βιβλίον αὐτοῦ Griechische Feste σ. 461 ἑξ. Ὑπενθυμίζομεν τὴν μαρτυρίαν τοῦ Ἀσκληπιάδου ἐν Σχολ. Πινδ. Νεμ. 7, 62 λέγοντος: «περὶ μὲν τοῦ θανάτου (τοῦ Νεοπτολέμου) σχεδὸν ἅπαντες οἱ ποιηταὶ συμφωνοῦσι, τελευτῆσαι μὲν αὐτὸν ὑπὸ Μαχαιρέως, *ταφῆναι δὲ τὸ μὲν πρῶτον ὑπὸ τὸν οὐδὸν τοῦ νεώ, μετὰ δὲ ταῦτα,* Μενέλεων ἐλθόντα ἀνελεῖν, καὶ *τὸν τάφον ποιῆσαι ἐν τῷ τεμένει*». Ὁ Ἀσκληπιάδης δὲν ὁρίζει ἀκριβῶς τίνος ἦτο τὸ τέμενος τοῦτο, ἂν δηλ. ἦτο τὸ τοῦ Ἀπόλλωνος, ὅτε ἡ θέσις τοῦ τάφου θὰ ἦτο πιθανὴ πανταχοῦ ἢ πολλαχοῦ τοῦ μεγάλου τούτου τεμένους, ἢ ἦτο τοῦ Νεοπτολέμου, ὅτε ἡ πιθανότης ἀφορᾷ εἰς στενὸν χῶρον, δηλ. τὸν ἀριστερὰ τῷ ἐξιόντι ἐκ τοῦ ναοῦ, ὃν ὁ Πινδ. ἔ. ἀ. ὁρίζει «θεοῦ παρ' εὐτειχέα δόμον», ὁ δὲ Παυσ. 10, 24, 6 ἀκριβέστερον: «ἐξελθόντι δὲ τοῦ ναοῦ καὶ τραπέντι *ἐς ἀριστερὰ* περίβολός ἐστι καὶ Νεοπτολέμου τοῦ Ἀχιλλέως ἐν αὐτῷ τάφος, καί οἱ κατὰ ἔτος ἐναγίζουσιν οἱ Δελφοί».

Ἀλλ' εἰς τὰ βαθέα στρώματα τοῦ ναοῦ μάλιστα κατὰ τὴν πρόσοψιν καὶ πρὸ αὐτῆς, κυρίως περὶ τὸν βωμὸν (πρβλ. Εὐριπ. Ἀνδρομ. 1088 ἑξ. 1239 ἑξ.), εὑρέθησαν τὰ πλουσιώτατα κοιτάσματα μυκηναϊκῶν ὀστράκων τῶν Δελφῶν. Κάτωθεν δὲ τοῦ ἀναθήματος τοῦ Δαόχου καὶ μεταξὺ τοῦ παλαιοῦ αὐτόθι πολυγωνικοῦ ἀναλήμματος τοῦ 6ου αἰῶνος καὶ τοῦ ἰσχεγάου, ἔνθα τοποθετεῖ ὁ HOMOLLE καὶ ἄλλοι (BCH, 23, 425, Amer. Journ. of. Arch. 1909, 473 ἑξ. POMTOW, Delphika III, 75 PAULY-WISSOWA R. E. Suppl. Band IV, σ. 1195 N° 221) τὸ παλαιότερον τέμενος τοῦ Νεοπτολέμου, ὁ BULLE ἐπίστωσεν *ὑπὸ* τὸν μέγαν βράχον, ὅστις διέσπασε τὸ πολυγωνικὸν ἐκεῖνο ἀνάλημμα, πυκνὸν στρῶμα τέφρας καὶ λίαν παλαιὰ ὄστρακα, ἅτινα δυστυχῶς οὐδαμοῦ εὑρίσκω ἀκριβέστερον ὁριζόμενα. Θυσίας δὲ εἰς τὸν Νεοπτόλεμον μαρτυρεῖ καὶ ὁ Πίνδαρος καὶ ὁ Εὐριπίδης καὶ ὁ Παυσανίας καὶ ὁ Ἡλιόδωρος καὶ ὁ ὑπὸ τούτου παρατιθέμενος Αἰθιοπ. 3, 2 γνήσιος πιθανῶς παλαιότερος ὕμνος. Ἑπομένως ἔχομεν καὶ ἐνταῦθα λείψανα παλαιᾶς, μυκηναϊκῆς, καὶ ἐν συνεχείᾳ νεωτέρας, μέχρι τοὐλάχιστον τοῦ Παυσανίου, λατρείας.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ANALYSE MATHÉMATIQUE.— Sur les fonctions algébroïdes quotients de deux algébroïdes bornées*. *Note de M.* Théodore Varopoulos. Présentée par M. C. Maltézos.

