νει ὁ ἀγαρηνὸς ὁ μέγας εἰς τὸ παλάτι του καὶ τὰ ἄλλα μοιράζονται οἱ πασάδες καὶ οἱ ἄλλοι ἄρχοντες οἱ τοῦρκοι τῆς Κωνσταντινουπόλεως, ἕως νὰ μάθουν τὰ τούρκικα νὰ μιλοῦν. Καὶ μαθαίνουσι καὶ τὸ τουφέκι καὶ τὸ δοξάριον νὰ τὸ τοξεύωσιν ἴσα. Αὐτὴν τὴν ἀνάγκην ἔχουν οἱ χριστιανοὶ εἰς τὰς χεῖρας τῶν Ἀγαρηνῶν.

10. (φ. 7α). Τὸ νησὶ τῶν Κυθήρων ἔχει μίαν πόλιν ὀνομάζεται Καψάλη καὶ εἶναι πολὺ δυνατὴ καὶ εἶναι περίπου ὡς τὸ νησὶ τῶν Κορφῶν καὶ τῆς Ζακύνθου. Τὸ ὁποῖον νησὶ εἶναι ἄκαρπον ἀπὸ παντὸς πράγματος, μὰ ἐκεῖνο τὸ λίγο ὅπου κάμνει εἶναι εὔγευστο. Ἔχει δύο καστέλλια μικρὰ καὶ χωρία πέντε ἕξ μικρά. Τυρὶ κάμνει πολὺ καὶ ἔχει πολλὰ σφακτὰ καὶ γίδια. Τὸ αὐτὸ νησὶ εἶναι μακρὰν ἀπὸ τὸ νησὶ τῆς Κρήτης 60 μίλια.

Τὸ νησὶ αὐτὸ εἶναι τὸ Βενέτικον

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.—Eine Verschärfung des Schwarzschen Lemma's*, *von C. Carathéodory.*

1.—Wenn man für alle gleichmässig beschränkten Funktionen, die im Einheitskreise regulär sind und im Mittelpunkte dieses Kreises verschwinden, die Zahlen $f'(z)$ für einen festen Punkt des Kreises berechnet und wenn man die obere Grenze $M_0(z)$ dieser Zahlenmenge bestimmt, so erhält man ein unerwartetes Resultat. Es ist nämlich fast selbstverständlich, dass $M_0(z)$ eine nicht abnehmende eindeutige Funktion von $|z|$ sein muss, die gegen Unendlich konvergiert, wenn $|z|$ gegen Eins strebt. Normalerweise müsste also $M_0(z)$ monoton wachsen wenn $|z|$ das Intervall $0 < |z| < 1$ beschreibt. In Wirklichkeit bleibt aber $M_0(z)$ im Intervalle $0 \leq |z| \leq \sqrt{2} - 1$ konstant und fängt erst für $|z| > \sqrt{2} - 1$ zu wachsen an[1].

Die Mitteilung der äusserst elementaren Rechnungen auf welchen dieses Resultat beruht, das als eine bemerkenswerte Verschärfung des Schwarzschen Lemma's angesehen werden muss, bildet das Hauptziel der vorliegenden Note. Ich will aber diese Gelegenheit benutzen, um zu zeigen, wie man durch eine von der üblichen wenig abweichenden Beweisanordnung, die Ableitung des Schwarzschen Lemma's selbst und seiner wichtigsten Folgerungen, unabhängig von der Kenntnis der elementaren konformen Abbildungen erhalten kann.

* Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ.— Μία συμπλήρωσις τοῦ λήμματος τοῦ Schwarz.

[1] *Zusatz bei der Korrektur.* Wie ich soeben bemerkte ist dieses Ergebnis schon in der inhaltsreichen Arbeit von J. Dieudonné *(Ann. de l'Éc. Norm.*, [3], **48**, 1931, p. 247 - 358) auf S. 352 enthalten, der es aber auf ganz anderem Wege erhalten hat.

2.—Von einer analytischen Funktion wollen wir sagen, dass sie im Einheitskreise $z < 1$ *unimodular beschränkt* ist, wenn sie erstens überall im Inneren dieses Kreises regulär ist und wenn zweitens in allen Punkten dieses Kreises der absolute Betrag (oder Modul) $f(z)$ von $f(z)$ der Bedingung $f(z) \leq 1$ genügt.

