ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 25ΗΣ ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 1982

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΠΕΡΙΚΛΗ ΘΕΟΧΑΡΗ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— **Sur les surfaces harmoniques,** *par Othon Pylarinos* *.

RÉSUMÉ

Dans cet article — consacré à l'étude des surfaces réelles non planes de l'espace euclidien habituel, E^3, les points de chacune desquelles par rapport à un système de coordonnées cartésiennes trirectangulaire admettent des coordonnées dont l'une est une fonction harmonique des deux autres et qui, pour abréger, sont appelées «surfaces harmoniques», — après un exposé préliminaire, deux théorèmes surtout sont établis. Il est démontré d'abord que l'enveloppée moyenne d'une congruence rectiligne à surface moyenne plane, qui peut être associée à chaque surface harmonique (non plane), est *en général* une surface également harmonique; l'enveloppée moyenne de cette congruence dégénère à un seul point dans le cas seulement où la surface harmonique, à laquelle la congruence est associée, est une surface harmonique minima. Ensuite il est démontré que les hélicoïdes minima reglés sont les seules surfaces non planes à courbure moyenne constante, qui sont harmoniques.

1.— Soit :

$$\bar{r} = \bar{x}_0\, x(u, v) + \bar{y}_0\, y(u, v) + \bar{z}_0\, z(u, v) \equiv \bar{r}(u, v) \qquad (1.\ 1)$$

l'équation vectorielle de la surface réelle S de E^3, à laquelle se rapportent les considérations suivantes, par rapport au système de coordonnées

* ΟΘ. ΠΥΛΑΡΙΝΟΥ, **Περὶ τῶν ἁρμονικῶν ἐπιφανειῶν.**

cartésiennes trirectangulaires Oxyz choisi comme système de référence dans l'espace E^3.

Le second membre $\bar{r}(u, v)$ de l'équation (1. 1) est une fonction vectorielle réelle des variables u, v, aux couples de valeurs réelles desquelles dans deux intervalles déterminés les points de la surface S correspondent, les vecteurs $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$, qui y figurent, étant les vecteurs unitaires qui déterminent les sens positifs sur les directions des axes Ox, Oy, Oz du système de référence Oxyz respectivement et cette fonction ainsi que toute autre fonction vectorielle ou scalaire des u, v, qui figure dans ce qui suit, sont, par hypothèse, de classe $C^k (k \geqslant 3)$ dans les intervalles considérés.

Si l'on suppose de plus que les variables u, v aient été choisies de manière que les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur la surface S soient ses lignes de courbure et que l'on désigne par E, F, G et L, M, N les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales de S, on aura $F = M \equiv 0$, puisque le réseau formé par les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur S est à la fois orthogonal et conjugué.

D'après la supposition faite concernant les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur S, en chaque point de S le système des vecteurs:

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \quad \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}, \quad \bar{l}_0 = \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 \,{}^{*} \qquad (1.\ 2)$$

qui- étant respectivement parallèles aux tangentes aux courbes v = Cte, u = Cte issues de ce point de S et à la normale à S en ce même point - sont des vecteurs unitaires, puisque

$$E = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right)^2 \quad \text{et} \quad \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = 0,$$

est trirectangle et dans cet ordre direct. En outre les dérivées premières par rapport à u et à v de ces vecteurs pour les valeurs des u, v, auxquelles le point courant P(u, v) de S correspond, d'après des formules connues (1, p. 157), peuvent s'écrire sous la forme:

---

* Les notations $\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2$ et $\bar{e}_1 \times \bar{e}_2$ désignent les produits vectoriel et scalaire des vecteurs $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ respectivement.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial u} = \{k_{g_1}\bar{e}_2 + k_1 \bar{l}_0\}\sqrt{E}, \quad \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial u} = -k_{g_1}\bar{e}_1\sqrt{E}, \quad \frac{\partial \bar{l}_0}{\partial u} = -k_1\bar{e}_1\sqrt{E} \\ &\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial v} = k_{g_2}\bar{e}_2\sqrt{G}, \quad \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial v} = \{-k_{g_2}\bar{e}_1 + k_2 \bar{l}_0\}\sqrt{G}, \quad \frac{\partial \bar{l}_0}{\partial v} = -k_2\bar{e}_2\sqrt{G} \end{aligned}\right\} \quad (1.\ 3)$$

où
$$k_{g_1} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}, \quad k_{g_2} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \quad (1.\ 4)$$

sont les courbures géodésiques au point P(u, v) des courbes v = Cte, u = Cte issues de ce point et

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G} \quad (1.\ 5)$$

sont les courbures principales de la surface en ce même point.

Les courbures principales k_1, k_2 de S et les courbures géodésiques k_{g_1}, k_{g_2} de ses lignes de courbure v = Cte, u = Cte sont des fonctions des u, v, qui avec E(u, v), G(u, v) doivent satisfaire aux équations :

$$\frac{\partial k_1}{\partial v} = \{k_1 - k_2\}k_{g_1}\sqrt{G}, \quad \frac{\partial k_2}{\partial u} = \{k_1 - k_2\}k_{g_2}\sqrt{E}, \quad (1.\ 6)$$

auxquelles, dans le cas envisagé, se remènent, à l'aide des (1. 4) et (1. 5), les équations des Codazzi - Mainardi, qui sont nécessairement vérifiées par les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales de la surface.

En outre, si la surface S est la «surface directrice» d'une congruence rectiligne (δ) et qu'il soit $\bar{d}_0(u, v)$ le vecteur unitaire qui détermine le sens positif sur la direction de la génératrice d(u, v) de la congruence (δ) issue du point courant P(u, v) de S, l'équation vectorielle de cette congruence par rapport au système de référence Oxyz peut s'écrire :

$$\bar{R} = \bar{r}(u, v) + \theta\bar{d}_0(u, v) \quad (1.\ 7)$$

où $\bar{r}(u, v)$ est le second membre de l'équation (1. 1) de la surface S et θ est la variable, aux valeurs de laquelle les points de la génératrice courante d(u, v) de la congruence correspondent.

