54,27	$\frac{2747:67}{5427:67}=\frac{41}{81}$		$\nu=40$
2	Ἀσλκηπιοῦ Ἐπιδαύρου	11,90	23,00	11,90	22,95	$\frac{1190}{2295}=\frac{14}{27}$		$\nu=13$
3	Ἀθηνᾶς Περγάμου	12,27	21,77	12,24	21,76	$\frac{1224:136}{2176:136}=\frac{9}{10}$	$\nu=4$	
4	Ἀθηνᾶς Πριήνης	19,55	37,20	19,53	37,26	$\frac{1953:217}{3720:217}=\frac{9}{4}$	$\nu=4$	
5	Ἀρτέμιδος Μαγνησίας	32,30	57,70	32,49	57,76	$\frac{3249:361}{5776:361}=\frac{9}{4}$	$\nu=4$	
6	Διονύσου ἐν Τέῳ	18,50	35,00	18,43	34,92	$\frac{1843:97}{3442:97}=\frac{19}{36}$	$\nu=9$	

2) Τὸ κάλλιστον ὀρθογώνιον παρὰ τοῖς Ἀρχαίοις, ἰδίᾳ ὡς πρὸς τὴν κατασκευὴν τῶν βάσεων τῶν ναῶν, πιθανῶς εἶναι τὸ ἔχον διαστάσεις μὲ λόγον $\frac{\alpha^2-1}{2\alpha'}$ ὅπου α ρίζα ἀκεραίου ἀριθμοῦ καὶ εἰς τοὺς τελευταίους π. Χ. αἰῶνας καὶ ἔχον διαστάσεις μὲ λόγον $\frac{\alpha^2-1}{2\alpha^2}$ ὅπου α ρίζα ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

Ὁ πρῶτος λόγος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν λόγον τῆς μεγαλυτέρας καθέτου πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου πρὸς τὸ ἄθροισμα αὐτῆς καὶ τῆς ὑποτεινούσης, λόγοι οἱ ὁποῖοι κατὰ Πρόκλον δίδουν ἁρμονίαν.