Eine im Einheitskreise unimodular beschränkte Funktion ist entweder von der Gestalt

$$f(z) \equiv e^{i\vartheta} \qquad (\vartheta \text{ reell}) \tag{2. 1}$$

oder man hat in jedem Punkte des Einheitskreises

$$f(z) < 1. \tag{2. 2}$$

Ein bequemes Kriterium für diese Klasse von Funktionen erhält man folgendermassen: ist $f(z)$ im Einheitskreise regulär und ist überall $f(z) \leq 1$, so ist für alle beliebige Folgen $z_1, z_2, \ldots$ von inneren Punkten des Kreises

$$\limsup_{n=\infty} f(z_n) \leq 1. \tag{2. 3}$$

Ist dagegen für einen Punkt z_0 dieses Kreises $f(z_0) > 1$, so gibt es auch dann noch Folgen $z_1, z_2, \ldots$ von Punkten des Kreises, für welche

$$\limsup_{n=\infty} f(z_n) > 1$$

ist, wenn man verlangt, dass

$$\lim_{n=\infty} z_n = 1 \tag{2. 4}$$

sein soll. Auf diesen Überlegungen beruht der folgende.

Hilfsatz.—Eine analytische Funktion $f(z)$ *ist dann und nur dann unimodular beschränkt im Kreise* $z < 1$ *wenn sie erstens in diesem Kreise regulär ist und wenn zweitens die Relation* (2. 3) *für alle Folgen* $z_1, z_2, \ldots$ *von Punkten des Kreises besteht, die der Bedingung* (2. 4) *genügen.*

3.—Unter den im Einheitskreise unimodular beschränkten Funktionen spielen diejenigen eine besondere Rolle, für welche, für alle Folgen von Punkten, die gegen den Rand des Kreises konvergieren, die Bedingung (2. 3) durch die schärfere Bedingung

$$\lim_{n=\infty} f(z_n) = 1 \tag{3. 1}$$

ersetzt wird. Die Funktionen, die dieser speziellen Klasse angehören, sollen *Einheitsfunktionen* genannt werden.

Der Hauptsatz, der die ganze Theorie beherrscht, ist folgender:

Satz 1.—Es sei im Kreise $|z| < 1$ *die Funktion* f(z) *unimodular beschränkt und es sei* E(z) *eine Einheitsfunktion. Ist dann die Funktion*

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{\varepsilon(z)} \tag{3.2}$$

im Inneren des Kreises regulär, so gilt im selben Bereiche die Relation

$$|\varphi(z)| \leqq 1, \tag{3.3}$$

d. h. die Funktion $\varphi(z)$ *ist ebenfalls unimodular beschränkt.*

Es sei $z_1, z_2, \ldots$ eine Folge von Punkten, für welche die Gleichung (2.4) besteht. Dann gelten die Beziehungen

$$\limsup_{n=\infty} |\varphi(z_n)| \leqq \lim \frac{1}{|E(z_n)|} \, . \limsup_{n=\infty} |f(z_n)| \, , \tag{3.4}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{|E(z_n)|} = 1 \, , \ \limsup_{n=\infty} |f(z_n)| \leqq 1 \, , \tag{3.5}$$

aus denen in Verbindung mit dem Hilfssatze des § 2 die Richtigkeit des behaupteten Satzes folgt.

4.—Es ist sehr leicht die Einheitsfunktionen, die mit den gewöhnlichen Polynomen viele Eigenschaften gemeinsam haben, explizite zu berechnen. Zunächst folgt aus ihrer Definition unmittelbar der

Satz 2.—Das Produkt von zwei Einheitsfunktionen $E_1(z)$ *und* $E_2(z)$ *ist wieder eine Einheitsfunktion. Der Quotient*

$$\frac{E_2(z)}{E_1(z)}$$

ist ebenfalls eine Einheitsfunktion, falls er eine im Einheitskreise reguläre Funktion darstellt.

Aus der Tatsache, dass die Nullstellen einer Einheitsfunktion E(z) sich nicht gegen den Rand des Kreises $|z| < 1$ häufen können, folgt, dass E(z) nur höchstens endlich viele Nullstellen innerhalb des Kreises enthalten kann. Die Anzahl dieser Nullstellen soll der *Grad* der Einheitsfunktion genannt werden.