Si de plus :

$$\left(\frac{\partial \bar{d}_0}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{d}_0}{\partial v}\right)^2 \equiv \left(\frac{\partial \bar{d}_0}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{\partial \bar{d}_0}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{d}_0}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{d}_0}{\partial v}\right)^2 \not\equiv 0, \quad (1.8)$$

les valeurs θ_1, θ_2 de la variable θ, auxquelles les *points focaux* de la génératrice courante d(u, v) de la congruence (δ) correspondent, sont-comme on sait (1, p. 398) - les racines du polynôme en θ:

$$\theta^2\{eg - f^2\} + \theta\{ag - (b + b')f + ce\} + ac - bb' \quad (1.9)$$

où

$$a = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{d}_0}{\partial u}, \quad b = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \bar{d}_0}{\partial u}, \quad b' = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{d}_0}{\partial v}, \quad c = \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \bar{d}_0}{\partial v} \quad (1.10)$$

et

$$e = \left(\frac{\partial \bar{d}_0}{\partial u}\right)^2, \quad f = \frac{\partial \bar{d}_0}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{d}_0}{\partial v}, \quad g = \left(\frac{\partial \bar{d}_0}{\partial v}\right)^2 \quad (1.11)$$

pour les valeurs des u, v, auxquelles le point courant P(u, v) de la surface S et la génératrice d (u, v) de la congruence (δ) issue de ce point correspondent.

Cela étant, pour que les points focaux de chaque génératrice de la congruence (δ) soient symétriques par rapport à son point situé sur la surface S, sur laquelle on a $\theta = 0$, et, par suite, pour que la surfase S soit la *surface moyenne* de la congruence, il faut et il suffit que l'on ait :

$$ag - (b + b')f + ce = 0 \quad (1.12)$$

pour tous les couples de valeurs des u, v, auxquels les points de la de la surface S et les génératrices de la congruence (δ) correspondent.

Mais l'équation (1.12) qui, si l'on y porte les valeurs (1.10) et (1.11) des a, b, b', c et e, f, g, acquiert la forme :

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \left\{\frac{\partial \bar{d}_0}{\partial v} \wedge \left(\frac{\partial \bar{d}_0}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{d}_0}{\partial v}\right)\right\} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \times \left\{\frac{\partial \bar{d}_0}{\partial u} \wedge \left(\frac{\partial \bar{d}_0}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{d}_0}{\partial v}\right)\right\} = 0, \quad (1.13)$$

compte tenu du fait que l'on a

$$\bar{d} \times \frac{\partial \bar{d}_0}{\partial u} = \bar{d}_0 \times \frac{\partial \bar{d}_0}{\partial v} \equiv 0,$$

puisque le vecteur $\bar{d}_0(u, v)$ est unitaire et que, par conséquent, on a necessairement :

$$\frac{\partial \bar{d}_0}{\partial u} \wedge \frac{\partial \bar{d}_0}{\partial v} = \mu(u, v)\, \bar{d}_0(u, v),$$

où $\mu(u, v)$ est une fonction scalaire des u, v, qui, d'après (1. 8), est $\neq 0$, se remène à l'équation équivalente :

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \left(\frac{\partial \bar{d}_0}{\partial v} \wedge \bar{d}_0 \right) - \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \times \left(\frac{\partial \bar{d}_0}{\partial u} \wedge \bar{d}_0 \right) = 0 .$$

Donc, *afin que la surface* S *définie par l'équation* (1. 1) *soit la surface moyenne de la congruence rectiligne* (δ) *définie par l'équation* (1. 7), *le vecteur* $\bar{d}_0(u, v)$ — *qui y figure — étant un vecteur unitaire, il faut et il suffit que le second membre* $\bar{r}(u, v)$ *de l'équation* (1. 1) *soit une fonction vectorielle des variables* u, v *satisfaisant avec le vecteur* $\bar{d}_0(u, v)$ *à l'équation* (1. 14) *pour tous les couples de valeurs des* u, v, *auxquels les points de la surface* S *et les génératrices de la congruence* (δ) *correspondent.*

Il est à noter que la condition (1. 14) est indépendante — comme on le reconnaît facilement — du choix des coordonnées curvilignes u, v sur la surface S.

2.— Considérons maintenant sur le plan xOy du système de référence Oxyz le domaine s dont les points sont les projections orthogonales sur ce plan des points de la surface S, sur laquelle les courbes v = Cte, u = Cte sont, par hypothèse, ses lignes de courbure et désignons par ξ, η, ζ les cosinus des angles que le vecteur unitaire $\bar{z}_0$, parallèle à la normale au plan xOy, fait au point courant P(u, v) de S avec les vecteurs unitaires $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{l}_0$ respectivement parallèles aux tangentes aux courbes v = Cte, u = Cte issues de ce point et à la normale à S en ce même point.

Les cosinus ξ, η, ζ, qui sont respectivement égaux aux produits scalaires :

$$\xi = \bar{z}_0 \times \bar{e}_1, \quad \eta = \bar{z}_0 \times \bar{e}_2, \quad \zeta = \bar{z}_0 \times \bar{l}_0 \tag{2. 1}$$

sont liés par la relation :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \tag{2. 2}$$

puisque le système des vecteurs unitaires $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{l}_0$, d'après la supposition faite concernant les courbes $v = Cte$, $u = Cte$ tracées sur la surface S, est en chaque point de S trirectangle, et, cela étant, on a :

$$\bar{z}_0 = \bar{e}_1 \xi + \bar{e}_2 \eta + \bar{l}_0 \zeta . \tag{2. 3}$$

En outre, en différentiant l'équation (2. 3) par rapport à u et à v on parvient à deux équations qui, si l'on y porte les valeurs (1. 3) des dérivées premières par rapport à u et à v des $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{l}_0$ et que l'on tienne compte que le vecteur $\bar{z}_0$ est indépendant des u, v, acquièrent la forme :

$$\bar{e}_1 \left[\frac{\partial \xi}{\partial u} - (k_{g_1} \eta + k_1 \zeta) \sqrt{E} \right] + \bar{e}_2 \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} + k_{g_1} \xi \sqrt{G} \right] + \bar{l}_0 \left[\frac{\partial \zeta}{\partial u} + k_1 \xi \sqrt{E} \right] = 0$$

$$\bar{e}_1 \left[\frac{\partial \xi}{\partial u} - k_{g_2} \eta \sqrt{G} \right] + \bar{e}_2 \left[\frac{\partial \eta}{\partial v} - (-k_{g_2} \xi + k_2 \zeta) \sqrt{G} \right] + \bar{l}_0 \left[\frac{\partial \zeta}{\partial v} + k_2 \eta \sqrt{G} \right] = 0$$

et de ces équations, eu égard au fait que en chaque point de S les vecteurs $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{l}_0$ sont linéairement indépendants, on obtient pour les dérivées premières par rapport à u et à v des ξ, η, ζ les formules :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = (k_{g_1} \eta + k_1 \zeta) \sqrt{E}, \quad \dfrac{\partial \eta}{\partial u} = - k_{g_1} \xi \sqrt{E}, \quad \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} = - k_1 \xi \sqrt{E} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = k_{g_2} \eta \sqrt{G}, \quad \dfrac{\partial \eta}{\partial v} = (-k_{g_2} \xi + k_2 \zeta) \sqrt{G}, \quad \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} = - k_2 \eta \sqrt{G} \end{array}\right| . \tag{2. 4}$$

