ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 26ΗΣ ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 1972

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΓΡΗΓ. ΚΑΣΙΜΑΤΗ

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΕΛΟΥΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Μαθηματικὴ Ἀλήθεια**, *ὑπὸ Φίλωνος Βασιλείου* *.

1. Βασικὸ πρόβλημα γιὰ τὴν ἀνάλυση τῆς μαθηματικῆς σκέψεως ἀποτελεῖ ἡ ἔρευνα, ποὺ ἀναφέρεται στὴν φύση τῆς ἀ λ ή θ ε ι α ς στὰ Μαθηματικά. Εἶναι ἀδύνατο νὰ διανοηθῆ κανεὶς ὡς ἐπιστήμη ὁποιοδήποτε κλάδο τῆς γνώσεως, ἰδιαίτερα τὰ Μαθηματικά, δίχως τὴν ἔννοια τῆς ἀλήθειας ἢ τοῦ ψεύδους, ποὺ πρέπει νὰ χαρακτηρίζη τὶς προτάσεις τοῦ κλάδου αὐτοῦ. Σὲ ἀντίθεση, ὅμως, μὲ ὅ,τι συμβαίνει γενικὰ σὲ μιὰ ἐμπειρικὴ ἐπιστήμη ποὺ βασίζεται σὲ ὁρισμένες ὑποθέσεις, ὅπου ἡ σ υ μ φ ω ν ί α τῶν συμπερασμάτων τῶν ὑποθέσεων αὐτῶν μὲ τὶς παρατηρήσεις τοῦ ἔξω κόσμου ἢ μὲ τὸ πείραμα τεκμηριώνει τὴν ἀλήθεια τῶν ἐν λόγῳ συμπερασμάτων, γιὰ τὰ Μαθηματικὰ παρομοία διαπίστωση τῆς ἀλήθειας δὲν εἶναι ἐφικτή. Φυσικά, πρέπει νὰ παραβλέψωμε τὴν πρωτόγονη περίοδο τῆς ἀναπτύξεως τῶν Μαθηματικῶν, ὅταν κυριαρχοῦσε, ὡς γνωστόν, μόνον ἡ ἀνάγκη μιᾶς πρακτικῆς ὠφελιμότητος. Ἀλλὰ καὶ σήμερα ἡ χρήση ἐννοιῶν στὰ Μαθηματικά, ὅπως ἐκείνης τοῦ ἀ π ε ί ρ ο υ, ποὺ τίποτε ἀντίστοιχό των δὲν ὑπάρχει στὴν Φύση, ἀποκλείει ἐξ ἀρχῆς τὴν δυνατότητα προσφυγῆς στὴν ἐμπειρικὴ μαρτυρία, ὡς ἱκανοῦ στοιχείου κατὰ τὴν διατύπωση ὁποιουδήποτε κριτηρίου γιὰ τὴν μαθηματικὴ ἀλήθεια [1].

Οἱ προσπάθειες γιὰ τὴν ἐπιτυχῆ ἀντιμετώπιση τοῦ προβλήματος εὑρέσεως ἑνὸς

---

* PH. VASSILIOU, **The mathematical truth.**

1. H. C u r r y, *Outlines of a formalist Philosophy of Mathematics,* 1970 North-Holland Publishing Company, Amsterdam - London, σελ. 3 - 4.

τέτοιου κριτηρίου, ποὺ ξεκίνησε ἀπ᾽ αὐτὴ τὴν ἀρχαιότητα, φθάνουν μέχρι καὶ τοῦ αἰῶνος μας. Ἂν ἀφίση κανεὶς κατὰ μέρος ἕνα σύγχρονο ἐ μ π ε ι ρ ι σ μ ό, ποὺ (σὲ ἐξέλιξη παλαιοτέρου) ἀναχωρεῖ τόσο ἀπὸ τὸν βασικὸ διαχωρισμὸ μεταξὺ ἀληθειῶν, ποὺ βασίζονται σὲ ἀνεξάρτητες ἀπὸ γεγονότα σ η μ α σ ί ε ς, καὶ ἀληθειῶν ποὺ βασίζονται σὲ γεγονότα, ὅσο καὶ ἀπὸ τὴν θεώρηση πὼς κάθε πρόταση μὲ νόημα εἶναι ἰσοδύναμη μὲ κάποιο λογικὸ μόρφωμα ἀπὸ ὅρους ποὺ ἀναφέρονται στὴν ἄμεση ἐμπειρία — ἐμπειρισμὸ γιὰ τὸν ὁποῖον ἡ παραπάνω παρατήρηση σχετικὰ μὲ τὸ ἄπειρο δὲν παύει νὰ ἔχῃ ἰσχύ —, τρεῖς κυρίως κατευθύνσεις ἀκολουθοῦνται σήμερα ἀπὸ τοὺς ἐρευνητάς, ἀνάλογα κάθε φορὰ μὲ τὴν ὀ ν τ ο λ ο γ ι κ ὴ τοποθέτησή των. Δηλαδή, ἢ οἱ ἐρευνηταὶ αὐτοὶ δέχονται τὴν ὕ π α ρ ξ η τῶν μαθηματικῶν ὄντων ἔξω ἀπὸ τὸν νοῦν, ἄρα ἐπιζητοῦν τὴν ἀ ν α κ ά λ υ ψ ή των, ἢ δέχονται τὴν δημιουργία τῶν ἐν λόγω ὄντων ἀπὸ τὸν νοῦν καὶ ἐπιδιώκουν τὴν ἐ π ι ν ό η σ ή των, ἢ τέλος δὲν δέχονται τὴν ὕπαρξη τέτοιων ὄντων, οὔτε καθ᾽ ἑαυτὰ οὔτε ὡς ἀφηρημένες ἔννοιες, ἀλλὰ θεωροῦν κάθε σχετικὴ ἀναφορὰ ὡς ἕνα τ ρ ό π ο τ ο ῦ λ έ γ ε ι ν. Σὲ ἀντιδιαστολὴ πρὸς τὴν σύγχρονη ἐμπειρικὴ κατεύθυνση, οἱ δύο πρῶτες ἀπὸ τὶς κατευθύνσεις ποὺ ἀναφέραμε ἠμποροῦν νὰ χαρακτηρισθοῦν ὡς ἰ δ ε α λ ι σ τ ι κ έ ς, ὑπὸ τὸ πνεῦμα ὅτι σ᾽ αὐτὲς τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα συσχετίζονται μὲ ν ο η τ ὰ ὄντα, ἐνῶ ἡ τρίτη ἠμπορεῖ νὰ χαρακτηρισθῆ ὡς ὀ ν ο μ α τ ι κ ή.

Εἰς ὅσα ἀκολουθοῦν, πρόκειται νὰ ἐξετάσωμε συνοπτικὰ τὴν προσπέλαση τοῦ προβλήματος τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας γιὰ κάθε μία ἀπὸ τὶς τρεῖς αὐτὲς κατευθύνσεις [2].

2. Κατὰ τὸν Πλάτωνα (427 - 347 π.Χ.) ἀντικείμενο τῆς Φιλοσοφίας, ἐν μέρει δὲ καὶ τῶν Μαθηματικῶν, εἶναι οἱ ὑπ᾽ αὐτοῦ θεωρούμενες ἰ δ έ ε ς, τὰ ὄ ν τ ω ς ὄ ν τ α, ὡς ἀντικειμενικὲς καὶ ἀπόλυτες ὀντότητες. Εἰς τὸ ἕβδομο βιβλίο τῆς «Πολιτείας» του, λέγει ὁ Πλάτων, ὅτι ἡ Γεωμετρία εἶναι ἡ γνώση γιὰ τὸ αἰώνιο ὄν· ἡ Γεωμετρία ἄρα αἴρει τὴν ψυχὴ πρὸς τὴν ἀλήθεια καὶ καλλιεργεῖ τὸ πνεῦμα τοῦ φιλοσόφου. «Τοῦ γὰρ ἀεὶ ὄντος ἡ γεωμετρικὴ γνῶσίς ἐστιν· ἕλκον ἄρα ψυχῆς πρὸς ἀλήθειαν εἴη ἂν καὶ ἀπεργαστικὸν φιλοσόφου διανοίας πρὸς τὸ ἄνω σχεῖν ἃ νῦν κάτω ἔχομεν» [3].

Τὴν σπουδὴ τῶν Μαθηματικῶν χαρακτηρίζει ὁ Πλάτων ὡς θείαν ἀναγκαιότητα. Ἰδιαίτερα, λέγει, ἡ μελέτη τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν ἐξοικειώνει τὸν

2. Βλ. καὶ τὸ μόλις ἐκδοθὲν ἔργο τοῦ Ν. Α ὐ γ ε λ ῆ, «Ἡ ἔννοια τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας καὶ ἡ ἀπόδειξη τοῦ G o e d e l. Φιλοσοφικὲς συνέπειες». Θεσσαλονίκη 1972.

3. Π λ ά τ ω ν ο ς, *Πολιτεία*, Βιβλ. VII, σελ. 527 B.

