ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— **Sur les surfaces - W isothermiques à lignes de courbure sphériques dans les deux systèmes,** *par Othon Pylarinos* *.

Les surfaces - W isothermiques réelles de E^3 — c. - à - d. les surfaces réelles de WEINGARTEN de l'espace euclidien tridimensionnel à lignes de courbure isothermes — peuvent être classées en quatre catégories: a. Les surfaces de révolution, qui sont toutes isothermiques [4, p. 83], b. Les surfaces à courbure moyenne constante, qui toutes aussi sont isothermiques [4, p. 87], c. les cônes et les cylindres qui sont les seules surfaces isothermiques à courbure totale constante [5, p. 184] et d. les surfaces de cette espèce qui n'appartiennent à aucune des trois catégories précédentes et qui, dans ce qui suit, sont appelées, pour abréger, *surfaces - Ws.*

La catégorie b, d'après un théorème du à M. ÖZBEK [5, p. 95], ne contient pas de surfaces dont toutes les lignes de courbure sont sphériques et il en est de même pour la catégorie c, les génératrices rectilignes des cônes et des cylindres étant, comme l'on sait, des lignes de courbure de ces surfaces. Au contraire il y a de telles surfaces appartenant à la catégorie a : les surfaces de révolution dont les méridiens sont des cercles. Dans le présent article nous montrons que ces surfaces de révolution sont les seules surfaces -W isothermiques à lignes de courbure sphériques dans les deux systèmes. À cet effet dans la première partie nous donnons certains théorèmes concernant les surfaces de la catégorie d à lignes de courbure sphériques dans l'un système et dans la seconde partie nous montrons que même la catégorie d ne contient pas de surfaces dont toutes les lignes de courbure jouissent de la propriété indiquée.

I

1. Soit S une surface -Ws dépourvue de points singuliers.

Si on réfère S aux paramètres isothermes u, v correspondant au réseau (isotherme) de ses lignes de courbure et qu'on désigne par E, F, G ;

---

* Ο. ΠΥΛΑΡΙΝΟΥ, Περὶ τῶν ἰσοθερμικῶν ἐπιφανειῶν -W, τῶν ὁποίων αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος ἀμφοτέρων τῶν οἰκογενειῶν εἶναι καμπύλαι σφαιρικαί.

E_1, F_1, G_1, les coefficients des éléments linéaires de S référée à ces paramètres et de sa représentation sphérique, on aura

$$(1, 1) \qquad E = G \equiv \lambda^2, \quad F \equiv 0,$$

$$(1, 2) \qquad E_1 = Ek_1^2 = \frac{\lambda^2}{\varrho_1^2}, \quad F_1 \equiv 0, \quad G_1 = Gk_2^2 = \frac{\lambda^2}{\varrho_2^2},$$

où $k_1 = \frac{1}{\varrho_1}$, $k_2 = \frac{1}{\varrho_2}$ sont les courbures principales de la surface.

La courbure moyenne $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ de S est une fonction de la seule variable

$$(1, 3) \qquad w = \sigma_1 + \sigma_2$$

où σ_1, σ_2 sont des fonctions de u et de v respectivement [7, p. 40] et il en est de même, la surface étant une surface-Ws, pour sa courbure totale $K = k_1 k_2$. Par conséquent les courbures principales $k_1\, k_2$ de S sont aussi des fonctions de la seule variable w ; ces deux fonctions doivent vérifier [7, p. 40] l'équation différentielle

$$(1, 4) \qquad \frac{dk_1}{dw} + \frac{dk_2}{dw} \equiv 2\frac{dH}{dw} = k_1 - k_2$$

et de là on déduit aussitôt la relation

$$(1, 5) \qquad K = H^2 - \left(\frac{dH}{dw}\right)^2.$$

Par ailleurs le coefficient λ^2 qui figure dans les formules (1, 1) et (1, 2) est une fonction des u, v de la forme [7, p. 40] :

$$(1, 6) \qquad \lambda^2 = \frac{ce^{\sigma_1 - \sigma_2}}{\frac{dH}{dw}}$$

où c est une constante $\neq 0$, qui doit vérifier avec les courbures principales $k_1(w)$, $k_2(w)$ l'équation de Gauss et les deux équations de Codazzi. D'après la supposition faite pour les paramètres u, v la première de ces équations peut se mettre sous la forme [9, p. 117] :

$$-2k_1k_2 = -2K = \frac{1}{\lambda^2}\left\{\frac{\partial^2 \log\lambda^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda^2}{\partial v^2}\right\}$$

et, grâce à (1, 6) peut s'écrire

$$(1,7)\qquad e^{\sigma_1-\sigma_2} = A\frac{d^2\sigma_1}{du^2} + B\frac{d^2\sigma_2}{dv^2} + C\left\{\left(\frac{d\sigma_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\sigma_2}{dv}\right)^2\right\},$$

où

$$(1,8)\quad A = \frac{\dot H}{2cK}\left\{\frac{\ddot H}{\dot H} - 1\right\},\quad B = \frac{\dot H}{2cK}\left\{\frac{\ddot H}{\dot H} + 1\right\},\quad C = \frac{\dot H}{2cK}\left\{\frac{\ddot H}{\dot H}\right\}^{**},$$

tandis que les deux dernières prennent la forme [1, p. 526] :

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{\lambda}{\varrho_1}\right) = \frac{1}{\varrho_2-\varrho_1}\frac{\partial\varrho_1}{\partial v},\qquad \frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{\lambda}{\varrho_2}\right) = \frac{1}{\varrho_1-\varrho_2}\frac{\partial\varrho_2}{\partial u}$$

et à l'aide de (1, 6), eu égard en même temps au fait que k_1, k_2 sont des fonctions de la seule variable $w = \sigma_1 + \sigma_2$ et qu'en outre les dérivées $\frac{d\sigma_1}{du}$, $\frac{d\sigma_2}{dv}$ ne peuvent pas s'annuler identiquement [7, p. 41], elles déviennent

$$(1,9)\qquad \frac{\dot k_1}{k_1-k_2} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\ddot H}{\dot H}\right\},\qquad \frac{\dot k_2}{k_1-k_2} = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\ddot H}{\dot H}\right\}.$$

Ces deux équations montrent, si l'on tient compte des valeurs (1, 8) des coefficients A, B, C qui figurent dans l'équation (1, 7) et du fait que ces coefficients ne peuvent pas s'annuler identiquement [7, p. 41], qu'on doit avoir

$$(1,10)\qquad \dot k_1 \neq 0,\qquad \dot k_2 \neq 0.$$

2. Supposons maintenant que *les lignes de courbure* $v = Cte$ *de la surface-Ws considérée soient sphériques.*

Dans ce cas la courbure principale $k_1 = \frac{1}{\varrho_1}$ de la surface S et les coefficients E_1, G_1 de l'élément linéaire de sa représentation sphérique sont des fonctions des u, v vérifiant une équation de la forme [1, p. 527] :

$$(2,1)\qquad \varrho_1 = \frac{\Phi_1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial\log\sqrt{E_1}}{\partial v} + \Phi_2,$$

où Φ_1, Φ_2 sont des fonctions de la seule variable v.