Par ailleurs de l'équation vectorielle par rapport au système Oxyz du domaine s du plan xOy de ce système, qui, d'après la définition de ce domaine, peut s'écrire sous la forme:

$$\bar{r}' = \bar{r}(u, v) - \bar{z}_0 \{ \bar{z}_0 \times \bar{r}(u, v) \} \equiv \bar{r}'(u, v), \tag{2. 5}$$

où $\bar{r}(u, v)$ est le premier membre de l'équation (1. 1) de la surface S, on parvient, à l'aide des (1. 2) et (2. 1), aux equations:

$$\frac{\partial \bar{r}'}{\partial u} = (\bar{e}_1 - \bar{z}_0 \xi) \sqrt{E}, \quad \frac{\partial \bar{r}'}{\partial v} = (\bar{e}_2 - \bar{z}_0 \eta) \sqrt{G}, \tag{2. 6}$$

grâce auxquelles on obtient, eu égard aux (2. 1), pour les coefficients E′, F′, G′ de la première forme quadratique fondamentale du domaine s (définie par l'équation (2. 5)) les expressions:

$$E' = (1-\xi^2)E, \quad F' = -\xi\eta\sqrt{EG}, \quad G' = (1-\eta^2)G \tag{2. 7}$$

et de là, grâce à (2. 2), on aura :

$$E'G' - F'^2 \equiv W'^2 = EG\zeta^2. \tag{2. 8}$$

Cela étant, pour que la troisième des coordonnées x, y, z des points de la surface S par rapport au système Oxyx soit une fonction harmonique des deux premières dans le domaine s du plan xOy de ce système et, par suite, pour que la surface considérée S soit une surface harmonique, le plan xOy du système de référence étant le plan appelé par P. Vincensini (7, p. 65) *plan de base* de cette surface harmonique, il faut et il suffit que pour tous les couples de valeurs des u, v, auxquels les points de la surface S et du domaine s du plan xOy correspondent, on ait :

$$\Delta_2' z(u, v) = 0 \tag{2. 9}$$

où $\Delta_2' z(u, v)$ est le paramètre différentiel du second ordre de BELTRAMI, sur le domaine s, de la coordonnée $z = \bar{z}_0 \times \bar{r}(u, v)$, car le paramètre différentiel $\Delta_2' z(u, v)$ sur le domaine s, qui comme on le reconnait aisément (5, p. 395), acquiert la forme :

$$\Delta_2' z(u, v) = \frac{1}{\zeta^3}\left[k_1(1-\eta^2) + k_2(1-\xi^2)\right], \tag{2. 10}$$

étant indépendant du choix des variables u, v, aux couples de valeurs desquelles correspondent les points de ce domaine, dans le cas où ces variables sont les coordonnées x, y par rapport au système Oxyz des points de s et de la surface S, dévient:

$$\Delta_2' z(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Les considérations précédentes conduisent à une condition géométrique nécessaire et suffisante, afin qu'une surface réelle de E^3 soit harmonique ayant pour plan de base un plan déterminé (π) (5, p. 396).

En effet, d'après (2. 9) et (2. 10), afin qu'une surface réelle S de E^3 soit harmonique ayant pour plan de base un plan déterminé (π), il faut et il suffit que en chaque point de S ses courbures principales k_1, k_2 soient liées aux cosinus ξ, η des angles, que la normale au plan (π) fait avec les tangentes aux lignes de courbure de S issues de ce point, par la relation :

$$k_1(1 = \eta^2) + k_2(1 - \xi^2) = 0. \tag{2. 11}$$

D'autre part, d'après un théorème établi par P. Vincensini, (7, p. 65), afin qu'une surface S de E^3 soit harmonique ayant pour plan de base un plan déterminé (π), if faut et il suffit que le domaine s du plan (π), les points duquel sont les projections orthogonales sur ce plan des points de S, soit la surface moyenne de la congruence rectiligne (δ), que l'on obtient en menant par la projection orthogonale sur le plan (π) de chaque point de S la parallèle à la normale à S en ce point.

La congruence rectiligne (δ), engendrée par les parallèles aux normales à la surface considérée S en ses points, menées par les projections orthogonales des points de S sur le plan xOy du système Oxyz, peut être définie par rapport au système Oxyz, si l'on choisit le domaine s du plan xOy comme surface directrice de cette congruence, par l'equation vectorielle :

$$\bar{R} = \bar{r}'(u, v) + \theta\, \bar{l}_0(u, v), \tag{2. 12}$$

où $\bar{r}'(u, v)$ est le second membre de l'équation (2. 5) du domaine s, $\bar{l}_0(u, v)$ est le vecteur unitaire parallèle à la normale à S en son point courant P (u, v) et θ est la variable, aux valeurs de laquelle correspondent les points de la génératrice de la congruence (δ) issue de la projection orthogonale P′ (u, v) du point P (u, v) de S sur le plan xOy.

Cela étant, pour que le domaine s du plan xOy soit la surface moyenne de la congruence (δ), définie par l'équation (2. 12), il faut et il suffit, d'après le résultat final du paragraphe 1, que l'on ait :

$$\frac{\partial \bar{r}'}{\partial u} \times \left(\frac{\partial \bar{l}_0}{\partial v} \wedge \bar{l}_0 \right) - \frac{\partial \bar{r}'}{\partial v} \times \left(\frac{\partial \bar{l}_0}{\partial u} \wedge \bar{l}_0 \right) = 0$$

pour tous les couples de valeurs des u, v, auxquels les points de la surface S et du domaine s correspondent et cette condition, si l'on y substitue les dérivées

$$\frac{\partial \bar{l}_0}{\partial u}, \frac{\partial \bar{l}_0}{\partial v} \text{ et } \frac{\partial \bar{r}'}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}'}{\partial v}$$

par leurs valeurs (1. 4) et (2. 6) et que l'on tienne compte que le système des vecteurs $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{l}_0$ est en chaque point de S trirectangle et dans cet ordre direct, se ramène — comme on le constate facilement — à la condition (2. 11).