νοῦν μὲ τὴν θεώρηση τῆς καθαρῆς ἀλήθειας καὶ μᾶς ὑψώνει ἐπάνω ἀπὸ τὸν ὑλικὸ κόσμο. Οἱ ἰδιότητες αὐτές, καθὼς καὶ οἱ σχέσεις τῶν μαθηματικῶν ὄντων, ποὺ φανερώνει ἡ νόηση [4] συνιστοῦν, κατὰ τὸν Πλάτωνα, τὴν ἀπόλυτο μαθηματικὴ ἀλήθεια.

3. Κατὰ τὸν Leibniz (1646 - 1716) μία πρόταση, σύμφωνα μὲ τὴν περίφημη φράση του, ἢ εἶναι ἀληθὴς σὲ κάθε δυνατὸ κόσμο, ἄρα καὶ στὸν πραγματικό, ἢ εἶναι ἀληθὴς στὸν πραγματικό, δίχως ὅμως νὰ εἶναι ἀληθὴς καὶ σὲ κάθε δυνατὸ κόσμο. Ἔτσι ἔχομε δύο ἀλήθειες, τὴν ἀλήθεια λόγου καὶ τὴν ἀλήθεια συμβεβηκότος, καὶ ἀντίστοιχα τὴν διαίρεση τῶν προτάσεων σὲ λογικὲς καὶ σὲ πραγματολογικές. Οἱ ἀληθεῖς μαθηματικὲς προτάσεις, τὰ θεωρήματα, εἶναι κατὰ τὸν Leibniz, καθαρὰ λογικές, εἶναι δηλαδὴ ἀληθεῖς γιὰ ὅλα τὰ δυνατὰ ἀντικείμενα. Προτάσεις ποὺ δὲν ἠμποροῦν νὰ εἶναι ψευδεῖς, καὶ εἶναι γι' αὐτὸ πάντοτε ἀληθεῖς, τὶς καλοῦμε ταυτολογίες.

Σύμφωνα μὲ μιὰ ἄλλη διατύπωση, μία πρόταση εἶναι λογικὰ ἀληθής, ὅταν ἡ ἄρνησή της εἶναι λογικὰ ἀδύνατος, προσκρούη δηλαδὴ στὴν λογικὴ ἀρχὴ τῆς ἀντιφάσεως. Ἡ ἀρχὴ αὐτὴ καλύπτει, κατὰ Leibniz, ὄχι μόνο τὴν ἀρχὴ τῆς ταυτότητος ἀλλὰ καὶ ἐκείνη τοῦ ἀποκλειομένου τρίτου. Πραγματολογικὴ ἀλήθεια εἶναι ἐκείνη, ποὺ ἡ ἄρνησή της εἶναι δυνατή. Ὥστε, οἱ λογικὲς ἀλήθειες, κατὰ τὴν ἄποψη αὐτή, περιλαμβάνουν τὶς μαθηματικὲς ταυτολογίες. Εἰς αὐτὲς ὑπάγονται ὅλα τὰ μαθηματικὰ ἀξιώματα καὶ θεωρήματα, ὡς προτάσεις ποὺ ἡ ἄρνησή των ἐμφανίζει ἀντίφαση, εἶναι ἄρα πάντοτε ἀληθεῖς.

Ἀξιοσημείωτο εἶναι, πὼς ἐμπειρικὲς προτάσεις ποὺ ἡ ἀλήθειά των ἔχει ἰσχὺ μόνο σ' ἕνα δυνατὸ κόσμο, ἠμποροῦν καὶ αὐτὲς νὰ εὑρίσκωνται μεταξύ των σὲ λογικὲς σχέσεις, καὶ ὡς σύνολο ν' ἀποτελοῦν παραγωγικὸ σύστημα.

4. Παράλληλα μὲ τὴν ἄποψη τοῦ Leibniz, ὅτι οἱ μαθηματικὲς ἀλήθειες εἶναι ταυτολογικὲς προτάσεις, ἐπεκράτησε παλαιότερα καὶ ἡ ἄποψη πὼς τὰ μαθηματικὰ ἀξιώματα, ἄρα καὶ οἱ μαθηματικὲς προτάσεις, εἶναι ἀφ' ἑαυτῶν φανερὲς ἢ αὐταπόδεικτες. Ἡ παραδοχή, ὅμως, τῆς τελευταίας θεωρήσεως, ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ἀσάφεια γιὰ τὸ αὐταπόδεικτο, παρουσιάζει ὄχι λίγες δυσκολίες γιὰ τὴν βασιμότητά της. Γιατί, πρῶτα, τὸ ἀφ' ἑαυτοῦ φανερὸ γιὰ τὴν τεκμηρίωση τῆς ἀλήθειας ὑποδηλώνει καθαρὰ ὑποκειμενικὸ κριτήριο. Ἐξ ἄλλου, ὑπάρχουν μαθηματικὰ θεωρήματα, ποὺ ὄχι μόνο δὲν εἶναι φανερά, ἀλλὰ καὶ ἡ ἀλήθειά των

4. Ι. Θεοδωρακοπούλου, *Εἰσαγωγὴ στὸν Πλάτωνα,* 1970, σελ. 241.

ἀντιβαίνει, πολλὲς φορές, στὸ κοινὸ αἴσθημα τοῦ φανεροῦ. Ὑπάρχουν, ἀκόμη, προτάσεις στὰ Μαθηματικά, ποὺ παρ' ὅλη τὴν ἁπλῆ καὶ εὔκολη στὴν κατανόηση διατύπωσή των, δὲν ἔχουν μέχρι σήμερα ἀποδειχθῆ, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει πὼς δὲν ξεύρομε, οὔτε ἂν ἀληθεύη ἡ ἰσχύς των οὔτε ἂν δὲν ἀληθεύη οὔτε ἂν οἱ προτάσεις αὐτὲς εἶναι κὰν ἀποκρίσιμες. Πῶς εἶναι, λοιπόν, δυνατὸν νὰ εἰποῦμε γιὰ τὶς ἐν λόγῳ προτάσεις, ὅτι εἶναι ἢ δὲν εἶναι ἀφ' ἑαυτῶν φανερές;

5. Σὲ ἀντίθεση μὲ τὸν Leibniz, ὁ I. Kant (1724 - 1804) δέχεται ὅτι τὰ ἀξιώματα καὶ θεωρήματα τῶν Μαθηματικῶν εἶναι, κατὰ τὴν γλῶσσα τοῦ Leibniz, ἀληθεῖς προτάσεις στὸν πραγματικό, ὄχι ὅμως σὲ κάθε δυνατό, κόσμο. Ἀναφορικὰ μὲ τὶς λογικὲς προτάσεις τὶς θεωρεῖ ὁ Kant ὅτι δὲν εἶναι ἔμφυτες στὸν ἄνθρωπο, ὅτι δηλαδὴ ὁ ἄνθρωπος δὲν εἶναι γεννημένος μ' αὐτές, ἀλλ' ὅτι πρέπει νὰ τὶς μαθαίνη ὅπως καὶ τὶς ἐμπειρικὲς προτάσεις. Τὶς ταυτολογικὲς προτάσεις, αὐτὲς ποὺ ἡ ἄρνησή των ὁδηγεῖ σὲ ἀντίφαση, ὁ Kant τὶς χαρακτηρίζει ὡς ἀναλυτικές, καὶ τὶς μὴ ἀναλυτικὲς ὡς συνθετικές. Ἔτσι, τὰ μαθηματικὰ θεωρήματα εἶναι συνθετικὲς προτάσεις. Ἐξ ἄλλου, τὶς συνθετικὲς προτάσεις τὶς διαιρεῖ ὁ Kant σὲ δύο κατηγορίες, στὶς ἐμπειρικὲς ἢ a posteriori καὶ στὶς μὴ ἐμπειρικὲς ἢ a priori. A priori πρόταση εἶναι ἐκείνη, ποὺ γιὰ τὴν τεκμηρίωσή της δὲν εἴμεθα ἀναγκασμένοι νὰ προσφύγωμε στὴν ἐμπειρία, ἐνῶ a posteriori εἶναι ἐκείνη ἡ πρόταση, ποὺ ἡ τεκμηρίωσή της ἀπαιτεῖ τὴν προσφυγὴ στὴν ἐμπειρία. Κάθε, λοιπόν, ἀναλυτικὴ πρόταση εἶναι a priori, καὶ κάθε a posteriori πρόταση εἶναι συνθετική. Γιὰ τὶς μαθηματικὲς προτάσεις ὁ Kant λέγει στὴν «Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου», ὅτι οἱ σημασίες των εἶναι πάντοτε «κρίσεις a priori καὶ ὄχι ἐμπειρικές, γιατὶ ἐνέχουν ἀναγκαιότητα ποὺ ποτὲ δὲν ἠμπορεῖ νὰ συναχθῆ ἀπὸ τὴν ἐμπειρία». Καὶ προσθέτει: «ἂν πολλοὶ ἔχουν ἀντίρρηση σ' αὐτό, εἶμαι πρόθυμος νὰ περιορίσω τὶς προτάσεις μόνο στὰ καθαρὰ Μαθηματικά, ποὺ ἡ οὐσία των φανερώνει, πὼς δὲν περιέχουν ἐμπειρικὴ ἀλλὰ καθαρὴ γνώση a priori» [5].