Ist E(z) nicht konstant, so ist $|E(o)| < 1$ und es gibt mindestens einen Kreis $|z| = r < 1$, sodass in jedem Punkte ζ dieses Kreises, immer $|E(\zeta)| > |E(o)|$ ist. Hieraus folgt genau ebenso, wie für Polynome, dass E(z) mindestens eine

Nullstelle besitzt. Bemerkt man endlich, dass jede konstante Einheitsfunktion notwendig die Gestalt $E(z) \equiv e^{i\vartheta}$ haben muss, so erhält man den

Satz 3.—Jede Einheitsfunktion $E(z)$ *besitzt innerhalb des Einheitskreises höchstens endlich viele Nullstellen, deren Anzahl der Grad von* $E(z)$ *genannt wird. Jede nicht konstante Einheitsfunktion ist mindestens vom ersten Grade. Jede konstante Einheitsfunktion hat die Gestalt* $E(z) \equiv e^{i\vartheta}$.

Wir beweisen jetzt den

Satz 4.—Sind α *und* $\bar{\alpha}$ *zwei konjugiert komplexe Zahlen, und ist die Bedingung* $|\alpha| < 1$, *erfüllt, so stellt der Ausdruck*

$$\varepsilon(z, \alpha) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z} \tag{4.1}$$

eine Einheitsfunktion dar. Jede Einheitsfunktion p^{ten} Grades *kann dargestellt werden in Form eines Produktes*

$$E(z) = e^{i\vartheta}.\ \varepsilon(z_1, \alpha_1) \ldots \varepsilon(z_1, \alpha_p). \tag{4.2}$$

Die rationale Funktion (4.1), deren einziger Pol

$$z = \frac{1}{\bar{\alpha}}$$

ausserhalb des Einheitskreises liegt, ist auf dem abgeschlossenen Kreis $|z| \leq 1$ regulär. Für einen Punkt ζ der Peripherie des Einheitskreises ist, wenn man mit $\bar{\zeta}$ die zu ζ konjugierte Zahl bezeichnet, $\zeta\,\bar{\zeta} = 1$ und infolgedessen ist

$$\varepsilon, (\zeta\, \alpha) = \frac{\bar{\zeta}(\alpha - \zeta)}{\bar{\zeta}(1 - \bar{\alpha}\zeta)} = -\bar{\zeta}\, \frac{\alpha - \zeta}{\bar{\alpha} - \bar{\zeta}}. \tag{4.3}$$

Jeder der Faktoren auf der rechten Seite dieser Gleichung hat den absoluten Betrag Eins; es ist also $|\varepsilon(\zeta, \alpha)| = 1$ und daher ist $\varepsilon(z, \alpha)$ eine Einheitsfunktion.

Der zweite Teil des Satzes 4 folgt sofort aus dem Satze 2, wenn man die p Nullstellen von $E(z)$ mit $a_1, \ldots, a_p$ bezeichnet.

5.—Es sei jetzt $h(z)$ eine im Einheitskreise unimodular beschränkte Funktion, die in einem inneren Punkte z_0 dieses Kreises der Bedingung

$$h(z_0) = 0 \tag{5.1}$$

genügt. Wir definieren eine Funktion $\varphi(z)$ durch die Gleichung

$$h(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}\, \varphi(z). \tag{5.2}$$

Wegen der beiden letzten Relationen kann man schreiben

$$\varphi(z) = (1 - \bar{z}_0 z) \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}, \tag{5.3}$$

woraus folgt, dass $\varphi(z)$ eine im Einheitskreise reguläre Funktion sein muss. Nach dem Satze 1 des § 3 ist also $\varphi(z)$ unimodular beschränkt und es folgt also aus (5.2)

$$h(z) \leqq \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}, \tag{5.4}$$

eine Relation, die in das klassische Schwarzsche Lemma übergeht, wenn man für z_0 den speziellen Wert Null wählt.

In (5.4) kann das Gleichheitszeichen nur dann angenommen werden, wenn $\varphi(z)$ eine konstante Einheitsfunktion ist, und es gilt daher der

Satz 5 (Lemma von Schwarz).—*Ist die Funktion* $h(z)$ *im Einheitskreise unimodular beschränkt, ist ausserdem in einem inneren Punkte* z_0 *dieses Kreises* $h(z_0) = 0$, *so ist entweder in jedem von* z_0 *verschiedenen Punkt*

$$h(z) < \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}, \tag{5.5}$$

oder $h(z)$ *ist eine Einheitsfunktion ersten Gerades von der Gestalt*

$$h(z) = e^{i\vartheta} \frac{z_0 - z}{1 - \bar{z}_0 z}. \tag{5.6}$$

6.—Wenn man in (5.3) die Variable z gegen z_0 konvergieren lässt, so erhält man durch Grenzübergang