La congruence rectiligne (δ) qui correspond de la manière qui vient d'être indiquée à un plan joint à une surface, dans le cas où la surface est harmonique, le plan, que l'on joint à elle, étant son plan de base, est celle qui, dans ce qui suit, est considérée comme *la congruence rectiligne* (δ) *à surface moyenne plane associée à cette surface harmonique.*

3.— Si la surface considérée S, sur laquelle les courbes v = Cte, u = Cte sont ses lignes de courbure, est une surface harmonique, le plan xOy du système de référence étant son plan de base, l'équation différentielle du réseau des lignes asymptotiques de S, grâce aux (1. 5) et à l'équation (2. 11) qui, dans ce cas, est nécessairement vérifiée en chaque point de S, acquiert la forme :

$$E(1-\xi^2)\,du^2 - G\,(1-\eta^2)\,dv^2 = 0. \tag{3. 1}$$

L'équation (3. 1) est à la fois l'équatione différentielle sur le domaine s du plan xOy (définie par l'équation (2. 5)) du réseau des projections orthogonales sur ce plan des lignes asymptotiques de S, réseau qui — comme on sait (3, p. 101) — est orthogonal.

Cela étant, si P'(u, v) est la projection orthogonale sur le plan xOy du point courant P(u, v) de S, les tangentes en ce point aux projections orthogonales sur ce plan des lignes asymptotiques de S issues de son point P(u, v), d'après (2. 6) et (3. 1), sont respectivement parallèles aux vecteurs :

$$\frac{\partial \bar{r}'}{\partial u} \pm \frac{\partial \bar{r}'}{\partial v}\sqrt{\frac{E(1-\xi^2)}{G(1-\eta^2)}} = \sqrt{E}\left[(\bar{e}_1 - \bar{z}_0\xi) \pm (\bar{e}_2 - \bar{z}_0\eta)\sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-\eta^2}}\right]$$

et, par conséquent, aux vecteurs:

$$\frac{\bar{e}_1 - \bar{z}_0\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \pm \frac{\bar{e}_2 - \bar{z}_0\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \tag{3. 2}$$

pour les valeurs des u, v, auxquelles les points P(u, v) de la surface S et P′(u, v) du domaine s du plan xOy correspondent; ce qui montre, eu égard au fait que, grâce aux (2. 1), on a $(\bar{e}-\bar{z}_0\xi)^2 = 1-\xi^2$ et $(\bar{e}_2-\bar{z}_0\eta)^2 = 1-\eta^2$, que ces deux tangentes sont les bissectrices des angles faits par les tangentes en ce points P′ du domaine s aux projections orthogonales sur le plan xOy des lignes de courbure v = Cte, u = Cte, de S issues de son point P(u, v), car ces deux tangentes, d'après les formules (2. 6), sont respectivement parallèles aux vecteurs $\bar{e}_1 - \bar{z}_0\xi$, $\bar{e}_2 - \bar{z}_0\eta$.

Il en résulte, compte tenu du fait que la surface S est une surface harmonique (non plane) choisie au hasard, que *les projections orthogonales des lignes asymptotiques et des lignes de courbure d'une surface harmonique sur son plan de base forment deux réseaux tels que les tangentes aux courbes du premier réseau issues de la projection orthogonale de chaque point de la surface sur son plan de base, soient les bissectrices des angles faits par les tangentes en ce même point du plan de base aux courbes du second réseau issues de ce point.*

Par ailleurs, si la surface considérée S, sur laquelle les courbes v = Cte, u = Cte sont ses lignes de courbure, est une surface harmonique, le plan xOy du système de référence Oxyz étant son plan de base, le domaine s du plan xOy défini par l'équation (2. 5) est, d'après le théorème cité dans le paragraphe 2, la surface moyenne de la congruence rectiligne (δ) associée à la surface harmonique S.

Cela étant, *l'enveloppée moyenne* de la congruence (δ), d'après sa définition, est l'enveloppe des plans normaux aux génératrices de la congruence en leurs points moyens et, par suite, l'enveloppe de la famille des plans dépendant des deux paramètres u, v définie par rapport système Oxyz par l'équation :

$$\{\bar{r}_1 - \bar{r}'(u, v)\} \times \bar{l}_0(u, v) = 0\,, \tag{3. 3}$$

où $\bar{r}' = \overline{OP'}$, P′ étant la projection orthogonale sur le plan xOy du point courant P(u, v) de S, $\bar{l}_0(u, v)$ est le vecteur unitaire (1. 2) qui est parallèle à la normale à S en son point P(u, v) et à la génératrice de la congruence (δ) issue du point P'(u, v) du plan xOy et $\bar{r}_1 = \overline{OP_1}$, P_1 étant le point courant du plan de la famille définie par l'équation (3. 3), qui correspond aux valeurs des u, v, auxqueles le point P (u, v) de S correspond.

Or, si $P_1(u, v)$ est le point de l'enveloppée moyenne S_1 de la congruence (δ), qui appartient au plan de la famille definie par l'équation (3. 3) correspondant au point courant P (u, v) de S, le vecteur $\bar{r}_1 = \overline{OP_1}$ doit satisfaire à la fois à l'équation (3. 3) et aux équations :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\{(\bar{r}_1 - \bar{r}') \times \bar{l}_0\right\} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left\{(\bar{r}_1 - \bar{r}') \times \bar{l}_0\right\} = 0,$$

qui, grâce aux (1. 3) et (2. 6), acquièrent la forme :

$$(\bar{r}_1 - \bar{r}') \times \bar{e}_1 = \frac{\xi\zeta}{k_1}, \quad (\bar{r} - \bar{r}') \times \bar{e}_2 = \frac{\eta\zeta}{k_2} \tag{3. 4}$$

pour les valeurs des u, v, auxquelles le point P (u, v) de S correspond.