L'équation (2, 1), si on y remplace E_1, G_1 par leurs valeurs (1, 2) et qu'on tienne compte de (1, 6), peut s'écrire

** Les points désignent les dérivées par rapport à la variable $w = \sigma_1 + \sigma_2$.

$$(2,\,2)\qquad \varrho_1(w) = \Phi_1(v)\,\frac{d\sigma_2}{dv}\,e^{\sigma_2}F(w) + \Phi_2(v)$$

où

$$(2,\,3)\qquad F(w) = \frac{\sqrt{\dot{H}}}{\sqrt{c}\,k_2}\left\{\frac{\dot{k}_1}{k_1} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ddot{H}}{\dot{H}}\right)\right\}e^{-\frac{w}{2}}$$

est une fonction de la variable w dont la dérivée $\frac{dF}{dw}$, d'après (1, 10), ne peut pas s'annuler identiquement.

En différentiant l'équation (2, 2) par rapport à u, compte tenu qu'on a $\frac{d\sigma_1}{du} \neq 0$, il vient

$$\frac{d\varrho_1}{dw} = \Phi_1(v)\,\frac{d\sigma_2}{dv}\,e^{\sigma_2}\frac{dF}{dw}$$

et il suit de là, eu égard au fait que — d'après (1,10) — on a $\frac{d\varrho_1}{dw} \neq 0$, $\frac{dF}{dw} \neq 0$, que les fonctions $\Phi_1(v)$, $\sigma_1(v)$ doivent satisfaire à une équation différentielle de la forme

$$(2,\,4)\qquad \Phi_1\,\frac{d\sigma_2}{dv} = ae^{-\sigma_2}$$

où a est une constante $\neq 0$.

Mais de l'équation (2, 2), si on y remplace le produit $\Phi_2\,\frac{d\sigma_2}{dv}$ par sa valeur (2, 4), on déduit aussitôt qu'on doit avoir

$$(2,\,5)\qquad \Phi_2(v) = c_1 = \text{Cte}$$

et au moyen des (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 4) et (2,5) la relation (2, 1) peut se mettre sous la forme

$$(2,\,6)\qquad \dot{k}_1 = -\,\frac{2\sqrt{c}}{a}\sqrt{\dot{H}}\left\{1 - c_1k_1\right\}e^{\frac{w}{2}},$$

où a, c, c_1 sont des constantes dont au moins les deux premières sont $\neq 0$. On peut donc énoncer le

Théorème A. Les courbures principales d'une surface-Ws référée aux paramètres isothermes u, v *correspondant au réseau de ses lignes de courbure, sont des fonctions de la seule variable* $w = \sigma_1(u) + \sigma_2(v)$ *vérifiant, lorsque les lignes de courbure* $v = $ *Cte de la surface sont spheriques, deux équations différentielles de la forme (1, 4) et (2, 6) et avec les fonctions* $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(v)$ *l'équation (1, 7), où a, c,* c_1 *sont des constantes dont au moins les deux premières sont* $\neq 0$.

3. Les lignes de courbure sphériques $v = Cte$ de la surface S peuvent être considérées comme les sections successives de la surface par une sphère variable dont le rayon R ainsi que le rayon vecteur $\bar{r}_1$ de son centre par rapport au système de coordonnées choisi dans l'espace et l'angle Θ sous lequel S coupe cette sphère, qui, — d'après le théorème de JOACHIMSTHAL — est le même à tous les points de chaque section, sont des fonctions de la seule variable v.

Or, si l'on pose :

$$(3,1) \qquad A_1 \equiv A_1(v) = -R\sin\Theta, \quad B_1 \equiv B_1(v) = R\cos\Theta$$

et qu'on désigne par $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ et $\bar{n}$ les vecteurs - unités des directions positives des tangentes au point courant $P(u, v)$ de S aux courbes $v = Cte$, $u = Cte$ issues de ce point et de la normale à S en P, on peut écrire l'équation vectorielle de la surface par rapport au système de coordonnées considéré sous la forme [3, p. 314] :

$$(3,2) \qquad \bar{r} = \bar{r}_1(v) - \frac{A_1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial v}\right)^2}} \frac{\partial \bar{n}}{\partial v} + B_1 \bar{n},$$

$\bar{r}_1$, A_1, B_1 étant des fonctions de v dont les derivées $\frac{d\bar{r}_1}{dv}$, $\frac{dB_1}{dv}$ sont liées avec $\bar{n}(u, v)$ et sa dérivée $\frac{\partial \bar{n}}{dv}$ par la relation

$$(3,3) \qquad \frac{d\bar{r}_1}{dv} \times \bar{n} + \frac{dB_1}{dv} - A_1\sqrt{\left(\frac{\partial \bar{n}}{\partial v}\right)^2} = 0,$$

où $\frac{d\bar{r}_1}{dv} \times \bar{n}$ est le produit scalaire des vecteurs $\frac{d\bar{r}_1}{dv}$ et $\bar{n}$.

L'équation (3, 2), si l'on tient compte que — d'après des formules connues [9, p. 193] — on a :

$$(3,4) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \bar{n}}{\partial u} = \dfrac{1}{\lambda} \dfrac{\partial \bar{n}}{\partial u} = -k_1 \bar{t}_1, \quad \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \bar{n}}{\partial v} = \dfrac{1}{\lambda} \dfrac{\partial \bar{n}}{\partial v} = -k_2 \bar{t}_2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \bar{t}_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\lambda} \dfrac{\partial \bar{t}_2}{\partial u} = -k_{1g} \bar{t}_1, \end{cases}$$

où

$$(3,5) \qquad k_{1g} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \log\lambda}{\partial v}$$

est la courbure géodésique en P de la courbe $v = Cte$ issue de ce point, peut se mettre sous la forme

$$\bar{r} = \bar{r}_1(v) + A_1(v)\bar{t}_2 + B_1(v)\bar{n}. \tag{3, 6}$$

La différentiation de l'équation (3, 6) par rapport à u conduit, si l'on tient compte des (3, 4), à la relation

$$-A_1 k_{1g} = 1 + B_1 k_1 \tag{3, 7}$$

et cette relation, si on y remplace k_{1g} par sa valeur (3, 5) et qu'on tienne compte des (1, 6) et (1, 4), peut se mettre sous la forme

$$-A_1 \frac{d\sigma_2}{dv} e^{\sigma_2} \frac{dk_1}{dw} = 2\sqrt{c}\,\sqrt{\dot{H}}\,\{1 + B_1 k_1\}\, e^{\frac{w}{2}}. \tag{3, 8}$$