1. Ce travail, entrepris sur les conseils de M[r] PAUL MONTEL, expose quelques théorèmes concernant les fonction algebroïdes de la variables x

* ΘΕΟΔ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΥ.— Περὶ τῶν ἀλγεβροειδῶν αἵτινες, ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος ἕν, εἶναι πηλίκα περιωρισμένων (**bornées**) ἀλγεβροειδῶν.

definies bornées ou non, dans le cercle $|x|<1$, mais égales au quotient de deux fonctions algébroïdes bornées.

Soit une fonction $f(x)$ uniforme et non bornées dans le cercle unité; elle peut être alors le quotient de deux fonctions bornées dans ce cercle. Par exemple, la fonction $\frac{1}{1-x}$ non bornée dans le cercle unité est le quotient de deux fonctions 1, $1-x$ bornées dans ce cercle.

Posons
$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$
on peut toujours supposer que
$$|g(x)|\leq 1, \quad |h(x)|\leq 1$$
en divisant au besoin les deux tèrmes de la fraction par un nombre supérieur au module maximum des deux fonctions $g(x)$, $h(x)$;
par exemple la fonction $\frac{1}{1-x}$; ici on a justement
$$|g(x)|=1, \quad |h(x)|\leq 1 \;;$$
aussi l'étude de la fonction $\frac{1+x}{1-x}$ se ramène à celle de la fonction $\frac{x}{1-x}$; on a
$$|g(z)|\equiv|x|<1, \quad |h(x)|\equiv|1-x|<1.$$
On doit à M. M. F. et R. Nevanlinna[1] la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction uniforme, définie, pour $|x|<1$ soit le quotient de deux fonction bornées; il faut et il suffit que l'intégrale
$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta$$
ne dépasse pas un nombre M fixe, quel que soit $0\leq r<1$. On sait que $\overset{+}{\log}a=\log a$ si $a\geq 1$ et $\overset{+}{\log}a=0$ si $a\leq 1$.

2. Dans se qu'il suit, nous allons exposer quelques théorèmes concernant les fonctions algébroïdes en rapport avec le théorème fondamental de M. M. F. et R. Nevanlinna.

Voici d'abord la condition necessaire et suffisante pour qu'une algébroïde soit égale, dans le cercle unité, au quotient de deux algébroïdes bornées.

Théorème: *Considérons l'algébroïde entière définie par l'équation*
$$u^{\nu}+f_1(x)u^{\nu-1}+\ldots.+f_{\nu}(x)=0,$$
$f_1(x), f_2(x),\ldots, f_{\nu}(x)$ *désignant des fonctions holomorphes pour* $|x|<1$. *Pour que*

[1] F. et R. Nevanlinna: Über die Eigenschaften analytischer Functionen in der Umgeburg einer singulären Stelle oder Linie. (Acta Soc. Scient. Fennicae (5), t. 50, 1922, p. 346).

cette algébroïde soit quotient de deux algébroïdes bornées dans le cercle unité, il faut et il suffit que le coefficients $f_i(x)$ *le soient.*

1° La condition est nécessaire:

Supposons en effet que l'algébroïde u(x) soit le quotient deux algébroïdes bornées v(x), w(x) inférieures à *un* en module dans le cercle unité, on a

$$u(x)=\frac{v(x)}{w(x)} \qquad |v(x)|\leq 1, \ |w(x)|\leq 1.$$

Si

$$\frac{v_1}{w_1}, \ \frac{v_2}{w_2}, \ldots, \frac{v}{w_v}$$

sont les v determinations de l'algébroïde u(x) on a

$$-f_1(x)=\frac{v_1}{w_1}+\frac{v_2}{w_2}+\ldots+\frac{v_v}{w_v}\equiv\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{W}_1},$$

avec

$$|V_1|\leq v, \quad |W_1|\leq 1.$$

Soit λ le nombre de branches et W_1, W_2, ..., W_λ les λ déterminations de l'algebroïde W;

le produit

$$W_1 \ W_2 \ W_3 \ \ldots . \ W_\lambda$$

est une fonction uniforme.

Or

$$-f_1(x)=\frac{V_1 \ W_2 \ W_3 \ldots . \ W_\lambda}{W_1 \ W_2 \ W_3 \ldots . \ W_\lambda}\equiv\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{W}};$$

comme $f_1(x)$ et W sont uniformes, il en sera de même de V. D'autre part,

$$|V|\leq v, \quad |W|<1$$

De même en nous servant de rélations

$$f_2=\sum\frac{V_1}{W_1}\frac{V_2}{W_2}$$

$$-f_3=\sum\frac{V_1}{W_1}\frac{V_2}{W_2}\frac{V_3}{W_3}$$

. . . .

$$(-1)^v f_v=\sum\frac{V_1}{W_1}\frac{V_2}{W_2}\cdots\frac{V_v}{W_v}$$

on voit que chaque coefficient $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_v(x)$ est la quotient de deux fonctions bornées.

2° La condition est suffisante:

En effet, supposons que les coefficients $f_i(x)$ soient des quotients de deux fonctions bornées dans le cercle unité et posons

$$f_i(x)=\frac{g_i(x)}{g_o(x)}; \qquad |g_i(x)|\leq 1, \quad |g_o(x)|\leq 1.$$

L'équation qui définit l'algébroïde peut s'ecrire

$$g_o(x)u^v+g_1(x)u^{v-1}+\dots+g_v(x)=0 \ ;$$

posons

$$u=\frac{\upsilon}{g_o},$$

l'algébroïde υ est définie par l'équation

$$\upsilon^v+g_1(x)\upsilon^{v-1}+g_o(x)g_2(x)\upsilon^{v-2}+\dots+g_o^{v-1}(x)g_v(x)=0$$

or les coefficients

$$g_1, \ g_o g_2, \ g_o^2 g_3, \dots, g_o^{v-1}g_v$$

sont bornés; il en sera de même pour l'algébroïde $\upsilon(x)$ et la relation

$$\upsilon(x)=\frac{\upsilon(x)}{g_o(x)}$$

montre que l'algébroïde u(x) se met sous la forme du quotient de deux algébroïdes bornées.

Il résulte de la seconde partie de la démonstration que *si une algébroïde* u(x) *est le quotient de deux algébroïdes bornées dans le cercle unité on peut toujours supposer que le dénominateur est uniforme.*

On a vu, en effet, que l'on a

$$u(x)=\frac{\upsilon(x)}{g_o(x)},$$

v(x) étant une algébroïde bornée.

3. En nous servant de l'inegalité de M. M. Nevanlinna rappelée ci-dessus nous pouvons établir la proposition suivante:

Théorème: *Considérous l'algébroïde entière definie par l'équation*

$$u^v+f_1(x)u^{v-1}+\dots+f_v(x)=0 \ ;$$

la condition necessaire et suffisante pour que cette olgébroïde soit le quotient de deux fonctions algébroïdes bornées dans le cercle unité est

$$m_i(r)\equiv\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|f_i(re^{i\theta})|\,d\theta < \mathbf{M}$$

M *étant un nombre fixe.*

En effet, pour que cette algébroïde u(x) soit le quotient de deux algébroïde bornées, il faut et il suffit que les fonctions $f_i(x)$ le soient; alors, en appliquant le théorème de M. M. NEVANLINNA, on etablit immediatement la proposition.