Il en résulte que l'enveloppée moyenne S_1 de la congruence (δ) associée à la surface harmonique S sur laquelle les courbes v = Cte, u = Cte sont ses lignes de courbure, peut être définie par rapport au système Oxyz par l'équation vectorielle :

$$\bar{r}_1 = \bar{r}'(u, v) + \zeta\left(\frac{\xi}{k_1}\bar{e}_1 + \frac{\eta}{k_2}\bar{e}_2\right)$$

qui, si l'on y remplace $\bar{r}'(u, v)$ par le second membre de l'équation (2. 5) du domaine s du plan xOy, devient :

$$\bar{r}_1 = \bar{r}(u, v) - \bar{z}_0\left\{\bar{z}_0 \times \bar{r}(u, v)\right\} + \zeta\left(\frac{\xi}{k_1}\bar{e}_1 + \frac{\eta}{k_2}\bar{e}_2\right) \equiv \bar{r}_1(u, v), \tag{3. 5}$$

tandis que le domaine s_1 du plan xOy, les points duquel sont les projections orthogonales sur ce plan des points de S_1, compte tenu que, en vertu des (2. 1), (2. 5) et (2. 11), on a :

$$\bar{z}_0 \times \bar{r}_1(u, v) = \zeta\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right),$$

est defini par rapport au système Oxyz par l'équation vectorielle :

$$\bar{r}_1' = \bar{r}(u, v) - \bar{z}_0\{\bar{z}_0 \times \bar{r}(u, v)\} + \zeta\left(\frac{\xi}{k_1}\bar{e}_1 + \frac{\eta}{k_2}\bar{e}_2\right) -$$

$$- \bar{z}_0\zeta\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \equiv \bar{r}_1'(u, v). \qquad (3.6)$$

Lés équations (3. 5) et (3. 6) montrent que, dans le cas où S est une surface harmonique minina (non plane), l'enveloppée moyenne S_1 de la congruence (δ) associée à S coincide avec le domaine s_1 du plan de base xOy de S, puisque, dans ce cas, les courbures principales k_1, k_2 de S sont liées par la relation :

$$k_1 + k_2 = 0 \qquad (3.7)$$

et en outre que s_1 dégénère à un seul point du plan de base xOy de S.

En effet, dans ce cas, de l'équation (2. 11) — qui est nécessairement vérifiée en chaque point de S et, grâce à (3. 7) dévient :

$$\eta^2 - \xi^2 = 0,$$

si l'on pose :

$$\eta = \varepsilon\xi, \qquad (3.8)$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1, on parvient en différentiant la relation (3. 8) par rapport à u et à v, à l'aide des (2. 4), (3. 7) et (3. 8), aux équations

$$2\eta k_{g_1} = -k_1\zeta, \qquad 2\xi k_{g_2} = -k_2\zeta \qquad (3.9)$$

et de là, grâce à (3. 8), à la relation :

$$k_{g_2} = \varepsilon k_{g_1}. \qquad (3.10)$$

En outre, en différentiant par rapport à u et à v l'équation :

$$\bar{r}_1 = \bar{r}(u, v) - \bar{z}_0\{\bar{z}_0 \times \bar{r}(u, v)\} + \frac{\zeta\xi}{k_1}(\bar{e}_1 - \varepsilon\bar{e}_2), \qquad (3.11)$$

à laquelle se ramène, en vertu des (3. 7) et (3. 8), l'équation (3. 5), on obtient, à l'aide des (1. 3) et (2. 4), les équations :

$$\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial u} = (\bar{e}_1 - \bar{z}_0\xi)\sqrt{E} + (\bar{e}_1 - \varepsilon\bar{e}_2)\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\xi\zeta}{k_1}\right) + \frac{\xi\zeta}{k_1}(k_{g_1}\bar{e}_2 + k_1\bar{l}_0 + \varepsilon k_{g_2}\bar{e}_1)\sqrt{E}$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = (\bar{e}_2 - \bar{z}_0\eta)\sqrt{G} + (\bar{e}_1 - \varepsilon\bar{e}_2)\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\xi\zeta}{k_1}\right) + \frac{\xi\zeta}{k_1}(k_{g_2}\bar{e}_2 + \varepsilon k_{g_2}\bar{e}_1 + \varepsilon k_1\bar{l}_0)\sqrt{G}$$

dont les seconds membres, en vertu des (1. 6), (2. 4), (3. 7), (3. 8), (3. 9) et (3. 10), sont $\equiv 0$.

On aura donc :

$$\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial u} = \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial v} \equiv 0$$

et, grâce à (3. 8) :

$$\bar{z}_0 \times \bar{r}_1(u, v) \equiv 0 ;$$

ce qui montre que, dans le cas où S est une surface harmonique minima (non plane), le plan xOy du système Oxyz étant son plan de base, l'enveloppée moyenne S_1 de la congruence (δ) associée à S dégénère à un seul point de son plan de base.

Si la surface harmonique S, sur laquelle les courbes $v = Cte$ $u = Cte$ sont ses lignes de courbure, le plan xOy du système de référence étant son plan de base, n'est pas une surface minima, l'enveloppée moyenne de la congruence (δ) associée à S est une surface S_1. Cette surface, d'après sa définition, est représentée sur la surface S de manière que en chaque couple de points homologues, dans cette représentation, des deux surfaces — correspondant au même couple des valeurs des u, v — leurs plans tangents sont parallèles.

Il en résulte que la normale à la surface S_1 en son point $P_1(u, v)$ homologue, dans cette représentation, du point courant $P(u, v)$ de la surface S, est parallèle au vecteur unitaire $\bar{l}_0(u, v)$, parallèle à la normale à S en son point $P(u, v)$ et que, cela étant, l'équation vectorielle par rapport au système Oxyz de la congruence (δ_1), qui correspond de la manière indiquée dans le paragraphe 2, au plan xOy du système Oxyz joint à la surface S_1, peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{R} = \bar{r}_1'(u, v) + \theta\, \bar{l}_0(u, v) , \qquad (3.\ 12)$$

où $\bar{r}_1'(u, v)$ est le second membe de l'équation (3. 6) du domaine s_1 du plan xOy.