Par ailleurs $k_1(w)$ doit vérifier l'équation (2, 6) qui, à l'aide de (2, 4), peut s'écrire

$$-\Phi_1 \frac{d\sigma_2}{dv} e^{\sigma_2} \frac{dk_1}{dw} = 2\sqrt{c}\,\sqrt{\dot{H}}\,\{1 - c_1 k_1\}\, e^{\frac{w}{2}} \tag{3, 9}$$

et l'élimination de $\frac{dk}{dw}$ entre les deux équations (3, 8) et (3, 9) conduit à la relation

$$A_1(v)\,\{1 - c_1 k(w)\} = \Phi_1(v)\,\{1 + B_1 k_1(w)\}$$

de laquelle on déduit, en ayant égard au fait que k_1 est une fonction de $w = \sigma_1(u) + \sigma_2(v)$, dont la dérivée $\frac{dk_1}{dw}$, d'après (1, 10), est $\neq 0$, qu'on doit avoir

$$A_1(v) = -R\sin\Theta = \Phi_1(v) \tag{3, 10}$$

et

$$B_1(v) = R\cos\Theta = -c_1 = Cte. \tag{3, 11}$$

La relation (3, 11) montre que la constante c_1 qui figure dans l'équation (2, 6) ne s'annule que *dans le cas où l'on a* $\cos\Theta \equiv 0$, R étant évidemment $\neq 0$ et, par conséquent, *dans le cas où la surface est engendrée par des trajectoires orthogonales d'une familie de* ∞^1 *sphères.*

Mais, si l'on a

$$c_1 = -B_1 = 0, \tag{3, 12}$$

l'équation (3, 7) dévient $A_1 k_{1g} = -1$ et, à l'aide de (3, 5), elle peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{1}{A_1(v)}, \tag{3, 13}$$

ce qui prouve que $\frac{1}{\lambda}$ doit être une fonction des u, v ou, ce qui revient au même, des $\sigma_1(u)$, $s_2(v)$ de la forme

$$\frac{1}{\lambda} = f_1(\sigma_1) + f_2(\sigma_2), \tag{3, 14}$$

où f_1, f_2 sont des fonctions de σ_1 et de σ_2 dont les dérivées $\frac{df_1}{d\sigma_1}$, $\frac{df_2}{d\sigma_2}$ ne peuvent pas s'annuler identiquement, car, s'il n'en était pas ainsi, la surface serait ou bien conique et, par conséquent, une surface à courbure totale constante ou bien une surface de révolution [8, p. 329].

L'équation (3, 14), en y remplaçant λ par sa valeur (1, 6), peut se mettre sous la forme

$$\sqrt{\dot{H}}\, e^{-\frac{\sigma_1}{2}} = \frac{\sqrt{c}}{e^{\frac{\sigma_2}{2}}} f_1(\sigma_1) + \frac{\sqrt{c}}{e^{\frac{\sigma_2}{2}}} f_2(\sigma_2).$$

En différentiant cette équation par rapport à σ_1 il vient

$$\dot{\left\{\sqrt{\dot{H}}\right\}} - \frac{1}{2}\sqrt{\dot{H}} = \frac{\sqrt{c}}{e^{\frac{\sigma_2}{2}}} \frac{df_1}{d\sigma_1} e^{\frac{\sigma_1}{2}} \tag{3, 15}$$

et de cette relation, dont le premier membre est une fonction de la seule variable $w = \sigma_1 + \sigma_2$, on déduit qu'on doit avoir

$$\sqrt{c}\, \frac{df_1}{d\sigma_1} = a' e^{-\sigma_1} \tag{3, 16}$$

où a' est une constante $\neq 0$.

Il en résulte que, dans le cas envisagé, $\sqrt{\dot{H}}$ doit être une fonction de w satisfaisant à l'équation différentielle

$$\dot{\left\{\sqrt{\dot{H}}\right\}} - \frac{1}{2}\sqrt{\dot{H}} = a' e^{-\frac{w}{2}}$$

qu'on obtient en éliminant $\frac{df_1}{d\sigma_1}$ entre les deux relations (3, 15) et (3, 16); par conséquent, $\sqrt{\dot{H}}$ doit être une fonction de w de la forme

$$\sqrt{\dot{H}} = a'' e^{\frac{w}{2}} - a' e^{-\frac{w}{2}} \tag{3, 17}$$

où a', a'' sont des constantes. Ces deux constantes sont nécessairement $\neq 0$, car, s'il n'en était pas ainsi, au moins l'un des coefficients A, B, C qui figurent dans l'équation (1, 7) serait nul.

Or, si l'on pose

$$e^w = x, \tag{3, 18}$$

on a, grâce à (3, 17),

$$\dot{H} = \frac{(a''x - a')^2}{x}, \quad \ddot{H} = \frac{a''^2x^2 - a'^2}{x}, \tag{3, 19}$$

$$H = \frac{a''^2x^2 - 2a'a''xw - a'^2 + a'''x}{x}, \tag{3, 20}$$

où a''' est aussi une constante et si on porte dans la relation (1, 5) les valeurs (3, 19) et (3, 20) des $\dot{H}$, H, on obtient pour la courbure totale de la surface la formule

$$K = \frac{\{a''^2x^2 - 2a'a''xw - a'^2 + a'''x\}^2 - \{a''x - a'\}^4}{x^2} \tag{3, 21}$$

En outre, d'après (3, 19), on a

$$\frac{\ddot{H}}{\dot{H}} = \frac{a''x + a'}{a''x - a'} \tag{3, 22}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} A' &\equiv \frac{\ddot{H}}{\dot{H}} - 1 = \frac{2a'}{a''x - a'}, \quad B' \equiv \frac{\ddot{H}}{\dot{H}} + 1 = \frac{2a''x}{a''x - a'}, \\ C' &\equiv \dot{\left\{\frac{\ddot{H}}{\dot{H}}\right\}} = -\frac{2a'a''x}{(a''x - a')^2}. \end{aligned}\right. \tag{3, 23}$$

Par ailleurs l'équation (1, 7), si l'on pose

$$\left(\frac{d\sigma_1}{du}\right)^2 = \varphi_1(\sigma_1)e^{2\sigma_1}, \quad \left(\frac{d\sigma_2}{dv}\right)^2 = \varphi_2(\sigma_2)e^{-2\sigma_2} \tag{3, 24}$$

et qu'on tienne compte de (3, 18), peut se mettre sous la forme

$$1 = \frac{Ax}{2}\frac{d\varphi_1}{d\sigma_1} + (A + C)x\varphi_1 + \frac{B}{2x}\frac{d\varphi_2}{d\sigma_2} + \frac{C - B}{x}\varphi_2 \tag{3, 25}$$

et la différentiation de cette équation par rapport à σ_1 et à σ_2 conduit à deux nouvelles équations desquelles — en les retranchant — on parvient à l'équation

$$Ax\frac{d^2\varphi_1}{d\sigma_1^2} + 2(A + C)x\frac{d\varphi_1}{d\sigma_1} - \frac{B}{x}\frac{d^2\varphi_2}{d\sigma_2^2} - 2\frac{C - B}{x}\frac{d\varphi_2}{d\sigma_2} = 0. \tag{3, 26}$$

L'équation (3, 26), si on y remplace A, B, C par leurs valeurs (1, 8) et qu'on tienne compte des (3, 23), dévient

$$(3,27)\quad a'x(a''x-a')\frac{d^2\varphi_1}{d\sigma_1^{\,2}}-2a'^2x\frac{d\varphi_1}{d\sigma_1}-a''(a''x-a')\frac{d^2\varphi_2}{d\sigma_2^{\,2}}+2a''^2x\frac{d\varphi_2}{d\sigma_2}=0.$$