Dans le cas où l'algébroïde n'est pas entière *il faut remplacer la condition ci-dessus par la suivante*

$$T_i(r) \equiv \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| f_i(re^{i\theta}) \right| d\theta + \log \frac{r^{n_i}}{r_1^i\, r_2^i \ldots r_{n_i}^i} < M$$

$r_1^i, r_2^i, \ldots, r_{n_i}^i$ étant les modules des pôles des fonctions $f_i(x)$ inférieurs à r. Si x=0 est un pôle, on remplace dans le second terme, son module par l'unité[1].

Les resultats précédents demeurent exacts, mais ici, la fonction $g_o(x)$ peut s'annuler dans le cercle unité.

5. Le théorème de M. FATOU et les fonctions algébroïdes.

On doit à M. FATOU[2] la proposition suivante concernant les fonctions uniformes. *Une fonction uniforme et bornée dans le cercle unité a, presque partout, une limite lorsqu'on atteint la circonférence en suivant une rayon.*

Ce resultat s'étend aux fonctions uniformes non bornées quotient de deux fonctions bornées, comme l'ont montré M. M. NEVANLINNA.

En suivant les indications precises de M. PAUL MONTEL je démontre le théorème suivant qui est la generalisation du théorème de M. FATOU aux algébroïdes.

Théorème: *Soit un algébroïdes* u(x) *quotient de deux algébroïdes bornées définie par l'équation.*

$$g_o(x)\,u^v + g_1(x)\,u^{v-1} + \ldots + g_v(x) = 0$$

dans le ccrcle unité; les diverses détérminations $u_1, u_2, \ldots, u_v$ *de l'algébroïde ont simultanement des limites* $u_1^o\; u_2^o, \ldots, u_v^o$ *sur les rayons, sauf peut-être pour un ensemble de points de la circonférence de mesure nulle.*

---

[1] R. NEVANLINNA: Über eine Klasse meromorpher Functionen (Math-annalen, Bd 92, 1924, p. 145-154).

[2] P. FATOU: Series trigonometriques et series de Taylor (Acta Math. tome 30, 1906, p. 336-400).

En effet, les coefficiants $g_o, g_1, \ldots, g_\nu$ sont bornés et ont des modules inférieur à 1; donc en vertu du théorème de M. FATOU.

$g_o(x) \longrightarrow$ une limite sauf pour un ensemble (E_o) de mesure nulle.
$g_1(x) \longrightarrow$ » » » » » » (E_1) » » »
. . . .
$g_\nu(x) \longrightarrow$ » » » » » » (E_ν) » » »

or, on a $\operatorname{mes}(E_o) = \operatorname{mes}(E_1) = \ldots = \operatorname{mes}(E_\nu) = 0$. Enlevons les points de l'ensemble $E = E_o + E_1 + \ldots + E_\nu$

on a $\operatorname{mes}(E) = \operatorname{mes}(E_o + E_1 + \ldots + E_\nu) = \operatorname{mes}(E_o) + \operatorname{mes}(E) + \ldots + \operatorname{mes}(E_\nu) = 0$ donc tous les $g_i(x)$ ont *simultanement* une limite presque partont.

Ensuite, d'après le théorème des fréres RIESZ, on a, pour un $g_i(x)$ *détérminé* mais quelconque.

$$\lim g_i(x) \quad 0$$

sauf pour un ensemble E^1 de mesure nulle; enlevons les points de l'ensemble $E_1 = E + E^1$ on a:

$$\operatorname{mes}(E_1) = (E + E^1) = \operatorname{mes}(E) + \operatorname{mes}(E^1) = 0$$

donc presque partout $g_i(x)$ ont *ensmble* des limites ***non toutes nulles.***

D'après le théorème classique sur la continuité des racines les racines

$$u_1, u_2, \ldots, u_\nu$$

ont, presque partout, des limites finies ou infinié

$$u_1^o, u_2^o, \ldots, u_\nu^o \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En particulier le théorème s'applique au cas ou les coefficients sont bornés.