Or, si l'on tient compte que, grâce aux (1. 3), on a :

$$\frac{\partial \bar{l}_0}{\partial u} \wedge \bar{l}_0 = k_1 \bar{e}_2 \sqrt{E} , \qquad \frac{\partial \bar{l}_0}{\partial v} = - k_2 \bar{e}_1 \sqrt{G} , \qquad (3.\ 13)$$

puisque le système des vecteurs $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{l}_0$ est en chaque point de S trirectangle et dans cet ordre direct, tandis que de l'équation (3. 6) en vertu des (2. 4) et (2. 6), on a :

$$\frac{\partial \bar{r}_1'}{\partial u} = (\bar{e}_1 - \bar{z}_0 \xi)\sqrt{E} + \bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\xi\zeta}{k_1}\right) + \bar{e}_2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\eta\zeta}{k_2}\right) + \\ + \frac{\xi\zeta}{k_1}(k_{g_1}\bar{e}_2 + k_1 \bar{l}_0)\sqrt{E} - \frac{\eta\zeta}{k_2} k_{g_1}\bar{e}_1 \sqrt{E} - \bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial u}\left[\zeta\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)\right],$$

$$\frac{\partial \bar{r}_1'}{\partial v} = (\bar{e}_2 - \bar{z}_0 \eta)\sqrt{G} + \bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\xi\zeta}{k_1}\right) + \bar{e}_2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\eta\xi}{k_2}\right) + \\ + \frac{\xi\zeta}{k_1} k_{g_2}\bar{e}_2\sqrt{G} + \frac{\eta\zeta}{k_2}(-k_{g_2}\bar{e}_1 + k_2 \bar{l}_0)\sqrt{G} - \bar{z}_0 \frac{\partial}{\partial v}\left[\zeta\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)\right],$$

on obtient pour les produits scalaires

$$\frac{\partial \bar{r}_1'}{\partial u} \times \left(\frac{\partial \bar{l}_0}{\partial v} \wedge \bar{l}_0\right), \qquad \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial v} \times \left(\frac{\partial \bar{l}_0}{\partial u} \wedge \bar{l}_0\right)$$

les valeurs :

$$\frac{\partial \bar{r}_1'}{\partial u} \times \left(\frac{\partial \bar{l}_0}{\partial v} \wedge \bar{l}_0\right) = -k_2(1-\xi^2)\sqrt{EG} - k_2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\xi\zeta}{k_1}\right)\sqrt{G} + \\ + k_2 \xi \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\zeta}{k_1} + \frac{\zeta}{k_2}\right)\sqrt{G} + k_{g_1}\zeta\eta\sqrt{EG},$$

$$\frac{\partial \bar{r}_1'}{\partial v} \times \left(\frac{\partial \bar{l}_0}{\partial u} \wedge \bar{l}_0\right) = k_1(1-\eta^2)\sqrt{EG} + k_1\left(\frac{\eta\zeta}{k_2}\right)\sqrt{E} + \\ + k_1\eta \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\zeta}{k_1} + \frac{\zeta}{k_2}\right)\sqrt{E} + k_{g_2}\zeta\xi\sqrt{EG}.$$

On aura donc, grâce aux (1. 6) et (2. 4), pour tous les couples de valeurs des u, v, auxquels les points des surfaces S_1, S correspondent :

$$\frac{\partial \bar{r}_1'}{\partial u} \times \left(\frac{\partial \bar{l}_0}{\partial v} \wedge \bar{l}_0\right) - \frac{\partial \bar{r}'}{\partial v} \times \left(\frac{\partial \bar{l}_0}{\partial u} \wedge \bar{l}_0\right) = \\ = -2\{k_1(1-\eta^2) + k_2(1-\xi^2)\}\sqrt{EG} = 0,$$

puisque S est, par hypothèse, une surface harmonique, le plan xOy du système de référence étant son plan de base.

Il en résulte, d'après le réssltat final du paragraphe 1, que le domaine s_1 du plan xOy est la surface moyenne de le congruence (δ_1) qui correspond de la manière exposée dans le paragraphe 2 au plan xOy joint à la surface S_1, et que, par conséquent, la surface S_1, d'après le théorème cité dans le paragraphe 2, est une surface harmonique, le plan xOy étant son plan de base.

On peut donc, grâce aux constatations précédentes, énoncer le

Théorème I. *L' enveloppée moyenne de la congruence rectiligne que l' on obtient en menant par la projection orthogonale de chaque point d'une surface harmonique (non plane) S sur son plan de base la parallèle à la normale à la surface en ce point, est en général une surface qui est également harmonique ayant le même avec la surface S plan de base. L'enveloppée moyenne de cette congruenee dégénère à un seul point du plan de base de la surface S seulement dans le cas où S est une surface harmonique minima (non plane).*

Il est à notèr que l'hélicoïde minima reglé — qui est une surface harmonique ayant son plan directeur pour plan de base (6, p. 605) — est la seule surface minima réelle non plane, qui est harmonique.

Cette propriété caractéristique des hélicoïdes minima reglés, qui peut être démontrée à l'aide de l'équation (3. 8), à laquelle se ramène, dans le cas où la surface harmonique est une surface mlnima, l'équation (2. 11), est une conséquence — comme on le voit aisément (5, p. 399) — du fait, d'après un théorème établi par G. Hamel (4, p. 15) et démontré en outre par W. G. Graustein (2, p. 181), que les helicoïdes minima reglés sont les seules surfaces minima réelles non planes qui par rapport à un système de coordonnées cartésiennes trirectangulaire Oxyz sont définies par des équations de la forme $f(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z)$ étant une fonction harmonique des variables x, y, z.

Si la surface harmonique S est un hélicoïde minima reglé, les projections orthogonales des génératrices rectilignes de S sur son plan directeur qui, dans ce cas, est le plan de base de cette surface harmonique, sont les droites de ce plan respectivement parallèles aux génératrices, issues du point de rencontre de l'axe de l'hélicoïde avec son plan directeur. Ce même point du plan directeur de l'hélicoïde est — comme on le reconnaît facilement — le point commun aux plans perpendiculaires aux génératrices de la congruence (δ) associée à l'hélicoïde en leurs points moyens; par conséquent, le point de l'axe de l'hélicoïde situé sur son plan directeur est, dans ce cas, le point, auquel dégénère l'enveloppée moyenne de la congruence (δ) associée à l'hélicoïde.

4.— Supposons enfin que la surface considérée S soit une surface harmonique (non plane) à courbure moyenne constante, le plan xOy du système de référence Oxyz étant son plan de base.

La surface S dont les courbures principales k_1, k_2, d'après la supposition faite, sont liées par une relation de la forme :

$$k_1 + k_2 = 2c\,, \qquad (4.\ 1)$$

est — comme l'on sait (1, p. 297) — *isothermique*.