La différentiation successive de cette équation par rapport à σ_1, σ_2, eu égard en même temps qu'on a $e^w \equiv x \neq 0$, $a'' \neq 0$, conduit à l'équation

$$a'x\frac{d^3\varphi_1}{d\sigma_1^{\,3}}+2a'x\frac{d^2\varphi_1}{d\sigma_1^{\,2}}-a''\frac{d^3\varphi_2}{d\sigma_2^{\,3}}+2a''\frac{d^2\varphi_2}{d\sigma_2^{\,2}}=0$$

dont la différentiation d'une part par rapport à σ_1 et d'autre part par rapport à σ_2 montre, compte tenu qu'on a a', $a'' \neq 0$, que les fonctions $\varphi_1(\sigma_1)$, $\varphi_2(\sigma_2)$ doivent satisfaire respectivement aux équations différentielles

$$\frac{d^4\varphi_1}{d\sigma_1^{\,4}}+3\frac{d^3\varphi_1}{d\sigma_1^{\,3}}+2\frac{d^2\varphi_1}{d\sigma_1^{\,2}}=0,\qquad \frac{d^4\varphi_2}{d\sigma_2^{\,4}}-3\frac{d^3\varphi_2}{d\sigma_2^{\,3}}+2\frac{d^2\varphi_2}{d\sigma^2}=0.$$

Il en résulte que $\varphi_1(\sigma_1)$, $\varphi_2(\sigma_2)$ sont nécessairement de la forme

$$(3,28)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi_1&=a_1e^{-\sigma_1}+\frac{a_2}{4}e^{-2\sigma_1}+a_3\sigma_1+a_4,\\ \varphi_2&=b_1e^{\sigma_2}+\frac{b_2}{4}e^{2\sigma_2}+b_3\sigma_2+b_4,\end{aligned}\right.$$

où a_1, a_2, a_3, a_4 et b_1, b_2, b_3, b_4 sont des constantes.

L'équation (3, 25), si on y porte les valeurs (3, 28) des φ_1, φ_2 et qu'on tienne compte des (1, 8) et (3, 23), peut se mettre sous la forme

$$(3,29)\quad f_1(w)e^{\sigma_2}+f_2(w)e^{2\sigma_2}+f_3(w)\sigma_2+f_4(w)=0,$$

où

$$f_1(w)=\frac{(a''x+a')(a'a_1+a''b_1)}{(a''x-a')^2},\qquad f_2(w)=\frac{a'a''(a_2+b_2)}{2(a''x-a')^2},$$

$$f_3(w)=\frac{2x(a''^2b_3-a'^2b_3)}{(a''x-a')^2},$$

$$f_4(w)=\frac{2cK}{\dot{H}}-\frac{a'a_3x-a''b_3}{a''x-a'}+2\frac{a'^2x(a_3w+a_4)+a''^2b_4x}{(a''x-a')^2}.$$

De l'équation (3, 29) on déduit aussitôt qu'on doit avoir

$$f_1(w) = f_2(w) = f_3(w) = f_4(w) \equiv 0$$

et, par conséquent,

$$a'a_1 + a''b_1 = 0, \quad a_2 + b_2 = 0, \quad a'^2 a_3 - a''^2 b_3 = 0,$$

$$2cK = \dot{H} \left\{ \frac{a'a_3 x - a''b_3}{a''x - a'} - 2\frac{a'x(a_3 w + a_4) + a''^2 b_4 x}{(a''x - a')^2} \right\}.$$

La dernière de ces relations, si on y remplace $\dot{H}$ par sa valeur (3, 19), dévient

$$(3, 30) \qquad K = \frac{(a'a_3 x - a''b_3)(a''x - a') - 2\left\{a'^2 x (a_3 w + a_4) + a''^2 b_4 x\right\}}{2cx}$$

où $x = e^w$; on a ainsi une nouvelle expression de K en fonction de W, qui ne peut pas coïncider avec l'expression (3, 21).

Donc, au moyen des équations (1, 4), (2, 6), (1, 7) auxquelles, d'après le théorème A, doivent satisfaire les courbures principales k_1, k_2 considérées comme fonction de la variable $w = \sigma_1(u) + \sigma_2(v)$ avec les fonctions $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(v)$, lorsque les lignes de courbure $v = Cte$ de la surface sont sphériques et de l'équation (3, 17) qui doit être vérifiée en plus, si l'on a $c_1 = 0$, on obtient deux expressions de la courbure totale K en fonction de w, qui ne peuvent pas coïncider. Il en résulte que l'équation (3, 17) est incompatible avec les équations (1, 4), (2, 6) et (1, 7) et, par conséquent, que *la constante* $c_1 = - R\cos\Theta$ *qui figure dans l'équation (2, 6) est nécessairement* $\neq 0$.

On a donc le

Théorème B. Le rayon R de la sphère variable, dont les sections par une surface-Ws à lignes de courbure sphériques dans l'un système sont ces lignes de courbure, est lié avec l'angle Θ sous lequel la surface coupe cette sphère par une relation de la forme $c_1 = - R\cos\Theta$, *où* c_1 *est une constante non nulle.*

En outre les considérations précédentes, si l'on tient compte du fait que — d'après le théorème de JOACHIMSTHAL — les sections d'une surface engendrée par des trajectoires orthogonales d'une famille de ∞^1 sphères par les sphères de cette famille sont des lignes de courbure de la surface permettent de formuler le

Théorème C. Il n'y a pas de surfaces-Ws engendrées par des trajectoires orthogonales des familles de ∞^1 *sphères.*

La relation qui, d'après le théorème B, existe entre le rayon R de la sphère variable dont les sections par S sont ses lignes de courbure

$v = Cte$ et l'angle Θ sous lequel S coupe cette sphère admet une interprétation géometrique remarquable. En effet les plans tangents à S à tous les points d'une quelconque de ses lignes de courbure sphériques sont tangents à une sphère Σ_1 concentrique avec la sphère Σ dont la section par S est cette ligne de courbure [2, p. 240], tandis que l'angle Θ sous lequel S coupe la sphère Σ est évidemment égal à l'angle des normales issues du centre commun des sphères Σ, Σ_1 aux plans tangents aux S, Σ à un quelconque de leurs points communs. Par conséquent, le rayon R_1 de la sphère Σ_1 est $R_1 = |R\cos\Theta|$.

On peut donc, en ayant égard au théorème B, énoncer le

T h é o r è m e D. Les sphères auxquelles sont tangents les plans tangents d'une surface-Ws dont les lignes de courbure de l'un système sont sphériques aux points de ces lignes de courbure ont toutes le même rayon.

4. Supposons en plus que *les sphères, dont les sections par la surface-W considérée sont ses lignes de courbure $v = Cte$, aient toutes le même rayon.*

Dans ce cas, d'après le théorème B, toutes ces sphères coupent la surface sous le même angle Θ; on aura donc, d'après (3, 10),

$$A_1 = -R\sin\Theta = \Phi_1(v) = c' \tag{4, 1}$$

où c' *est une constante qui, d'après (1, 10), est nécessairement* $\neq 0$.