Ces resultats font l'objet d'un memoire qui paraîtra au Bulletin des Sciences Mathématiques.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἶναι γνωστὸν ὅτι μία μονότιμος συνάρτησις f(x) εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ εἶναι περιωρισμένη ἐντὸς τοῦ κύκλου $|x| < 1$, ἀλλὰ νὰ τίθηται ὑπὸ μορφὴν πηλίκου δύο μονοτίμων συναρτήσεων g(x), h(x) περιωρισμένων ἐντὸς τοῦ κύκλου $|x| < 1$. π. χ. ἡ

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Οἱ ἀδελφοὶ F· et R. NEVANLINNA εὗρον τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ πληρῇ μία μονότιμος συνάρτησις $f(x)$, ἵνα δυνηθῇ νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν πηλίκου δύο μονοτίμων συναρτήσεων

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

περιωρισμένων ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 1.

Ἐζήτησα νὰ γενικεύσω τὰ ἐξαγόμενα τῶν NEVANLINNA ἐπεκτείνων ταῦτα εἰς τὰς πλειονοτίμους συναρτήσεις.

Οὕτως ἀνεῦρον τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην ἣν πρέπει νὰ πληρῇ μία ἀλγεβροειδής, ἵνα αὕτη εἶναι πηλῖκον δύο περιωρισμένων ἀλγεβροειδῶν ἐντὸς τοῦ κύκλου $|x|<1$.

Ἀποδεικνύω δ' ὅτι πρέπει πρὸς τοῦτο καὶ ἀρκεῖ οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως

$$u^{v}+f_{1}(x)u^{v-1}+\ldots+f_{v}(x)=0$$

τῆς ὁριζούσης τὴν ἀλγεβροειδῆ νὰ εἶναι πηλῖκα δύο μονοτίμων περιωρισμένων συναρτήσεων ἐν τῷ κύκλῳ ἀκτῖνος 1.

Εὗρον ἐπίσης τὴν συνθήκην τὴν ἀφορῶσαν εἰς τὰς ἀλγεβροειδεῖς, τὰς μὴ ἀκεραίας, ἵνα αὗται ἐκφράζονται ὡς πηλῖκα δύο περιωρισμένων ἀλγεβροειδῶν ἐντὸς τοῦ κύκλου $|x|<1$.

Ἀποδεικνύω ἐπὶ πλέον ὅτι ὅταν μία ἀλγεβροειδὴς εἶναι πηλίκον δύο ἄλλων περιωρισμένων ἀλγεβροειδῶν ἐντὸς τοῦ κύκλου $|x|<1$, δύναμαι πάντοτε νὰ ὑποθέσω ὅτι ὁ παρανομαστὴς εἶναι μονότιμος.

Ἀκολούθως, γενικεύων τὸ θεώρημα τοῦ FATOU, ἀποδεικνύω ὅτι μία συνάρτησις ἀλγεβροειδὴς πηλῖκον δύο περιορισμένων ἀλγεβροειδῶν ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος 1 ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: ἐὰν καλέσω u_1, u_2, ..., u_v τοὺς κλάδους τῆς συναρτήσεως, οἱ κλάδοι οὗτοι ἔχουσιν ὅριον

$$u_1^o,\ u_2^o, \ldots,\ u_v^o$$

ταὐτοχρόνως ἐπὶ τῶν ἀκτίνων τῆς περιφερείας σχεδὸν παντοῦ, ἐκτὸς δι' ἓν σύνολον σημείων τῆς περιφερείας $|x|<1$, μέτρου μηδενός.

ΧΗΜΕΙΑ.—Μελέτη τῆς ἐπιδράσεως ὑδραργυροϊωδιούχου καλίου ἐπὶ ἑνώσεων χρυσοῦ, *ὑπὸ κ.* ***Δημ. Νίδερ.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Ζέγγελη.

Παρασκευὴ κολλοειδοῦς χρυσοῦ καὶ προσδιορισμὸς τούτου.—Κατὰ τὴν ἐπίδρασιν ἰωδιούχου καλίου ἐπὶ ἑνώσεων χρυσοῦ ἐν ἀλκαλικῷ διαλύματι, λαμβάνει χώραν ἀντίδρασις βραδέως καὶ ἐμφανίζεται μὲν κατ' ἀρχὰς ταχέως κίτρινος χρω-