Ἀλλὰ καὶ τὶς συνθετικὲς a priori προτάσεις τὶς διακρίνει ὁ Kant σὲ ἐνορατικὲς καὶ σὲ μὴ ἐνορατικὲς ἢ προτάσεις γιὰ γενικὲς ἔννοιες, θέτοντας τὰ Μαθηματικὰ στὴν πρώτη κατηγορία. Νά τί λέγει σχετικὰ ὁ Kant στὴν «Λογική» του: «Εἶναι γενικὰ παραδεγμένο, πὼς τὰ Μαθηματικὰ καὶ ἡ Φιλοσοφία διαφέρουν μεταξύ των ἀναφορικὰ μὲ τὸ ἀντικείμενό των, ὅτι δηλαδὴ τὰ πρῶτα πραγματεύονται τὴν ποσότητα καὶ ἡ δεύτερη τὴν ποιότητα. Αὐτὸ εἶναι

5. I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, ἐκδ. Insel-Verlag (1956), σελ. 56 (= Akademische Ausgabe B (1787), σελ. 15 ἑπ.).

ἐσφαλμένο. Ἡ διάκριση ἀνάμεσα στὶς δύο αὐτὲς ἐπιστῆμες δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἀντικείμενό των· ἡ Φιλοσοφία ἀφορᾶ σὲ κάθε τι, ἄρα καὶ στὴν ποσότητα, ὅπως κάνουν ἐν μέρει καὶ τὰ Μαθηματικά, ἐφ' ὅσον κάθε τι ἔχει μέγεθος. Ἐκεῖνο ποὺ συνιστᾶ τὴν εἰδικὴ διάκριση ἀνάμεσα στὶς δύο αὐτὲς ἐπιστῆμες εἶναι, ἀφ' ἑνὸς τὸ διαφορετικὸ σὲ κάθε μία εἶδος τῆς θεωρητικῆς γνώσεως καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐκεῖνο τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ λόγου. Στὴν Φιλοσοφία πρόκειται γιὰ θεωρητικὴ γνώση ἁπλῶς ἐννοιῶν, ἀντίθετα στὰ Μαθηματικὰ πρόκειται γιὰ θεωρητικὴ γνώση, ποὺ ἀσχολεῖται μὲ τὴν κατασκευὴ ἐννοιῶν. Κατασκευάζομε ἔννοιες, ὅταν τὶς παριστάνωμε μὲ τὴν ἐνόραση a priori, δίχως τὴν ἐμπειρία, ἢ ὅταν παριστάνωμε μὲ τὴν ἐνόραση τὸ ἀντικείμενο ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἔννοια ποὺ ἔχομε γι' αὐτό. Στὰ Μαθηματικὰ γίνεται ἄσκηση τοῦ λόγου στὸ συγκεκριμένο, ὅμως ἡ ἐνόραση δὲν εἶναι ἐμπειρικὴ ἀλλὰ τὸ ἀντικείμενο θεωρήσεως εἶναι κάτι τὸ a priori... Ἡ γνώση στὰ Μαθηματικὰ εἶναι ἐνορατική, ἐνῶ στὴν Φιλοσοφία ἀφορᾶ σὲ γενικὲς ἰδέες»[6].

6. Προσδιοριστικὸ ρόλο γιὰ τὴν κατάταξη τῶν μαθηματικῶν προτάσεων στὶς ἐνορατικὰ συνθετικὲς a priori ἔπαιξε, γιὰ τὸν Kant, ἡ καθόλου ἀντίληψή του γιὰ τὰ Μαθηματικά. Καὶ ὅσον ἀφορᾶ στὴν Γεωμετρία, ὁ Kant ἐθεώρει ὅτι αὐτὴ ἀναφέρεται στὴν ἐνόραση τοῦ φυσικοῦ χώρου ὡς Εὐκλειδείου. Οἱ γεωμετρικὲς ἀλήθειες, ποὺ γι' αὐτὸν ἔχουν πραγματικὸ περιεχόμενο, εἶναι ἀναγκαῖες καὶ ἀσφαλεῖς. Ὅσον ἀφορᾶ στὴν Ἀριθμητική, ἐπρέσβευε ὁ Kant, ὅτι αὐτὴ ἀναφέρεται στὴν ἐνόραση τοῦ χρόνου. Ὥστε, οἱ προτάσεις τῶν καθαρῶν Μαθηματικῶν, ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ γεωμετρικὲς καὶ ἀριθμητικὲς προτάσεις, ἀφ' ἑνὸς εἶναι ἐνορατικὰ συνθετικές, καθόσον περιγράφουν τὸν φυσικὸν ἐνορατικὸ χῶρο καὶ τὸν χρόνο, ἀφ' ἑτέρου εἶναι a priori, καθόσον δὲν περιγράφουν γεγονότα τῆς ἐπαισθήσεως, ἀλλὰ μόνον τὰ ἀναλλοίωτα πρότυπά των.

Ἡ ἄποψη τοῦ Kant γιὰ τὶς προτάσεις τῶν ἐφηρμοσμένων Μαθηματικῶν εἶναι, ὅτι αὐτὲς εἶναι προτάσεις συνθετικὲς a posteriori. Εἶναι περίφημη ἡ φράση τοῦ Kant στὴν «Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου»: «Ἐνῶ δὲν ὑπάρχει καμμιὰ ἀμφιβολία, πὼς ὅλη ἡ γνώση μας ἀρχίζει ἀπὸ τὴν ἐμπειρία, ὅμως αὐτὸ δὲν σημαίνει ὅτι καὶ προέρχεται ἀπ' αὐτήν»[7].

7. Ἐνῶ, ὅπως εἴδαμε, ἡ μαθηματικὴ σκέψη πηγάζει κατὰ τὸν Kant ἀπὸ τὴν a priori ἐνόραση τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου, οἱ σύγχρονοι ὀπαδοὶ τῆς καλουμένης Ἐνορατικῆς Σχολῆς ἀπορρίπτουν τὸν a priori χαρακτῆρα τῆς

---

6. I. Kant, *Logik*, εἰς *Kant's Werke* (Hartenstein), 1868, Leipzig, τόμ. 8, σελ. 23 - 24.

7. I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, Einleitung, Teil I.

ἐνοράσεως τοῦ χώρου, δέχονται ὅμως τὴν ἐνόραση τοῦ χρόνου μὲ a priori ἀφετηρία γιὰ τὴ μαθηματικὴ σκέψη. Πρέπει νὰ παρατηρήσωμε, πὼς καὶ οἱ δύο αὐτὲς ἀπόψεις εὑρίσκονται σὲ πλήρη ἀντίθεση πρὸς τὴν Ἀριστοτελικὴ δοξασία, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία τὰ Μαθηματικὰ προκύπτουν ἀπὸ ἀ φ α ί ρ ε σ η, ποὺ πραγματοποιεῖ ὁ νοῦς ἀπὸ ὁρισμένα στοιχεῖα, τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα, καὶ δὲν προκύπτουν ἀπὸ ὁρισμένες a priori ἀντιλήψεις τοῦ νοῦ. Ἂν καί, ἀπὸ τὴν ἄποψη τῆς ἐμφάσεως ποὺ δίδει στὴν πραγματικὴ ὀντότητα τῶν ἀντικειμένων τοῦ ἐπαισθητοῦ, ὁ Ἀριστοτέλης εἶναι, ὅπως θὰ ἐλέγαμε σήμερα, ἐ μ π ε ι ρ ι κ ό ς, ὅμως πρέπει νὰ τονισθῇ πὼς οἱ δοξασίες του γιὰ τὰ Μαθηματικὰ τὸν φέρουν πλησιέστερα πρὸς τοὺς θ ε ω ρ η τ ι κ ο ύ ς.

8. Τὴν πίστη γιὰ τὴν εὕρεση τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας στηρίζει ὁ Kant στὴν ἐνόραση, ἀπ' ὅπου πηγάζει, κατ' αὐτόν, ἡ μαθηματικὴ σκέψη μαζὶ μὲ τὴν Λογικὴ ὡς ὄργανο ἐκείνης. Γιὰ ν' ἀναφερθοῦμε καὶ πάλιν στὴν «Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου»: «Ἡ γνώση μας προέρχεται ἀπὸ δύο βασικὲς πηγές. Ἡ πρώτη συνίσταται στὸ νὰ συλλαμβάνωμε τὶς παραστάσεις, ἡ δεύτερη στὴν δύναμη νὰ γνωρίζωμε τὰ ἀντικείμενα ἀπὸ τὶς παραστάσεις ἐκεῖνες. Μὲ τὴν παράσταση μᾶς δίδεται τὸ ἀντικείμενο, μὲ τὴν δύναμη νὰ γνωρίζωμε τὸ ἀντικείμενο ἀπὸ τὴν παράσταση ν ο ο ῦ μ ε τὸ ἀντικείμενο σχετικὰ μὲ τὴν παράσταση. Ὥστε, ἐνόραση καὶ ἔννοιες ἀποτελοῦν τὰ στοιχεῖα κάθε γνώσεώς μας... Ἡ γνώση μας ἀρχίζει μὲ τὴν ἐποπτεία (ἐνόραση), ἀπὸ αὐτὴ πηγαίνει σὲ ἔννοιες, καὶ καταλήγει σὲ ἰδέες»[8].