En outre, des deux relations (2, 4) et (4, 1) on déduit qu'on doit avoir

$$\left(\frac{d\sigma_2}{dv}\right)^2 = c_2^2 e^{-2\sigma_2}, \qquad \frac{d^2\sigma_2}{dv^2} = -c_2^2 e^{-2\sigma_2}, \tag{4, 2}$$

où $c_2^2 = \dfrac{a^2}{c'^2}$ est une constante $\neq 0$, ce qui prouve que $\sigma_2(v)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\sigma_2}{dv^2} + \left(\frac{d\sigma_2}{dv}\right)^2 = 0. \tag{4, 3}$$

Par ailleurs l'équation (1, 7), si on y porte les valeurs (4, 2) des $\left(\dfrac{d\sigma_2}{dv}\right)^2$, $\dfrac{d^2\sigma_2}{dv^2}$, peut s'écrire

$$\left\{\frac{d^2\sigma_1}{du^2} + \frac{C}{A}\left(\frac{d\sigma_1}{du}\right)^2\right\} e^{-2\sigma_2} = f(w) \tag{4, 4}$$

où

$$f(w) = \frac{e^w}{A} - c_2^2\,\frac{C-B}{A}.$$

Or en différentiant l'équation (4, 4) par rapport à σ_1 et à σ_2 on obtient deux équations, desquelles — en les retranchant — on déduit qu'on doit avoir

$$\frac{d^3\sigma_1}{du^3} + \frac{d\sigma_1}{du}\left\{2\left(\frac{C}{A} - 1\right)\frac{d^2\sigma_1}{du^2} - 2\frac{C}{A}\left(\frac{d\sigma_1}{du}\right)^2\right\} = 0$$

et la différentiation de cette équation par rapport à σ_2 conduit à

$$(4,5) \qquad \left\{\frac{d^2\sigma_1}{du^2} - \left(\frac{d\sigma_1}{du}\right)^2\right\}\frac{d}{dw}\left(\frac{C}{A}\right) = 0 .$$

On aura donc ou bien $\frac{C}{A} = \mu$, où μ est une constante qui, d'après ce qui est cité dans le paragraphe 1, doit être $\neq 0$, ou bien $\frac{d^2\sigma_1}{du^2} - \left(\frac{d\sigma_1}{du}\right)^2 = 0.$

Mais la relation

$$\frac{C}{A} = \mu$$

si on y remplace A, C par leurs valeurs (1, 8), dévient

$$(4,6) \qquad \dot{\left\{\frac{\ddot{H}}{\dot{H}}\right\}} = \mu\left\{\frac{\ddot{H}}{\dot{H}} - 1\right\},$$

ce qui, en intégrant, conduit à

$$(4,7) \qquad \frac{\ddot{H}}{\dot{H}} = 1 + \mu' e^{\mu w}$$

et de là on déduit aussitôt qu'on doit avoir

$$(4,8) \qquad \dot{H} = \mu'' e^{w} e^{\frac{\mu'}{\mu} e^{\mu w}},$$

où μ, μ', μ'' sont des constantes $\neq 0$.

D'autre part la différentiation de l'équation (3, 7) par rapport à v, eu égard au fait qu'on a $A_1 = c' \neq 0$, $B_1 = -c_1 \neq 0$, conduit, à l'aide des (3, 5), (4, 2), (1, 6) et (1, 4), à l'équation

$$c_2 c'\left\{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{\ddot{H}}{\dot{H}}\right)^2 + \frac{1}{2}\dot{\left(\frac{\ddot{H}}{\dot{H}}\right)} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ddot{H}}{\dot{H}}\right)\right\} = \sqrt{c_1}\sqrt{\dot{H}}\left(1 + \frac{\ddot{H}}{\dot{H}}\right)e^{\frac{w}{2}}$$

et de cette équation on déduit, si l'on tient compte des valeurs (4, 6) et (4, 7) des $\left\{\frac{\ddot{H}}{\dot{H}}\right\}$ et $\frac{\ddot{H}}{\dot{H}}$ que la dérivée $\dot{H}$ doit être une fonction rationnelle des e^w, $e^{\mu w}$, tandis que, d'après (4, 7), $\dot{H}$ est proportionnelle au produit de e^w et d'une fonction transcendante de $e^{\mu w}$.

Il en résulte que l'équation différentielle (4, 5) est incompatible avec les équations (1, 4) et (2, 6) ; par conséquent, on a, dans le cas envisagé, $\frac{d}{dw}\left(\frac{C}{A}\right) \neq 0$ et, d'après (4, 5), on doit avoir

$$\frac{d^2\sigma_1}{du^2} - \left(\frac{d\sigma_1}{du}\right)^2 = 0. \tag{4, 9}$$

On aura donc, grâce aux (4, 3) et (4, 9),

$$\frac{d^2\sigma_1}{du^2} - \frac{d^2\sigma_2}{dv^2} = \left(\frac{d\sigma_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\sigma_2}{dv}\right)^2,$$

ou bien, si l'on tient compte que les paramètres choisis sur S sont isothermes,

$$\Delta_2(\sigma_1 - \sigma_2) = \Delta_1(\sigma_1 - \sigma_2), \tag{4, 10}$$

où $\Delta_1(\sigma_1 - \sigma_2)$, $\Delta_2(\sigma_1 - \sigma_2)$ sont les paramètres différentiels de BELTRAMI du premier et du second ordre de $\sigma_1(u) - \sigma_2(v)$ par rapport à la première forme fondementale de la surface, ce qui prouve [7, p. 60] que la surface-Ws considérée est applicable, dans le cas envisagé, sur une surface de révolution. On peut donc énoncer le

Théorème E. Une surface-Ws à lignes de courbure sphériques dans l'un système est applicable sur une surface de révolution, lorsque les sphères auxquelles ces lignes de courbure appartiennent ont toutes le même rayon.

II

5. Supposons enfin que les lignes de courbure des deux systèmes $v = $ Cte, $u = $ Cte de la surface-*Ws* considérée soient sphériques.

Dans ce cas les courbures principales k_1, k_2 de la surface et les coefficients E_1, G_1 de l'élément linéaire de sa représentation sphérique sont des fonctions des u, v vérifiant deux équations de la forme

$$\varrho_1 = \frac{\Phi_1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \log\sqrt{E_1}}{\partial v} + \Phi_2, \qquad \varrho_2 = \frac{F_1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \log\sqrt{G_1}}{\partial u} + F_2 \tag{5, 1}$$

où Φ_1, Φ_2 sont des fonctions de la seule variable v tandis que F_1, F_2 sont des fonctions de la seule variable u [1, p. 527].

La première de ces équations, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 2, prend, dans le cas envisagé, la forme (2, 6); de même la seconde par un procédé pareil à celui qui est suivi pour la réduction de la première à la forme (2, 6), se réduit à

$$\dot{k}_2 = \frac{2\sqrt{c}}{b} \sqrt{\dot{H}} \{1 - c_2 k_1\} e^{-\frac{w}{2}}, \tag{5, 2}$$

où c est la constante qui figure dans la formule (1, 6) et b, c_2 sont aussi des constantes qui, d'après le théorème B, sont $\neq 0$.