Cela étant, on peut admettre que, par le choix convenable des coordonnées curvilignes u, v sur la surface S, les courbes v = Cte, u = Cte tracées sur S sont ses lignes de courbure, tandis que si E, F, G sont les coefficients de la première forme quadratique fondamentale de S, on a :

$$E = G \equiv \lambda^2(u, v), \quad F \equiv 0 \qquad 4.\ 2)$$

et on peut distinguer deux cas suivant que la courbure moyenne constante c de S est = ou $\neq$ 0.

Si c = 0, la surface S — qui, dans ce cas, est une surface harmonique minima non plane — est nécessairement, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 3, un hélicoïde minima reglé.

Si au contraire :

$$c \neq 0\,, \qquad (4.\ 3)$$

l'équation (2. 11), qui est nécessairement vérifiée en chaque point de S et, grâce à la relation (4. 1), dévient :

$$k_1(\eta^2 - \xi^2) = 2c(1 - \xi^2), \qquad (4.\ 4)$$

montre que, sur la surface S, $\eta^2 - \xi^2$ est $\neq 0$.

En outre de l'équation (4. 4) jointe à l'équation (4. 1) on obtient pour les courbures principales k_1, k_2, de S les expressions:

$$k_1 = 2c \frac{1-\xi^1}{\eta^2-\xi^2}, \quad k_2 = 2c \frac{\eta^2-1}{\eta^2-\xi^2}. \tag{4. 5}$$

Par ailleurs la différentiation de l'équation (4. 4) par rapport à u et à v conduit à deux équations qui, à l'aide des (1. 6), (2. 4) et (4. 5), aquièrent la forme :

$$2\xi\eta k_{g_1} + (\eta^2-\xi^2) k_{g_2} = \frac{k_1 k_2}{k_1-c}\zeta\xi, \quad (\eta^2-\xi^2) k_{g_1} - 2\eta\xi k_{g_2} - = \frac{k_1 k_2}{k_1-c}\zeta\eta.$$

De ces équations, si l'on y porte les valeurs (4. 5) des k_1, k_2, on obtient pour les courbures géodésiques k_{g_1}, k_{g_2} des lignes de courbure $v = \mathrm{Cte}$, $u = \mathrm{Cte}$ de S les expressions :

$$k_{g_1} = 4c\eta(\eta^2-3\xi^2)\varphi, \quad k_{g_2} = 4c\xi(\xi^2-3\eta^2)\varphi, \tag{4. 6}$$

où

$$\varphi = \frac{\zeta(\zeta^2+\eta^2\xi^2)}{(\eta^4-\xi^4)(1-\zeta^4)}, \tag{4. 7}$$

qui montrent, eu égard au fait que les cosinus ξ, η, ζ sont liés par la relation (2. 2), que sur la surface S aucune de différences $\eta^2-3\xi^2$, $\xi^2-3\eta^2$ ne peut pas être $\equiv 0$.

Les formules (4. 6), compte tenu du fait que, en vertu des (4. 2), on a :

$$k_{g_1} = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial v}, \quad k_{g_2} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial u}, \tag{4. 8}$$

montrent en outre que, dans le cas envisagé, ξ, η, ζ sont des fonctions des u, v, qui doivent satisfaire à l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial u}\{\eta(\eta^2-3\xi^2)\varphi\} + \frac{\partial}{\partial v}\{\xi(\xi^2-3\eta^2)\varphi\} = 0, \tag{4. 9}$$

Cette équation, si l'on y porte les valeurs (2. 4) des dérivées premières par rapport à u et à v des ξ, η, ζ et que l'on substitue k_1, k_2 et k_{g_1}, k_{g_2} par leurs valeurs (4. 5) et (4. 6), acquiert la forme :

$$c\lambda \frac{R_1(\xi,\eta,\zeta)}{R_2(\xi,\eta,\zeta)} \equiv c\lambda F(\xi,\eta,\zeta) = 0, \tag{4. 10}$$

où $R_2(\xi, \eta, \zeta)$ est un polynôme en ξ, η, ζ de la forme $(\eta^4 - \xi^4)^\mu (1 - \zeta^4)^\nu$ μ et ν étant des entiers naturels, polynôme qui sur la surface S, d'après (4. 1) et (4. 4), est $\not\equiv 0$ et $R_1(\xi, \eta, \zeta)$ est également un polynôme en ξ, η, ζ à *coefficients numériques* qui — comme on le constate en effectuant les opérations exigées — ne sont pas tous $= 0$.*

Or, dans le cas envisagé, ξ, η, ζ sont liés, d'après (4. 10), par la relation :

$$R_1(\xi, \eta, \zeta) = 0, \tag{4. 11}$$

où R_1 est le polynôme en ξ, η, ζ à coefficients numériques (qui ne sont par tous $= 0$), que l'équation (4. 10) renferme.

Il en résulte, eu égard au fait que ξ, η, ζ sont en outre liés par la relation (2. 2), que, dans ce cas, quelle que soit la valeur $\neq 0$ de la courbure moyenne constante c de la surface S, ξ et η sont des fonctions seulement de ζ :

$$\xi = \xi(\zeta), \qquad \eta = \eta(\zeta) \tag{4. 12}$$

et que, par conséquent, d'après (4. 5), les courbures principales k_1, k_2 de S auront la forme :

$$k_1 = cf_1(\zeta), \qquad k_2 = cf_2(\zeta) \tag{4. 13}$$

où f_1, f_2 sont des fonctions de la seule variable ζ.