9. Εἴδαμε, ὅτι ἡ δοξασία τοῦ Kant γιὰ τὸν ἐνορατικὸ a priori καὶ συνθετικὸ χαρακτῆρα τῶν μαθηματικῶν προτάσεων, ἔχει ὡς βάση τὴν φιλοσοφική του ἀντίληψη γιὰ τὸν χρόνο καὶ τὸν χῶρο. Ἡ δοξασία, ὅμως, ὅτι ὁ χῶρος εἶναι Εὐκλείδειος κατερρίφθη, ἀφ' ὅτου ἐπινοήθηκαν οἱ καλούμενες μὴ Εὐκλείδειες Γεωμετρίες καὶ ἐπεκράτησε στοὺς μαθηματικοὺς ἡ γνώμη, πὼς οὔτε ἡ Εὐκλείδειος οὔτε οἱ μὴ Εὐκλείδειες Γεωμετρίες περιγράφουν τὸν ἐποπτικὸ (ἐνορατικὸ) χῶρο[9]. Ἀκόμη καὶ τὸ ἐπιχείρημα μερικῶν, ὅτι ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία εἶναι ἀπόλυτα ἐνορατικὴ (ὄχι σχετικὰ μὲ κάποια ἄλλη Γεωμετρία), ἐνῶ οἱ μὴ Εὐκλείδειες εἶναι ἐνορατικὲς σχετικὰ μὲ τὴν Εὐκλείδειο, ἀνασκευάσθηκε πλήρως μὲ τὴν κατάδειξη τῆς δυνατότητος μιᾶς ἀπολύτως ἐνορατικῆς ἑρμηνείας τῶν μὴ Εὐκλειδείων Γεωμετριῶν. Παρὰ τὸν κλονισμό, ποὺ ἡ ἐπινόηση τῶν μὴ Εὐκλειδείων Γεωμετριῶν ἐπέφερε στὴν παραδοσιακὴ πίστη γιὰ τὴν ἀναγκαστικὴ ἀλήθεια τῶν νόμων τῆς Εὐκλειδείου καθὼς καὶ στὴν κατάταξη τῶν γεωμετρικῶν προτάσεων στὶς συνθετι-

8. I. Kant, *l. c.*

9. Ἔτσι π. χ. τὸ ὅτι γιὰ τὴν Εὐκλείδειο Γεωμετρία «τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου εἶναι δύο ὀρθές», δὲν εἶναι (ἀπόλυτη) ἀλήθεια ἀφοῦ γιὰ μὴ Εὐκλείδειο Γεωμετρία τὸ ἐν λόγω ἄθροισμα εἶναι διάφορο ἀπὸ δύο ὀρθές.

κὲς a priori, παραμένει ἀναμφισβήτητο γεγονὸς ἡ ἀπὸ φιλοσοφικὴ καὶ μαθηματικὴ ἄποψη ἐξέχουσα σημασία τῆς κατὰ Kant ταξινομήσεως τῶν προτάσεων.

10. Τὴν ἄποψη τοῦ Leibniz, ὅτι τὰ Μαθηματικὰ ὑπάγονται στὴ Λογική, συμμερίσθηκαν ἀργότερα κορυφαῖοι μαθηματικοί, κυρίως οἱ G. Frege (1848 - 1925) καὶ R. Dedekind (1831 - 1916) καὶ στὸν αἰῶνα μας οἱ B. Russell (1872 - 1970) καὶ A. Whitehead (1861 - 1947). Ἐξ ἄλλου, ὁ πολὺς H. Poincaré (1854 - 1913) διετύπωσε ἰδέες παρόμοιες μὲ ἐκεῖνες τοῦ Kant. Γνωστὴ εἶναι ἡ περικοπὴ ἀπὸ τὴν ὁμιλία τοῦ Poincaré στὸ 2ο Διεθνὲς Συνέδριο τῶν Μαθηματικῶν, ποὺ ἔγινε τὸ 1900 στὸ Παρίσι: «Ἂν οἱ μαθηματικὲς προτάσεις ἦσαν ἀναλυτικές, τότε ἡ μαθηματικὴ ἀλήθεια δὲν θὰ ἦταν παρὰ μιὰ ἀπέραντη ταυτολογία. Τὸν δημιουργικό των χαρακτῆρα ὀφείλουν τὰ Μαθηματικὰ κυρίως σὲ μιὰ συνθετικὴ a priori ἀρχή, τὴν μ α θ η μ α τ ι κ ὴ ἢ τ ε λ ε ί α ἐ π α γ ω γ ή»[10]. Ἀργότερα, ὁ Poincaré τροποποίησε τὴν ἄποψή του, σχετικὰ μὲ τὴν συνθετικὴ ὑφὴ τῶν Μαθηματικῶν, μὲ τὴν προσθήκη πὼς ὑπάρχουν καὶ ἄλλες δημιουργικὲς ἀρχὲς στὰ Μαθηματικά, ἀρχὲς τὶς ὁποῖες δὲν κατωνόμασε λεπτομερῶς, στὶς ὁποῖες ὅμως περιελάμβανε ὁπωσδήποτε τὴν ἀ ρ χ ὴ τ ῆ ς ἐ π ι λ ο γ ῆ ς, ποὺ τότε μόλις, τὸ 1904, ἐπινοήθηκε ἀπὸ τὸν E. Zermelo (1871 - 1956). Τὴν τελεία ἐπαγωγὴ παραδέχθηκε ὁ Poincaré ὡς τὴν ἁπλούστερη ἀπὸ ὅλες τὶς συνθετικὲς ἀρχές. Πρέπει ἀκόμη νὰ τονισθῆ, πὼς μὲ τὴ συμπερίληψη τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιλογῆς στὶς συνθετικὲς a priori ἀρχὲς τῶν Μαθηματικῶν, ὁ Poincaré ἂν καὶ βασίζεται στὴν ἐνόραση, ἔρχεται σὲ ἀντίθεση μὲ τὴν σύγχρονη ἐνορατικὴ διδασκαλία, ποῦ ἀκολουθεῖ ἡ καλουμένη Ὁλλανδικὴ Σχολὴ τῶν Ἐνορατικῶν.

11. Οἱ διδασκαλίες τοῦ Πλάτωνος, τοῦ Leibniz καὶ τοῦ Kant ἐχρησίμευσαν ὡς βάση γιὰ τὴν ἀνάπτυξη τῆς συγχρόνου ἐρευνητικῆς κατευθύνσεως πού, στὴν ἀρχή, χαρακτηρίσαμε ὡς ἰδεαλιστική. Σ' αὐτὴ περιλαμβάνομε ἀφ' ἑνὸς τὴν θεωρία τῆς καλουμένης Λ ο γ ι κ ι σ τ ι κ ῆ ς Σχολῆς, μὲ ἀρχηγοὺς τοὺς Russell καὶ Whitehead, καὶ ἀφ' ἑτέρου τὴν θεωρία τῆς Ἐ ν ο ρ α τ ι κ ῆ ς Σ χ ο λ ῆ ς, μὲ ἀρχηγὸ τὸν L. Brouwer (1881 —).

Ἡ Λογικιστικὴ Σχολὴ ἀκολουθεῖ κυρίως τὴν πλατωνικὴ θέση[11] ἀναφορικὰ

---

10. H. P o i n c a r é, *Du rôle de l'intuition et de la logique en Mathematiques*, 1900, C. R. du II. Congr. Intern. des Math., Paris.

11. Πλατωνικὴ θέση (Πλατωνισμὸς) εἰς τὰ Μαθηματικὰ θεωρεῖται ἡ παραδοχὴ τῆς ὑπάρξεως τῶν μαθηματικῶν στοιχείων ἔξω ἀπὸ τὸν σκεπτόμενο νοῦν. Τοῦτο ἀνεξαρτήτως τοῦ ἀκριβοῦς προσδιορισμοῦ τῆς φύσεως τῶν ἰδίων τῶν ἰδεῶν καὶ τῆς σχέσεως τῶν μαθηματικῶν στοιχείων πρὸς αὐτές. Σχετικῶς βλ. καὶ τὸν διάλογον τοῦ Πλάτωνος «Μένων» 80 E κ. ἑ.

μὲ τὸ μαθηματικὸ ὀ ν τ ο λ ο γ ι κ ὸ πρόβλημα, ἐνῶ ἡ Ἐνορατικὴ Σχολὴ ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν θέση τοῦ Kant, ποὺ θεωρεῖ τὴν ἐνόραση ὡς ἀφετηρία τῆς μαθηματικῆς σκέψεως. Τρίτη Σχολή, ἡ Φ ο ρ μ α λ ι σ τ ι κ ή, μὲ ἀρχηγὸ τὸν D. Hilbert (1862 - 1943), ἀνήκει στὴν ἐρευνητικὴ κατεύθυνση, ποὺ στὴν ἀρχὴ ὠνομάσαμε ὀνοματική. Οἱ ἀναφερθεῖσες τρεῖς Σχολὲς διακλαδίζονται καὶ σὲ ἄλλες, πού, ὅμως, τὰ σύνορά των δὲ καθορίζονται μὲ ἀκρίβεια.