On peut donc, en ayant égard au théorème A, formuler le

Théorème F. Pour que les lignes de courbure $u = Cte$, $v = Cte$ d'une surface-Ws référée aux paramètres isothermes u, v correspondant au réseau de ses lignes de courbure, soient toutes sphériques, il faut que les courbures principales k_1, k_2 de cette surface soient des fonctions de la seule variable $w = \sigma_1(u) + \sigma_2(v)$ satisfaisant à l'équation (1, 4), à deux équations de la forme (2, 6) et (5, 2), où a, b, c, c_1, c_2 sont des constantes non nulles et avec les fonctions $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(v)$ à l'équation (1, 7).

6. Des deux équations (2, 6) et (5, 2), si l'on tient compte que — d'après (1, 4) — on a

$$\ddot{H} = \frac{1}{2} \{\dot{k}_1 - \dot{k}_2\}, \tag{6, 1}$$

on parvient aisément aux relations

$$\left\{ \begin{aligned} & - \frac{1 - c_2 k_2}{b} e^{-\frac{w}{2}} + \frac{1 - c_1 k_1}{a} e^{\frac{w}{2}} = - \frac{\sqrt{\dot{H}}}{\sqrt{c}} \\ & \frac{1 - c_2 k_2}{b} e^{-\frac{w}{2}} + \frac{1 - c_1 k_1}{a} e^{\frac{w}{2}} = - 2 \frac{\dot{\{\sqrt{\dot{H}}\}}}{\sqrt{c}} \end{aligned} \right. \tag{6, 2}$$

et de là, en éliminant $e^{\frac{w}{2}}$ il vient

$$4 \left[\dot{\{\sqrt{\dot{H}}\}} \right]^2 - \dot{H} = \frac{4c}{ab} (1 - c_1 k_1)(1 - c_2 k_2). \tag{6, 3}$$

Par ailleurs, en différentiant la première équation (6, 2) par rapport à w, on obtient, à l'aide de la seconde, la relation

$$- \frac{c_1}{a} e^{\frac{w}{2}} \dot{k}_1 + \frac{c_2}{b} e^{-\frac{w}{2}} \dot{k}_2 = 0 \tag{6, 4}$$

qui, si on y remplace $\dot{k}_1$, $\dot{k}_2$ par leurs valeurs (2, 6) et (5, 2), devient

$$(6, 5) \qquad e^{2w} = -\frac{c_2 a^2}{c_1 b^2}\frac{1 - c_2 k_2}{1 - c_1 k_1}.$$

En différentiant maintenant l'équation (6, 5) par rapport à w et en tenant compte des (2, 6) et (5, 2), on trouve

$$e^{2w} = \frac{c_2 a^2}{c_1 b^2}\frac{1 - c_2 k_2}{1 - c_1 k_1}\left\{\frac{c_1}{a}e^{\frac{w}{2}} + \frac{c_2}{b}e^{-\frac{w}{2}}\right\}\sqrt{c}\sqrt{\dot{H}}$$

et finalement, grâce à (6, 5),

$$(6, 6) \qquad -\frac{1}{\sqrt{\dot{H}}} = a_1 e^{\frac{w}{2}} + a_2 e^{-\frac{w}{2}}$$

où

$$(6, 7) \qquad a_1 = \sqrt{c}\,\frac{c_1}{a}, \quad a_2 = \sqrt{c}\,\frac{c_2}{b}$$

sont des constantes qui, d'après ce qui est exposé dans les paragraphes 2 et 3, sont nécessairement $\neq 0$.

Or en éliminant $e^{\frac{w}{2}}$ entre l'équation (6, 6) et l'équation

$$(6, 8) \qquad -2\frac{\dot{\left\{\sqrt{\dot{H}}\right\}}}{\dot{H}} = -a_1 e^{\frac{w}{2}} + a_2 e^{-\frac{w}{2}}$$

qu'on obtient par la différentiation de l'équation (6, 6) par rapport à w, il vient

$$(6, 9) \qquad 4\left[\dot{\left\{\sqrt{\dot{H}}\right\}}\right]^2 - \dot{H} = -4a_1 a_2 \dot{H}^2.$$

On aura donc, grâce aux (6, 3) (6, 9) et (6, 7),

$$(1 - c_1 k_1)(1 - c_2 k_2) = -c_1 c_2 \dot{H}^2$$

ou finalement, si on remplace dans cette équation $\dot{H}^2$ par sa valeur tirée de la relation (1, 5),

$$(6, 10) \qquad 1 - c_1 k_1 - c_2 k_2 + c_1 c_2 H^2 = 0,$$

ce qui montre, compte tenu que S n'est pas une surface à courbure moyenne constante, qu'on doit avoir

$$(6, 11) \qquad c_1 \neq c_2.$$

Cela étant l'élimination des k_1, k_2, entre (6, 10) et les relations $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $K = k_1 k_2$ conduit à la formule

$$K = -\frac{(1 - 2c_1 H + c_1 c_2 H^2)(1 - 2c_2 H + c_1 c_2 H^2)}{(c_1 - c_2)^2}. \tag{6, 12}$$

En outre, de l'équation (6, 6) on tire

$$\dot{H} = \frac{e^w}{(a_1 e^w + a_2)^2}, \tag{6, 13}$$

ce qui, en intégrant, conduit à

$$H = -\frac{1}{a_1(a_1 e^w + a_2)} + a', \tag{6, 14}$$

où a' est aussi une constante.

7. L'équation (6, 13), si l'on pose

$$e^w = x \tag{7, 1}$$

prend la forme

$$\dot{H} = \frac{x}{(a_1 x + a_2)^2} \tag{7, 2}$$

et de là on déduit aisément

$$\ddot{H} = -\frac{x(a_1 x - a_2)}{(a_1 x + a_2)^3}, \quad \frac{\ddot{H}}{\dot{H}} = -\frac{a_1 x - a_2}{a_1 x + a_2}, \tag{7, 3}$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\ddot{H}}{\dot{H}} - 1 \equiv A' = -\dfrac{2a_1 x}{a_1 x + a_2}, \quad \dfrac{\ddot{H}}{\dot{H}} + 1 \equiv B' = \dfrac{2a_2}{a_1 x + a_2}, \\ \dot{\left\{ \dfrac{\ddot{H}}{\dot{H}} \right\}} \equiv C' = -\dfrac{2a_1 a_2 x}{(a_1 x + a_2)^2}. \end{array} \right. \tag{7, 4}$$

Par ailleurs, si l'on pose

$$\left(\frac{d\sigma_1}{du}\right)^2 = \varphi_1(\sigma_1)e^{2\sigma_1}, \quad \left(\frac{d\sigma_2}{dv}\right)^2 = \varphi_2(\sigma_2)e^{-2\sigma_2}, \tag{7, 5}$$

on peut mettre l'équation (1, 7) sous la forme (3, 25) et de cette équation en la différentiant par rapport à σ_1 et à σ_2 et en retranchant membre à membre les deux équations ainsi obtenues, on parvient à l'équation (3, 26) qui, si on y remplace A, B, C par leurs valeurs (1, 8) et qu'on tienne compte des (7, 4), dévient

$$\begin{aligned} & a_1 x^3(a_1 x + a_2)\frac{d^2\varphi_1}{d\sigma_1^2} + 2a_1 x^3(a_1 x + 2a_2)\frac{d\varphi_1}{d\sigma_1} + \\ & + a_2(a_1 x + a_2)\frac{d^2\varphi_2}{d\sigma_2} - 2a_2(2a_1 x + a_2)\frac{d\varphi_2}{d\sigma_2} = 0. \end{aligned} \tag{7, 6}$$