En outre, de deux équations (1. 6) qui, à l'aide des (4. 1), (4. 2) et (4. 8), prennent la forme :

$$\frac{\partial k_1}{\partial v} = -\frac{k_1 - k_2}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial v}, \qquad \frac{\partial k_1}{\partial u} = -\frac{k_1 - k_2}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial u}$$

résulte que l'on a :

$$\frac{\partial k_1}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial k_1}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} \equiv 0;$$

---

* Il est à noter que, pour la constatation du fait que les coefficients numériques du polynôme $R_1(\xi, \eta, \zeta)$ ne sont pas tous $= 0$, il suffit de constater que, pour un seul système de valeurs des ξ, η, ζ la valeur de la fonction $F(\xi, \eta, \zeta)$, que l'équation (4, 10) renferme, est $\neq 0$. En effet, on constate facilement que pour les valeurs $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$, 0 des ξ, η, ζ, on a $F\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) = -\frac{16}{75}$.

ce qui montre que le coefficient λ (u, v) est une fonction de k_1 seulement et, par suite, d'après (4. 13), que pour la valeur considérée de la constante c, λ est une fonction seulement de ζ :

$$\lambda = \lambda(\zeta), \tag{4. 14}$$

Cela étant, les formules (4. 8) pour les courbures géodésiques k_{g_1}, k_{g_2} des lignes de courbure v = Cte, u = Cte de S, acquièrent, à l'aide des (2. 4) et (4. 14), la forme :

$$k_{g_1} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\zeta} k_2 \eta, \quad k_{g_2} = -\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{d\zeta} k_1 \xi. \tag{4. 15}$$

On aura donc, grâce aux (4. 15) et (4. 5) pour le rapport $\dfrac{k_{g_2}}{k_{g_1}}$ la valeur :

$$\frac{k_{g_2}}{k_{g_1}} = -\frac{\xi}{\eta} \frac{1-\xi^2}{\eta^2-1}, \tag{4. 16}$$

tandis que, en vertu des (4. 6), on a :

$$\frac{k_{g_2}}{k_{g_1}} = \frac{\xi^2-3\eta^2}{\eta^2-3\xi^2} \frac{\xi}{\eta}; \tag{4. 17}$$

il en résulte que, quelle que soit la valeur $\neq 0$ de la courbure moyenne constante c de la surface S, les cosinus ξ, η, ζ doivent satisfaire à l'équation :

$$(\eta^2-\xi^2)(1+3\zeta^2) = 0.$$

Mais, d'après l'équation (4. 4) qui est nécessairement vérifiée en chaque point de la surface réelle non plane S, dans le cas où la constante c, qui y figure, est $\neq 0$, $\eta^2-\xi^2$ ne peut pas être $\neq 0$. Donc, si la surface réelle S à courbure moyenne constante c est harmonique, la constante c ne peut pas être $\neq 0$ et cette constatation jointe à celle concernant les surfaces harmoniques minima non planes citée dans le paragraphe 3, permet d'énoncer le

Théorème II. *Les hélicoïdes minima reglés sont les seules surfaces réelles non planes â courbure moyenne constante, qui sont harmoniques.*

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ἡ ἐργασία αὕτη ἀναφέρεται εἰς τὰς πραγματικὰς μὴ ἐπιπέδους ἐπιφανείας τοῦ συνήθους τριδιαστάτου χώρου, ἑκάστης τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα ἔχουν ὡς πρὸς σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων τρισορθογώνιον συντεταγμένας, τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ἁρμονικὴ συνάρτησις τῶν λοιπῶν δύο, τάς, ὡς ἐκ τούτου, καλουμένας, χάριν συντομίας, «ἁρμονικὰς ἐπιφανείας», τοῦ ἐπιπέδου τοῦ συστήματος συντεταγμένων τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὰς δύο ταύτας συντεταγμένας τῶν σημείων μιᾶς τοιαύτης ἐπιφανείας καλουμένου «ἐπιπέδου βάσεως» αὐτῆς. Ἀποδεικνύονται δὲ εἰς αὐτὴν δύο κυρίως θεωρήματα ἀφορῶντα τὸ ἓν εἰς τὰς ἁρμονικὰς ἐπιφανείας ἐν γένει τὸ δὲ ἄλλο εἰς τὰς ἁρμονικὰς ἐπιφανείας μέσης καμπυλότητος σταθερᾶς. Συγκεκριμένως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ «μέση περιβάλλουσα» τοῦ εὐθειογενοῦς σμήνους, τοῦ ὁποίου γενέτειραι εἶναι αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς καθέτους ἁρμονικῆς ἐπιφανείας εἰς τὰ σημεῖα αὐτῆς αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τῶν ὀρθῶν προβολῶν τῶν σημείων τούτων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου βάσεως τῆς ἐπιφανείας, εἶναι ἐν γένει ἐπιφάνεια καὶ δὴ ἐπίσης ἁρμονικὴ ἔχουσα τὸ αὐτὸ μετὰ τῆς ἁρμονικῆς ἐπιφανείας, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ σμῆνος ἀντιστοιχεῖ, ἐπίπεδον βάσεως, ἐκφυλιζομένη εἰς ἓν μοναδικὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου βάσεως τῆς ἁρμονικῆς ταύτης ἐπιφανείας μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αὕτη εἶναι ἁρμονικὴ ἐπιφάνεια ἐλαχίστης ἐκτάσεως καὶ συνεπῶς ἐπιφάνεια σταθερᾶς μέσης καμπυλότητος καὶ δὴ μηδενικῆς. Ἐν συνεχείᾳ δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ κοινὴ ἑλικοειδὴς ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία, ὡς γνωστόν, εἶναι ἐπιφάνεια ἁρμονικὴ ἀλλὰ καὶ ἐπιφάνεια ἐλαχίστης ἐκτάσεως, εἶναι ἡ μόνη πραγματικὴ μὴ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια σταθερᾶς μέσης καμπυλότητος, ἡ ὁποία εἶναι ἁρμονική.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. P. Eisenhart, A treatise of the Differential Geometry of curves and surfaces, Dover publications.

2. W. C. Graustein, Harmonic minimal surfaces, Trans, of the Am. Math. Society, t. 47 (1940), pp. 173 - 205.

3. I. Haag, Lignes asymptotiques d'une surface représentée par une fonction harmonique, Bull. Sc. Math. S. 2, t. LXV (1941), pp. 100 - 103.

4. G. Hamel, Potentialströmungen mit konstanter Geschwindigheit, Sitz. Ber. der Preuss. Akad. der Wiss. Phys. Math. kl. (1937), pp. 5 - 20.

5. O. Pylarinos, Sur les surfaces représentatives des fonctions harmoniques, Bull. de la Soc. Roy. des Sciences de Liège, 49e an. No 11 - 12 (1980), pp. 393 - 399.

6. F. Simonart et J. Alardin, Sur une classe de congruences R associées aux surfaces harmoniques, Bull. de la Classe des Sciences de l'Acad. Roy. de Belgique, t. XXXIII (1949), pp. 602 - 613.

7. P. Vincensini, Surfaces harmoniques, congruences et représentations conformes associées, Bull. Sc. Math. S. 2, t. LXVIII (1944), pp. 60 - 70.