Δὲν ἀγνοοῦμε, φυσικά, καὶ τὴν ἐξίσου σημαντικὴ Σχολή, τὴν Ἐ μ π ε ι ρ ι κ ή, ποὺ ξεκίνησεν ἀπὸ τοὺς J. Locke (1632 - 1704), D. Hume (1711 - 1776) καὶ S. Mill (1806 - 1873). Γιὰ τὴν Σχολή, ὅμως, αὐτὴν ἰσχύουν ὅσα στὴν ἀρχὴ εἴπαμε σχετικὰ μὲ τὴν δυνατότητα διατυπώσεως, ἀπὸ τοὺς ἐμπειρικούς, κριτηρίου γιὰ τὴν μαθηματικὴ ἀλήθεια.

12. Ἡ Λογικιστική, κατὰ πρῶτον, Σχολὴ ἐξαρτᾶ τὴν μαθηματικὴ ἀλήθεια ἀπὸ παραδοχές, ποὺ εὑρίσκονται στὴν σφαῖρα τῆς φιλοσοφικῆς Μεταφυσικῆς. Τέτοιες παραδοχὲς ἀφοροῦν κυρίως στὴ λογικιστικὴ θεωρία τῆς ἱ ε ρ α ρ χ ί α ς τ ῶ ν τ ύ π ω ν (τάξεων). Ὁ ἴδιος ὁ Russell, ἐπινοητὴς τῆς ἐν λόγω θεωρίας, ποτὲ δὲν ἦταν τελείως ἱκανοποιημένος ἀπὸ τὴν ὀντολογικὴ ὀρθότητα τῆς ἰδικῆς του διακρίσεως τῶν τύπων (τάξεων), ἂν καὶ ἦταν πεπεισμένος πὼς κάποιο εἶδος ἱεραρχίας ἔπρεπε ἀπαραιτήτως νὰ ὑπάρχη. Μάλιστα, σὲ ἕνα ἀπὸ τὰ τελευταῖα δημοσιεύματά του, ὁ Russell ἦταν ἕτοιμος νὰ παραδεχθῆ πὼς ὁ ὁρισμὸς τῶν τύπων (τάξεων) ἦταν ἐσφαλμένος καθόσον εἶχεν ἀρχικὰ διακρίνει διαφόρους τύπους (τάξεις) ἀπὸ ὀ ν τ ό τ η τ ε ς, ἐνῶ ὤφειλε νὰ εἶχε κάμει τὶς διακρίσεις αὐτὲς μᾶλλον ἀναφορικὰ μὲ τὰ σ ύ μ β ο λ α[12]. Οἱ μεταφυσικὲς παραδοχὲς τῶν Λογικιστῶν δὲν γίνονται παραδεκτὲς ἀπ' ὅσους ἀποκλείουν τὴν ἀναγωγὴ μαθηματικῶν θεωριῶν σὲ καθαρὰ φιλοσοφικὲς ἔννοιες.

Ἀνάλογο μεταφυσικὸ χαρακτῆρα παρουσιάζει καὶ ἡ ἄλλη ἰδεαλιστικὴ κατεύθυνση τῆς Ἐνορατικῆς Σχολῆς. Αὐτὸ τὸ βλέπομε ἀμέσως ἀπὸ τὶς ἰδιότητες ποὺ οἱ Ἐνορατικοὶ ἀποδίδουν στὴν βασική των ἔννοια, ἐκείνην τῆς ἐ ν ο ρ ά σ ε ω ς. Τὴν ἐνόραση τὴν θεωροῦν οἱ ὀπαδοὶ τῆς Ὁλλανδικῆς Σχολῆς ὡς μία κατασκευαστικὴ δραστηριότητα τῆς ἀντιλήψεώς μας. Πιστεύουν, πὼς δὲν ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ ξεχωρίση τὴν δόμηση τῶν Μαθηματικῶν ἀπὸ τὴν δραστηριότητα αὐτὴ τοῦ μαθηματικοῦ νοῦ. Ἐξ ἄλλου, οἱ Ἐνορατικοὶ δὲν ἀποδίδουν στὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα ὁποιαδήποτε «ὕπαρξη», ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴν κατασκευή των ἀπὸ τὴν βασικὴ

---

12. P. S c h i l p p, *The philosophy of Bertrand Russell,* 1944, Evanston and Chicago, σελ. 691 - 692. Βλ. καὶ A. Fraenkel - Y. Bar Hillel, *Foundations of Set Theory,* 1958, North - Holland Publishing Company, Amsterdam.

ἐνόραση. Ἀπὸ τὴν θέση, ὅτι ἡ μαθηματικὴ γνώση εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴν ἐμπειρία καὶ ὅτι τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα τὰ συλλαμβάνει ἄμεσα ὁ σκεπτόμενος νοῦς, δίδουν οἱ Ἐνορατικοὶ τὸ ἰδικό των κριτήριο γιὰ τὴν μαθηματικὴ ἀλήθεια, ποὺ ἔχει χαρακτῆρα a priori. Παραδέχονται πὼς ἡ ἐξωτερικὴ μορφὴ ποὺ μᾶς παρουσιάζουν τὰ Μαθηματικά, καὶ ποὺ γι' αὐτοὺς εἶναι ἡ γ λ ῶ σ σ α, ἐμποδίζει τὴν διείσδυση στὴν οὐσία των, πὼς τὰ Μαθηματικὰ εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν ἐξωτερική των μορφή, τὴν γλῶσσα, ὅπως εἶναι ἀνεξάρτητα καὶ ἀπὸ αὐτὴ τὴ Λογική. Τέλος, ἀποδίδουν οἱ Ἐνορατικοὶ στὴν ἐνόραση τὴν ἰδιότητα, πὼς αὐτὴ εἶναι ἡ ἴ δ ι α γιὰ ὅλους τοὺς μαθηματικούς, πρᾶγμα φυσικὰ ποὺ προϋποθέτει τὴν ἀ ν τ ι κ ε ι μ ε ν ι κ ὴ ὕ π α ρ ξ η τῆς ἐνοράσεως.

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζονται στὸν περίφημο χαρακτηρισμὸ τῶν Μαθηματικῶν ἀπὸ τὸν ἀρχηγὸ τῶν Ἐνορατικῶν: «Τὰ Μαθηματικὰ εἶναι μιὰ ἐ λ ε ύ θ ε ρ η δημιουργία, ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴν ἐμπειρία· αὐτὰ δομοῦνται μόνο ἀπὸ μία ἀρχικὴ a priori ἐνόραση»[13].

13. Βέβαια, ἡ ἐνορατικὴ θεώρηση, ποὺ δέχεται τὴν μαθηματικὴ σκέψη ἐλεύθερη, αὐτόνομη, ὑπακούουσα μόνο σὲ νόμους ποὺ ἔχουν τὴ ρίζα τους στὴν ἴδια τὴν οὐσία της, εὑρίσκεται σὲ διαμετρικὴ ἀντίθεση μὲ τήν, τουλάχιστον μερικῶς, πλατωνικὴ τοποθέτηση τῶν Λογικιστῶν. Καὶ ὅμως, ὁ ἴδιος ὁ Brouwer χρησιμοποιεῖ κάποτε γλῶσσα, ποὺ θὰ ἠμπορούσαμε νὰ ὀνομάσωμε πλατωνική. Αὐτὸ τὸ συναντοῦμε π. χ. στὸν ἰσχυρισμό, πὼς «ὁ ἄνθρωπος ἔχει μιὰ ἰδική του ἔμφυτη ἱκανότητα, ποὺ συνοδεύει ὅλες του τὶς ἀλληλοεπιδράσεις μὲ τὴν Φύση — τὴν ἱκανότητα δηλαδὴ νὰ θεωρῇ τὴν ζωή του κατὰ μαθηματικὸ τρόπο, βλέποντας στὸν κόσμο ἐπαναλήψεις ἀπὸ διαδοχὲς γεγονότων, αἰτιατὰ συστήματα σὲ χρόνο»[14].

Ὁ ὁρισμὸς τώρα ποὺ δίδουν οἱ Ἐνορατικοὶ γιὰ τὴν ἐπιστήμη τῶν Μαθηματικῶν, μὲ τὸ αἴτημα τῆς a priori ἐνοράσεως, καὶ πού, σὲ τελευταία ἀνάλυση, βασίζεται σὲ καθαρὰ μεταφυσικὲς παραδοχές, συνήντησε ἀπὸ μέρους πολλῶν σφοδρὰ πολεμική.