En différentiant maintenant successivement cette équation par rapport à σ_1 et en tenant compte en même temps qu'on a $x = e^w \neq 0$, $a_1 \neq 0$, $a_1 x + a_2 \neq 0$, on voit que la fonction $\varphi_1(\sigma_1)$ doit vérifier l'équation différentielle

$$\frac{d^4\varphi_1}{d\sigma_1^4} + 9\frac{d^3\varphi_1}{d\sigma_1^3} + 26\frac{d^2\varphi_1}{d\sigma_1^2} + 24\frac{d\varphi_1}{d\sigma_1} = 0 \tag{7, 7}$$

et, par conséquent, que φ_1 doit être une fonction de σ_1 de la forme

$$\varphi_1 = -\frac{l_1}{2}e^{-2\sigma_1} - \frac{m_1}{3}e^{-3\sigma_1} - \frac{n_1}{4}e^{-4\sigma_1} + c' \tag{7, 8}$$

où l_1, m_1, n_1, c' sont des constantes, les racines du polynôme caractéristique de l'équation linéaire (7, 7) étant $0, -2, -3, -4$.

L'équation (7, 6), si l'on pose

$$e^{-w} = \frac{1}{x} = y \tag{7, 9}$$

peut s'écrire

$$\begin{aligned} &a_2 y^3(a_2 y + a_1)\frac{d^2\varphi_2}{d\sigma_2} - 2a_2 y^3(a_2 y + 2a_1)\frac{d\varphi_2}{d\sigma_2} + \\ &+ a_1(a_2 y + a_1)\frac{d^2\varphi_1}{d\sigma_1^2} + 2a_1(2a_2 y + a_1)\frac{d\varphi_1}{d\sigma_1} = 0 \end{aligned} \tag{7, 10}$$

et la différentiation successive de cette équation par rapport à σ_2, compte tenu qu'on a $y = e^{-w} \neq 0$, $\dot{y} = -y$, $a_2 \neq 0$, $a_2 y + a_1 \neq 0$, montre que $\varphi_2(\sigma_2)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{d^4\varphi_2}{d\sigma_2^4} - 9\frac{d^3\varphi_2}{d\sigma_2^3} + 26\frac{d^2\varphi_2}{d\sigma_2^2} - 24\frac{d\varphi_2}{d\sigma_2} = 0$$

dont le polynôme caractéristique admet les racines 0, 2, 3, 4; par conséquent, φ_2 doit être une fonction de σ_2 de la forme

$$\varphi_2 = \frac{l_2}{2}e^{2\sigma_2} + \frac{m_2}{3}e^{3\sigma_2} + \frac{n_2}{4}e^{4\sigma_2} + c'', \tag{7, 11}$$

où l_2, m_2, n_2, c'' sont des constantes.

Or en remplaçant φ_1, φ_2 dans l'équation (3, 25) par leurs valeurs (7, 11) et en tenant compte des (1, 6) et (7, 4), on peut mettre cette équation sous la forme

$$f_1(w) + f_2(w)e^{2\sigma_2} + f_3(w)e^{3\sigma_2} + f_4(w)e^{4\sigma_2} = 0,$$

où

$$(7,12)\qquad f_1(w) = -\frac{2cK}{\dot{H}} + (A'+C')xc' + \frac{C'-B'}{x}c''$$

et

$$(7,13)\quad \begin{cases} f_2(w) = C'\{l_1 - l_2\},\ f_3(w) = \left\{\dfrac{A'}{2x^2} - \dfrac{A'+C'}{3x^2}\right\}m_1 + \left\{\dfrac{B'}{2x} + \dfrac{C'-B'}{3x}\right\}m_2, \\ f_4(w) = \left\{\dfrac{A'}{2x^3} - \dfrac{A'+C'}{4x^3}\right\}n_1 + \left\{\dfrac{B'}{2x} + \dfrac{C'-B'}{4x}\right\}n_2. \end{cases}$$

Les coefficients de cette équation algébrique en e^{σ_2} sont des fonctions de la seule variable $w = \sigma_1 + \sigma_2$. On aura donc

$$(7,14)\qquad f_1(w) = -\frac{2cK}{\dot{H}} + (A'+C')xc' + \frac{C'-B'}{x}c'' \equiv 0$$

et

$$(7,15)\qquad f_2(w) = f_3(w) = f_4(w) \equiv 0.$$

Les relations (7, 15), si on y porte les valeurs (7, 4) des A', B', C' et qu'on tienne compte qu'on a $x = e^w \neq 0$, $a_1x + a_2 \neq 0$, déviennent trois équations algébriques en x. Or si on exprime que ces équations en x doivent être identiquement vérifiées, on constate facilement que les constantes qui y figurent sont liées par les relations

$$(7,16)\qquad l_1 = l_2,\quad m_1a_1 + m_2a_2 = 0,\quad n_1a_1^2 - n_2a_2^2 = 0.$$

En outre, en remplaçant dans l'équation (7, 14) A', B', C' et $\dot{H}$ par leurs valeurs (7, 4) et (7, 2), on obtient pour la courbure totale K l'expression

$$(7,17)\qquad K = -\frac{a_1^3x^3(a_1x+2a_2)c' + a_2a_1^2(2a_1x+a_2)c''}{ca_1^2(a_1x+a_2)^4}.$$

Par ailleurs, en substituant $\dot{H}$, H dans la relation (1, 5) par leurs valeurs (6, 13) et (6, 14) et en tenant compte de (7, 1), on trouve

$$(7,18)\qquad K = \frac{\{a'a_1(a_1x+a_2)-1\}^2\{a_1x+a_2\}^2 - a_1^2x^2}{a_1^2(a_1x+a_2)^4}$$

et en égalant les seconds membres des (7, 17) et (7, 18) on parvient à l'équation algébrique en x

$$(7,19)\qquad \begin{aligned} &c\{a'a_1(a_1x+a_2)-1\}^2\{a_1x+a_2\}^2 - ca_1^2x^2 + \\ &+ a_1^3x^3(a_1x+2a_2)c' + a_2a_1^2(2a_1x+a_2)c'' = 0 \end{aligned}$$

qui doit être identiquement vérifiée.

Or, en annulant les coefficients des x^0, x^1 dans le premier membre de l'équation (7, 19), il vient

$$c'\left\{a'a_1a_2 - 1\right\}^2 = - c''a_1^2$$

$$2a_1a_2a'\left\{a_1a_2a' - 1\right\}^2 + 2ca'a_1^2a_2^2\left\{a'a_1a_2 - 1\right\} = - 2a_2a_1^3c''$$

et en éliminant c'' entre ces deux relations, compte tenu q'on a a_1, $a_2 \neq 0$, on reconnait qu'on doit avoir ou bien

$$(7, 20) \qquad a' = \frac{1}{a_1a_2}, \qquad c'' = 0$$

ou bien

$$(7, 21) \qquad a' = 0, \qquad c'' = - \frac{c}{a_1^2}.$$

Si on porte maintenant dans l'équation (7, 19) d'une part les valeurs (7, 20) et d'autre part les valeurs (7, 21) des a', c'', on constate qu'elle n'est identiquement vérifiée que si l'on a respectivement $c' = - \frac{c}{a_2^2}$ et $c' = 0$.

Par ailleurs les formules (6, 14) et (7, 18), si on y remplace a' par sa valeur (7, 20) et qu'on pose $\frac{1}{x} = e^{-w} = y$, prennent la forme

$$H = \frac{1}{a_2(a_2y + a_1)}, \qquad K = \frac{2a_1a_2y + a_1^2}{a_2^2(a_2y + a_1)^4}$$

et on voit aussitôt, en éliminant y entre ces deux équations, que K doit être une fonction de H de la forme

$$(7, 22) \qquad K = 2a_1a_2H^3 - a_1^2a_2^2H^4,$$

tandis que ces mêmes formules, si on y porte la valeur (7, 21) de a' deviennent

$$H = - \frac{1}{a_1(a_1x + a_2)}, \qquad K = \frac{2a_1a_2x + a_2^2}{a_1^2(a_1x + a_2)^4}$$

et l'élimination de x entre ces deux relations donne

$$(7, 23) \qquad K = - 2a_1a_2H^3 - a_1^2a_2^2H^4,$$

Ainsi, dans les deux cas, K est un polynôme en H du 4me degré dont les coefficients des H^0, H^1, H^2 sont nuls. D'autre part, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 6, K est un polynôme en H du 4me degré dont les coefficients des H^0, H^2 ne peuvent pas s'annuler. On parvient donc au moyen des quatre équations (1, 4), (2, 6), (5, 3), et (1, 7) auxquelles doivent satisfaire les courbures principales k_1, k_2 de S considérées comme fonctions de la seule variable $w = \sigma_1(u) + \sigma_2(v)$ avec les deux fonctions $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(v)$, lorsque les lignes de courbure $v = Cte$, $u = Cte$ de cette surface sont sphériques, à deux expressions de K en fonction de H : (6, 12) et (7, 22) ou (7, 23), qui ne peuvent pas coïncider. La première de ces expressions est obtenue au moyen des (1, 4), (2, 6) et (5, 3), tandis que la seconde est obtenue à l'aide de ces mêmes équations et de l'équation (1, 7). Il suit de là que ces quatre équations sont incompatibles et, par conséquent, qu'*il n'y a pas de surfaces-Ws à lignes de courbure sphériques dans les deux systèmes.*

Les considérations précédentes, si l'on tient compte en même temps de ce qui est cité dans l'introduction, permettent de formuler le

Théorème G. Les seules surfaces-Ws isothermiques à lignes de courbure sphériques dans les deux systèmes sont les surfaces de révolution dont les méridiens sont des cercles.

RÉFÉRENCES

1. L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, vol. I_2, Bologna (1927).
2. G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, vol. IV, Paris (1915).
3. L. P. Eisenhart, A treatise on the differential geometry of curves and surfaces, Dover publications.
4. A. R. Forsyth, Lectures on the differential geometry of curves and surfaces, Cambridge (1920).
5. W. C. Graustein, Isometric W-surfaces, Amer. Math. Soc. Trans. 6 (1924), p.p. 176 - 204.
6. A. R. Özbek, Über Flächen mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien, auf denen die Summe der Hauptkrümmungsradien oder die mittlere Krümmung konstant ist, Istambul Tekn. Ünivers. Bül. 13 (1960), p.p. 83 - 99.
7. O. Pylarinos, Sur les surfaces-W isothermiques, Annali di Mat. pura ed applic. (IV), vol. LXXIV (1966), p.p. 37 - 60.
8. O. Pylarinos, Sur les surfaces à courbure moyenne constante applicables sur des surfaces de révolution, Annali di Mat. pura ed applic. (IV), vol. LIX (1962), p.p. 319 - 350.
9. K. Strubecker, Differentialgeometrie, vol. III, Berlin (1959).

Π Ε Ρ Ι Λ Η Ψ Ι Σ

Αἱ ἰσοθερμικαὶ πραγματικαὶ ἐπιφάνειαι-W τοῦ Εὐκλειδείου τριδιαστάτου χώρου — αἱ ἐπιφάνειαι δηλ. τοῦ WEINGARTEN, τῶν ὁποίων αἱ δύο οἰκογένειαι τῶν γραμμῶν καμπυλότητος ἀποτελοῦν δίκτυον ἰσόθερμον — εἶναι δυνατὸν νὰ διακριθοῦν εἰς τέσσαρας κατηγορίας: α) τὴν τῶν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι, ὡς γνωστόν, εἶναι ὅλαι ἰσοθερμικαί, β) τὴν τῶν ἐπιφανειῶν μέσης καμπυλότητος σταθερᾶς, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὅλαι ἐπίσης ἰσοθερμικαί, γ) τὴν τῶν κωνικῶν καὶ τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ μόναι ἰσοθερμικαὶ ἐπιφάνειαι ὁλικῆς καμπυλότητος σταθερᾶς, καὶ δ) τὴν τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ εἴδους τούτου, αἱ ὁποῖαι εἰς οὐδεμίαν τῶν τριῶν πρώτων κατηγοριῶν ἀνήκουν.

Ἡ δευτέρα κατηγορία, ὡς ἔχει ἤδη ἀποδειχθῆ, δὲν περιέχει ἐπιφανείας, τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος εἶναι καμπύλαι σφαιρικαί, ἐπίσης δὲ καὶ ἡ τρίτη, ἀφοῦ, ὡς γνωστόν, αἱ εὐθύγραμμοι γενέτειραι τῶν κωνικῶν καὶ τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι γραμμαὶ καμπυλότητος αὐτῶν. Ἀντιθέτως ἡ πρώτη περιέχει τοιαύτας ἐπιφανείας: τὰς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας, τῶν ὁποίων οἱ μεσημβρινοὶ εἶναι κύκλοι. Εἰς τὴν ὑπὸ τὸν ὡς ἄνω (ἐν μεταφράσει) τίτλον ἐργασίαν ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ ἐκ περιστροφῆς αὗται ἐπιφάνειαι εἶναι αἱ μόναι ἰσοθερμικαὶ ἐπιφάνειαι-W, τῶν ὁποίων αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος ἀμφοτέρων τῶν οἰκογενειῶν εἶναι καμπύλαι σφαιρικαί. Πρὸς τοῦτο εἰς μὲν τὸ πρῶτον μέρος αὐτῆς ἀποδεικνύονται θεωρήματα τινὰ ἀφορῶντα εἰς τὰς ἐπιφανείας τῆς τετάρτης κατηγορίας, τῶν ὁποίων αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος τῆς μιᾶς οἰκογενείας εἶναι καμπύλαι σφαιρικαί, εἰς δὲ τὸ δεύτερον μέρος ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἡ τετάρτη κατηγορία δὲν περιέχει ἐπιφανείας, τῶν ὁποίων ὅλαι αἱ γραμμαὶ καμπυλότητος εἶναι καμπύλαι σφαιρικαί.