Συγκεφαλαιώνοντας, βλέπομε ὅτι βασικὸ στοιχεῖο τόσο γιὰ τοὺς Ἐνορατικοὺς ὅσο καὶ τοὺς Λογικιστάς, εἶναι ἡ φύση γιὰ τὴν ὕπαρξη τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων. Ἡ ὕπαρξη αὐτὴ εἰσάγεται μὲ ἕνα α ἴ τ η μ α. Ὅσο καὶ ἂν τὸ αἴτημα αὐτὸ δὲν εἶναι καθόλου παράλογο, οὔτε στερεῖται νοήματος, ὅμως δὲν γίνεται ἀπ' ὅλους παραδεκτό, ἀκριβῶς λόγω τοῦ μεταφυσικοῦ του χαρακτῆρος.

---

13. L. B r o u w e r, *Over de grondslagen der Wiskunde*, 1907, Amsterdam - Leipzig, σελ. 179.

14. L. B r o u w e r, *l. c.* σελ. 81.

14. Ἡ ἰδέα γιὰ τὴν ἀποφυγὴ κάθε μεταφυσικῆς ἐννοίας στὰ Μαθηματικὰ ἀκολουθήθηκε μὲ σύστημα στὴν τελευταία προπολεμικὴ περίοδο ἀπὸ τοὺς ἐρευνητὰς τοῦ καλουμένου Κύκλου τῆς Βιέννης. Μεταξὺ τῶν ἐν λόγῳ ἐρευνητῶν ἀναφέρομε μερικοὺς ἀπὸ τοὺς πιὸ γνωστούς: τὸν R. Carnap, τὸν L. Wit tgenstein (1861 - 1947) καὶ τὸν K. Popper.

Στὰ συμπεράσματα τῶν ἐν λόγῳ ἐρευνητῶν ἀσκήθηκε μερικῶς αὐστηρὰ κριτικὴ καὶ οἱ σχετικὲς συζητήσεις συνεχίζονται. Ἂς ἀναφέρωμε ἐδῶ τὴν ἄποψη τοῦ K. Popper, σχετικὰ μὲ τὴν προσπάθεια καθορισμοῦ μιᾶς ἀπόλυτης ἀλήθειας, ποὺ διατυπώνεται στὸ βιβλίο του «Λογικὴ τῆς Ἐρεύνης» (Logik der Forschung), βιβλίο ποὺ ἐξεδόθη στὴν Βιέννη τὸ 1935. «Ἡ ἐπιστήμη μας δὲν εἶναι σύστημα ἀπὸ ἀσφαλεῖς προτάσεις οὔτε σύστημα, ποὺ μὲ συνεχῆ πρόοδο, τείνει σὲ μιὰ τελειωτικὴ κατάσταση. Ἡ ἐπιστήμη δὲν εἶναι γνώση· δὲν ἠμπορεῖ νὰ φθάσῃ, οὔτε σὲ ἀλήθειες οὔτε κἂν σὲ πιθανότητες. Τὸ παλαιὸ ἰδεῶδες τῆς ἐπιστήμης, ἡ ἀπόλυτα ἑδραιωμένη γνώση, καταδείχθηκε ἀπατηλὸ εἴδωλο. Τὸ αἴτημα γιὰ ἐπιστημονικὴ ἀντικειμενικότητα δὲν ὁδηγεῖ παρὰ στὸ νὰ θεωρῆται προσωρινὴ κάθε ἐπιστημονικὴ πρόταση»[15].

15. Ἀπομένει νὰ ἐξετασθῇ ἡ Φορμαλιστικὴ ἄποψη, ποὺ ἡ μεθοδολογική της ἔκθεση ἔχει σὲ συντομία ὡς ἑξῆς: Τὰ Μαθηματικὰ ἠμποροῦν ν' ἀναχθοῦν σ' ἕνα σύστημα ἀπὸ τύπους μὲ σύμβολα καὶ ἀπὸ κανόνες γιὰ τὴν παραγωγὴ τῶν τύπων ἀπὸ σύστημα ἀξιωμάτων. Στὸ σύστημα αὐτὸ ἀπὸ τύπους, ὅπου γίνεται ἀφαίρεση ἀπὸ τὴν σημασία των, ἀσκοῦμε μαθηματικὴ ἔρευνα, ποὺ ὀνομάζομε θεωρία τῶν ἀποδείξεων ἢ Μεταμαθηματικά.

Ὁ ἡγέτης τῆς Φορμαλιστικῆς Σχολῆς συμμερίζεται τὴν γνώμη τῶν Ἐνορατικῶν, ὅτι δηλαδὴ μερικοὶ τύποι τῶν τυποποιημένων Μαθηματικῶν, δὲν δέχονται κατὰ κανένα τρόπο ἐνορατικὴ ἑρμηνεία. Πρόκειται γιὰ τύπους ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ καλούμενα ἀπὸ τὸν Hilbert ἰδεατὰ στοιχεῖα. Ἡ ἀπόκλιση τῶν Ἐνορατικῶν συνίσταται ἀκριβῶς στὸ γεγονός, ὅτι αὐτοὶ ἀποκλείουν ἐντελῶς τέτοια ἰδεατὰ στοιχεῖα.

Ὅπως βλέπομε, μὲ τὴν φορμαλιστικὴ μέθοδο ὁ ρόλος τῶν Μαθηματικῶν περιορίζεται σ' ἐκεῖνον ἑνὸς ἁπλοῦ παιχνιδιοῦ μὲ σύμβολα, ποὺ ἠμπορεῖ πολὺ καλὰ νὰ παρομοιασθῇ μὲ τὸ παιχνίδι τοῦ σκακιοῦ. Κατὰ τὸν Hilbert «τὸ παιχνίδι αὐτὸ ἔχει, μαζὶ μὲ μιὰ μαθηματικὴ ἀξία, καὶ ἀξιόλογη

15. K. Popper, *Logik der Forschung*, 1935. *Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung*, ἔκδοσις M. Schlick, Wien.

σημασία ἀπὸ φιλοσοφικὴ σκοπιά. Ὁ λόγος εἶναι, πὼς ἐκτελεῖται σύμφωνα μὲ καθορισμένους κανόνες — κανόνες ποὺ ἐκφράζουν τὴν τεχνικὴ τῆς σκέψεως»[16].

Εἶναι φανερό, πὼς καὶ μὲ τὴν φορμαλιστικὴ ἄποψη προσφεύγει κανεὶς στὴν ἐνόραση. Αὐτὸ συμβαίνει κατὰ τὴν μεταμαθηματικὴ ἔρευνα. Πρέπει, ὅμως, νὰ παρατηρηθῆ ὅτι ἐδῶ πρόκειται γιὰ ἐνόραση βασικῆς σημασίας ὄχι μόνο στὰ Μαθηματικὰ ἀλλὰ καὶ σὲ κάθε θεωρητικὴ ἔρευνα, ἐνόραση ποὺ ἀφορᾶ σὲ πεπερασμένο πλῆθος ἀπὸ στοιχειώδεις λογικὲς καὶ μαθηματικὲς σχέσεις.

Γιὰ τὴν φορμαλιστικὴ προσπέλαση ἡ μαθηματικὴ ὕπαρξη, καὶ μ' αὐτὴν ἡ μαθηματικὴ ἀλήθεια, γίνονται ταυτόσημοι μὲ τὴν παραγωγὴ ἀπὸ διδόμενο σύστημα ἀξιωμάτων. Εὔκολα ἀναγνωρίζει κανεὶς τὴν στενὴ συγγένεια ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῆς φορμαλιστικῆς ἀπόψεως καὶ ἐκείνης ποὺ εἶναι γνωστή, ἀπὸ τὴν Λογικὴ καὶ ἀπὸ τὴν Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν, μὲ τὸ ὄνομα τῆς ὀνοματικῆς. Ἀπὸ τὴν θέση καὶ τῶν δύο μικρὴ εἶναι ἡ ἀπόσταση πρὸς τὴν Φιλοσοφία τοῦ Als ob (Ὡς ἐάν), ποὺ πρωτοεισήγαγε ὁ H. Vaihinger (1852 - 1933).

16. Γιὰ νὰ εἶναι ἐπιτρεπτὸς ὁ ἀπόλυτος ὁρισμὸς τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας, ὅπως τὸν δέχονται οἱ φορμαλισταὶ — «ἀληθὲς εἶναι ὅ,τι συνάγεται παραγωγικὰ ἀπὸ ἕνα σύστημα ἀξιωμάτων γιὰ ὅλα τὰ Μαθηματικά» —, θὰ πρέπει κάθε ἀληθὴς πρόταση νὰ συνάγεται ἀπὸ τὰ ἐν λόγῳ ἀξιώματα, ὅμως νὰ μὴ συνάγεται μαζὶ μὲ μιὰ πρόταση καὶ ἡ ἄρνησή της. Ἀλλιῶς, θὰ ὑπῆρχαν προτάσεις ποὺ ἡ ἀλήθειά των δὲν θὰ ὡρίζετο καὶ προτάσεις ποὺ θὰ ἀλήθευαν μαζὶ μὲ τὴν ἄρνησή των. Ἔτσι, βασικὸ πρόβλημα γιὰ τὴν τυποποίηση καὶ ἀξιωματικοποίηση ὁλοκλήρου τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης — πρόβλημα ποὺ ἀνήκει στὰ Μαθηματικὰ — εἶναι ἡ ἀπόδειξη τῆς πληρότητος καὶ τῆς συμβιβαστότητος τῶν ἀξιωμάτων τῆς ἐν λόγῳ ἐπιστήμης[17].

Ὁ Hilbert ἦταν πεπεισμένος γιὰ τὴν δυνατότητα δομήσεως ὁλοκλήρου τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης μὲ βάση ἕνα σύστημα ἀπὸ ἀξιώματα πλήρη καὶ συμβιβαστὰ καὶ σύμφωνα μὲ τὴν «πεπερασμένη ἄποψή του» (finite Einstellung) γιὰ τὰ Μεταμαθηματικά. Αὐτό, ὅμως, καταδείχθηκε ἀβάσιμο ἀπὸ τὸν K. Goedel, τὸ 1931, γιατὶ σὲ λογικοαριθμητικὰ συστήματα οἱ ἰδιότητες τῆς πληρότητος καὶ συμβιβαστότητος εἶναι μεταξύ των ἀντιφατικές. Ὥστε, ὁ ἰσχυρισμὸς τῶν

---

16. D. Hilbert, *Die Grundlagen der Mathematik*, 1930. Περιλαμβάνεται στὸ βιβλίο τοῦ ἰδίου *Grundlagen der Geometrie*, 7η ἐκδ. Leipzig - Berlin.

17. Φ. Βασιλείου, *Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν*, 1971 2α ἐκδ., Ἀθῆναι.

φορμαλιστῶν ὅτι τὰ Μαθηματικὰ εἶναι ἀπηλλαγμένα ἀπὸ ἐσωτερικὲς ἀντιφάσεις, δὲν ἔγινε δυνατὸν νὰ ἐπαληθευθῆ. Ἔτσι ἔγινε ἀνέφικτος καὶ ὁ ἀπόλυτος ὁρισμὸς γιὰ τὴν μαθηματικὴ ἀλήθεια.

17. Μὲ πολὺ δυσταγμὸ πρέπει, ἐξ ἄλλου, νὰ γίνη ἀποδεκτὴ μία πλέον πρόσφατη ἔρευνα γιὰ τὴν μαθηματικὴ ἀλήθεια ἀπὸ τὸν H. Curry, καθηγητὴ στὸ State College τῆς Πενσυλβανίας στὶς Ἡνωμένες Πολιτεῖες[18]. Ἂς σημειωθῆ, πὼς οἱ ἀρχικὲς ἀπόψεις τοῦ Curry ἔχουν ὑποστῆ πολλὲς μεταβολές, ὅπως μεταβολὲς ὑπέστη καὶ ἡ ὁρολογία του. Αὐτὸ κατέστησε τὸ περιεχόμενο τῶν σχετικῶν ἐργασιῶν του ἀρκετὰ σκοτεινό. Βέβαιο εἶναι, πὼς ἡ φιλοσοφία τοῦ Curry γιὰ τὰ Μαθηματικὰ συγγενεύει στενὰ μὲ τὴν ἀντίστοιχη φιλοσοφία τοῦ R. Carnap, ἄλλοτε μέλους τοῦ Κύκλου τῆς Βιέννης καὶ τελευταῖα καθηγητοῦ στὶς Ἡνωμένες Πολιτεῖες (Cambridge, Mass.).

Κατὰ τὸν Curry, ἡ οὐσία τῶν Μαθηματικῶν, ποὺ εἶναι ἡ ἐπιστήμη τῶν φορμαλιστικῶν συστημάτων, δὲν πρέπει νὰ ζητηθῆ μέσα σὲ ὁποιοδήποτε φορμαλιστικὸ σύστημα, ἀλλὰ στὴν φορμαλιστικὴ δομή των καθ' ἑαυτή. Ἀντίθετα ἀπ' ὅ,τι δέχονται οἱ Ἐνορατικοί, προτάσεις ποὺ διατυπώνονται ἀπὸ μὴ κατασκευαστικοὺς τρόπους, δὲν πρέπει ν' ἀπορρίπτωνται σὰν νὰ ἐστεροῦντο νοήματος. Τὴν ἄποψή του, ὀνομάζει ὁ Curry ἐμπειρικὸ φορμαλισμό, γιὰ νὰ τὸν διακρίνη ἀπὸ τὸν φορμαλισμὸ τοῦ Hilbert. Ὅμως, ἡ ὀνομασία πραγματολογικὸς φορμαλισμός, θὰ ἦταν ἴσως πιὸ κατάλληλη[19].

Ἐκεῖνο ποὺ ἠμποροῦμε, ὡς συμπέρασμα, νὰ διατυπώσωμε γιὰ τὴν θεωρία τοῦ Curry, εἶναι ὅτι ὁ ἐμπειρικὸς φορμαλισμός του δὲν φαίνεται ν' ἀπέχη πολὺ ἀπὸ τὸν πλατωνισμὸ τοῦ Goedel[20]— πλατωνισμὸς πού, πρέπει νὰ σημειώσωμε, χρησίμευσε στὸν τελευταῖο στὸ νὰ ἀποδείξη, πὼς τὸ φορμαλιστικὸ πρόγραμμα τοῦ Hilbert, τουλάχιστο στὴν ἀρχική του μορφή, ἦταν ἀνέφικτο.

18. Τελειώνομε μὲ τὴν ἄποψη ποὺ ὁ H. Weyl (1885 - 1950) διετύπωσε στὸ ἔργο του «Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν» — δημοσιεύθηκε στὸ «Ἐγχειρίδιο τῆς Φιλοσοφίας» (Μόναχον - Βερολῖνο, 1927)[21], καὶ ποὺ παρακάμπτει ὁλότελα τὸ πρόβλημα τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας. Κατὰ

---

18. H. Curry, *Outlines of a formalist Philosophy of Mathematics,* 1970, North - Holland Publishing Company, Amsterdam - London.

19. A. Fraenkel - Y. Bar Hillel, *Foundations of Set theory,* 1958, North - Holland Publ. Co σελ. 342.

20. l. c. σελ. 346.

21. H. Weyl, *Philosophie der Mathematik und der Naturwissenschaften,* 1927, Muenchen - Berlin, σελ. 16.

Weyl «τὰ Μαθηματικὰ εἶναι μιὰ γενικὴ ὑποθετικο-παραγωγικὴ θεωρία», ἄποψη ποὺ μὲ διάφορο τρόπο εἶχαν καὶ ἄλλοι, ἐνωρίτερα, διατυπώσει.

19. Τὸ τελικὸ συμπέρασμα τῆς κριτικῆς ἐπισκοπήσεώς μας, θὰ ἠμπορούσαμε νὰ τὸ ἐκφράσωμε μὲ τὰ λόγια : Κάθε φορά, ποὺ οἱ ἐρευνηταὶ προσπάθησαν ν' ἀποξενώσουν τὰ Μαθηματικὰ ἀπὸ τὴν Φιλοσοφία, ἀστόχησαν. Ὡς φαίνεται, βασικὲς ἔννοιες στὰ Μαθηματικά, ὅπως ἐκείνη γιὰ τὴν μαθηματικὴ ἀλήθεια, εἶναι ἔννοιες φιλοσοφικῆς μᾶλλον παρὰ μαθηματικῆς ὑφῆς. Τέλος, ἀνυπέρβλητες εἶναι οἱ δυσχέρειες ποὺ παρουσιάζονται κάθε φορά, ἐκεῖ ὅπου ὁ νοῦς τείνει νὰ φθάση πέραν ἀπὸ τὰ φυσικά του ὅρια [22].

Τὴν ἀλήθεια τοῦ τελευταίου μᾶς θυμίζει, κατὰ τὸν πιὸ παραστατικὸ τρόπο, τὸ ἀνέκδοτο γιὰ τὴν ὀργὴ τοῦ Beethoven πρὸς τὸ «ἄθλιο βιολί», στὴν προσπάθεια τοῦ Beethoven νὰ ξεπεράση μὲ τὴ σύνθεση τὶς δυνατότητες τοῦ μουσικοῦ αὐτοῦ ὀργάνου [23].

*

Ὁμιλῶν ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἀνακοινώσεως τοῦ κ. Φίλωνος Βασιλείου, ὁ πρόεδρος κ. **Γρηγ. Κασιμάτης,** λέγει τὰ ἑξῆς :

«Βαθεῖα, ἐμπεριστατωμένη καὶ δυσχερὴς εἶναι ἡ ἀνάλυσις εἰς τὴν ὁποίαν προέβη τῆς ἐξελίξεως τῆς ἐννοίας τῆς μαθηματικῆς ἀληθείας, ὁ ἀγαπητὸς συνάδελφος κ. Βασιλείου.

Νομίζω ὅτι ἡ συζήτησις ποὺ θὰ ἐπακολουθήσῃ θὰ εἶναι διαφωτιστική. Εἰς τὸν Πρόεδρον ἀνοίγοντα τὴν συζήτησιν, ἂς ἐπιτραποῦν ὀλίγοι μόνον νυγμοί.

Δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ εἰσέλθωμεν εἰς τὴν συζήτησιν τοῦ θέματος, περιλαλήτου καὶ πολυπλάγκτου, ἂν εἶναι χωρισταὶ ἔννοιαι τὰ Μαθηματικὰ καὶ ἡ Λογική, διὰ νὰ διαισθανθῶμεν, ἔστω καὶ μὲ τὴν ἐνόρασιν περὶ τῆς ὁποίας ὡμίλησεν ὁ φίλος συνάδελφος, ὅτι ἡ μαθηματικὴ ἀλήθεια, εἶναι αὐτὸ τοῦτο ἡ ἀλήθεια ὥς γενικὴ ἔννοια. Διότι κάθε ἀλήθεια ἔχει ὀντολογικὸν θεμέλιον. Στηρίζεται δηλαδὴ εἰς τὰ ὄντα, τὰ πράγματα. Ἤδη ὅμως ἀπὸ τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀρχίζουν αἱ διαφωνίαι. Ξεκινᾶ ἀπὸ τὸν νοῦν ἢ τὸν λόγον ἡ ἀλήθεια καὶ συντίθεται μὲ τὸ ὄν ;

---

22. Ι. Θεοδωρακοπούλου, *Τὸ πρόβλημα τῆς Μεταφυσικῆς,* εἰς τὴν Ἐπετηρίδα τοῦ Κέντρου Ἐρεύνης τῆς Ἑλληνικῆς Φιλοσοφίας *«Φιλοσοφία»,* Ἀθῆναι 1 (1971), 7 - 25. Πρβλ. εἰς σελ. 15, ὅπου ἡ παρατήρηση τοῦ Kant : *Μεταφυσικὴ εἶναι ἡ ἐπιστήμη τῶν ὁρίων τοῦ ἀνθρωπίνου νοῦ.*

23. E. Beth, *Mathematical Thought,* 1965, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht - Holland, σελ. 192.

Ἢ ξεκινᾶ ἀπὸ τὸ ὂν καὶ συντίθεται μὲ τὸν λόγον - νοῦν ; Καὶ ἡ συζήτησις ἤρχισε ἀπὸ τὸν μεσαίωνα.

Adequatio rei et intellectus
ἢ Adequatio intellectus cum re
ἢ Adequatio rei cum intellectus?

Ὅλη ὅμως ἡ συζήτησις ἐνθυμίζει ὀλίγον τὸ ἐρώτημα τοῦ Πιλάτου πρὸς τὸ Σωτῆρα :

Τί ἐστὶν Ἀλήθεια ;

Καὶ τὴν σιωπὴν τοῦ Χριστοῦ...

Πράγματι, ἂν ἀφίσωμεν τὸν κόσμον τοῦ πνεύματος, ἡ ἀλήθεια εἶναι εἰς τὴν πρακτικὴν ζωὴν τὸ πλέον ἀμφιβαλλόμενον πρᾶγμα.

Καθένας ἔχει τὴν ἀλήθειάν του, κατὰ τὸ γαλλικὸν λόγιον. Διὰ τοῦτο λέγομεν συνήθως ὅτι ὑπάρχει Ἀλήθεια μὲ κεφαλαῖον Α καὶ ἀλήθεια μὲ μικρόν. Καὶ εἰς ἄρσιν τοῦ ἀδιεξόδου κατατείνουν ὅλαι αἱ διακρίσεις ποὺ ἐδημιούργησε ἡ φιλοσοφικὴ σκέψις. Καὶ ἰδίως ἡ διάκρισις μεταξὺ τυπικῆς ἀληθείας ποὺ στηρίζεται εἰς τὴν συνέπειαν τῆς σκέψεως πρὸς ἑαυτήν, εἰς τὴν ἀνυπαρξίαν ἀντιφάσεων καὶ ὑλικῆς ἀληθείας ὅπου ἡ σκέψις στηρίζεται εἰς πραγματικὸν ἔξωθεν δεδομένον, ὑλικὸν ἢ πνευματικὸν ἢ ψυχικόν. Ἐξέλιξις τῆς ὑλικῆς ἀληθείας εἶναι ἡ πραγματιστικὴ ἀλήθεια ποὺ στηρίζεται εἰς τὴν πρᾶξιν, ἐπιτρέπουσαν εἰς τὸν ἄνθρωπον νὰ πραγματοποιήσῃ τὸν σκοπόν του ὡς ἀνθρώπου. Ὁ James ὁ πατὴρ τοῦ πραγματισμοῦ ἔλεγε: «Ἡ ἀλήθεια μιᾶς ἰδέας προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἱκανοποίησιν ποὺ προκαλεῖ». Καὶ ὁ St. Exupery : «Ἡ ἀλήθεια γιὰ τὸν ἄνθρωπον εἶναι ὅ,τι τὸν κάμνει ἄνθρωπον». Βυθιζόμεθα ἔτσι, ἔτι μᾶλλον εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ θολοῦ. Αὐτῆς τῆς θολότητος ἀποκορύφωσιν ἀποτελεῖ ἡ μαρξιανὴ ἄποψις περὶ ἀληθείας ὡς συναρτήσεως τῶν ἀναγκῶν τῆς πράξεως. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπαρξική, ποῦ θεωρεῖ τὴν ἀλήθειαν ὑποκειμενικήν, σχετικήν, πολυμερῆ καὶ ἱστορικήν. «Ἡ ἀλήθεια, λέγει ὁ Kirkegaard, δὲν ὑπάρχει διὰ τὸ ἄτομον παρὰ μόνον καθόσον τὴν δημιουργεῖ διὰ τῆς δράσεώς του».

Ἐνδιαφέρον εἶναι τὸ συμπέρασμα τοῦ φίλου συναδέλφου. Τὰ Μαθηματικὰ εἶναι στὶς ἐξειλιγμένες, τὶς μὴ ἐφηρμοσμένες πτυχές τους, φιλοσοφία. Καὶ ἂν ὅμως τοῦτο δὲν εἶναι ἀπολύτως ἀσφαλές, εἶναι ὅμως βέβαιον ὅτι ἡ μαθηματικὴ σκέψις ὁδηγεῖ εἰς τὴν φιλοσοφίαν. Εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτήν. Τὸ πρόβλημα εἶναι ἂν εἶναι τὰ Μαθηματικὰ φιλοσοφία ἢ ἂν ὑπάρχῃ μία φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν. Καὶ τὰ δύο, ἴσως ἔχουν πτυχὰς ἀληθείας.

Καὶ περαιτέρω, ὅταν οἱ νόμοι τῆς Φυσικῆς ἀνατρέπωνται, ὅταν ὁ Rey ὑποστηρίζῃ ὀρθῶς καὶ δὲν ὑπάρχουν πλέον νόμοι, ἀλλὰ πιθανότητες, πῶς θὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόλυτος ἀλήθεια, χωρὶς ἀπόλυτον ἀφαίρεσιν ; Ἀλλ' εἰς τί ὠφελεῖ ἡ ἀπόλυτος ἀφαίρεσις ; Ἄλλως τε εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς φιλοσοφικῆς πράξεως περιέχεται τὸ ἀπόλυτον. Τὰ φιλοσοφικὰ συστήματα — κάθε φιλοσοφικὸν σύστημα — εἶναι δυσκολοσυμβίβαστα μὲ τὸν συγκρητισμόν. Καὶ ἡ σύγχρονος ζωὴ — καὶ ἡ παλαιά, ἡ αἰωνία — εἶναι ἀτελείωτος σειρὰ συγκρητισμῶν, ἀναλύσεων καὶ συνθέσεων».

SUMMARY

It is well known, that the investigation of the mathematical truth constitutes a basic problem for the Philosophy of Mathematics.

Unlike empirical science, where, in accordance to their results with the observations of the outer world or the experiment, defines the truth of these results, in Mathematics such a consideration of the concept of the truth cannot be acceptable.

Among other things, in Mathematics the use of such concepts as infinity — which has no realization in the nature — excludes at the beginning the possibility to rest on the empirical evidence in order to have a sufficient criterion concerning the definition of mathematical truth.

Besides realism - which cannot come under consideration, owing to the above mentioned effect- the scientists in Mathematics, in their research, are following three main Scholos: Logicism, Intuitionism and Formalism. The firstt wo Schools may be caracterised as Idealistic in the sense that in them mathematical objects are correlated to mental beings, though the third one is simple Nominalistic.

In this paper a short exposition of the approach of the problem of mathematical truth is given for each of the last three scientific directions.

As is already known, Logicism and Intuitinism depend on the definition of mathematical truth from considerations which are metaphysical (ontological) in nature.

As regards to Formalism, H. Curry, in his book: «Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics», starting from the definition that

Mathematics is the science of formal systems, is trying to give a definition for the mathematical truth which is independent of any except the most rudimentary philosophical hypotheses. His aspect is called Empirical Formalism.

In this paper the task is undertaken to expose that, as a matter of fact, even Curry's theory uses a kind of Platonism. So, ontological considerations are not altogether excluded in Curry's very interesting theory.