$$h'(z_0) = -\frac{\varphi(z_0)}{1 - z_0 \bar{z}_0}. \tag{6.1}$$

Dieses Resultat soll verallgemeinert werden. Wir betrachten eine unimodular beschränkte nicht konstante Funktion $g(z)$ und setzen

$$g(z_0) = c; \tag{6.2}$$

wir definieren eine Funktion $h(z)$ durch die Gleichung

$$h(z) = \frac{c - g(z)}{1 - \bar{c}\, g(z)} \tag{6.3}$$

und bemerken, dass $h(z)$ alle Eigenschaften besitzt, die im vorigen Paragraphen verlangt wurden. Aus (6.3) erhält man

$$g(z) = \frac{c - h(z)}{1 - \bar{c}\, h(z)} \tag{6.4}$$

und hieraus durch Differentiation

$$g'(z) = -\frac{1-\bar{c}\,c}{\left(1-\bar{c}\,h(z)\right)^2}\,h'(z). \tag{6.5}$$

Setzt man hierin $z = z_0$, so folgt aus (6. 1) und aus $h(z_0) = 0$

$$g'(z_0) = \frac{1-c\,\bar{c}}{1-z_0\bar{z}_0}\,\varphi(z_0). \tag{6.6}$$

Hieraus folgt weiter, wegen (3. 3)

$$\frac{1-|z_0|^2}{1-|g(z_0)|^2}\,|g'(z_0)| \leqq 1; \tag{6.7}$$

in dieser Relation kann das Gleichheitszeichen nur dann auftreten, wenn $\varphi(z) \equiv e^{i\vartheta}$ ist. Dann müssen aber die Funktionen $h(z)$ und $g(z)$ Einheitsfunktionen ersten Grades sein.

Ist umgekehrt

$$g(z) = e^{i\vartheta}\,\frac{\alpha - z}{1-\bar{\alpha}\,z}, \tag{6.8}$$

so findet man

$$\frac{1-z\bar{z}}{1-g(z)\,\bar{g}(z)}\,g'(z) = -\,e^{i\vartheta}\,\frac{1-\alpha\,\bar{z}}{1-\bar{\alpha}\,z}, \tag{6.9}$$

woraus folgt, dass

$$\frac{1-|z|^2}{1-|g(z)|^2}\,|g'(z)| \equiv 1 \tag{6.10}$$

ist. Es gilt also der

Satz 6.—Für jede unimodular beschränkte Funktion, die keine Einheitsfunktion ersten Grades ist, gilt in jedem Punkte des Einheitskreises die Relation

$$|g'(z)| < \frac{1-|g(z)|^2}{1-|z|^2}. \tag{6.11}$$

Ist aber $g(z)$ *eine Einheitsfunktion ersten Grades, so hat man immer*

$$|g'(z)| \equiv \frac{1-|g(z)|^2}{1-|z|^2}. \tag{6.12}$$

Bekanntlich ist dieser Satz, wenn man den Kreis $|z| < 1$ als Nichteuklidische Ebene deutet, nichts anderes als der Satz von *Pick.* Wir wollen aber unsere Untersuchung in anderer Richtung fortsetzen.

7.—Die rechte Seite von (6. 11) erhält bei festgehaltenem z ihren grössten Wert für $g(z) = 0$. Es gilt also der

Satz 7.—Wir bilden für einen festen Punkt z_0 *des Einheitskreises die* *obere Grenze* $M(z_0)$ *von* $f'(z_0)$ *für alle unimodular beschränkten Funktionen. Dann ist*

$$M(z_0) = \frac{1}{1 - |z_0|^2} \tag{7.1}$$

und diese obere Grenze wird nur für die Einheitsfunktionen ersten Grades erreicht, die in z_0 *verschwinden.*

Durch Abschätzung des Cauchyschen Integrales würde man ein ähnliches, allerdings viel unvollkommeneres Resultat erhalten, das in der Relation

$$M(z_0) \leq \frac{1}{(1 - |z_0|)^2} \tag{7.2}$$

besteht.

8. - Das Ziel unserer Untersuchung ist eine ähnliche obere Grenze $M_0(z_0)$ für alle $|f'(z_0)|$ zu bestimmen, wenn wir von den betrachteten unimodular beschränkten Funktionen noch verlangen, dass sie der Gleichung

$$f(0) = 0 \tag{8.1}$$

genügen sollen. In diesem Falle kann man schreiben

$$f(z) = z \, . \, g(z), \tag{8.2}$$

wobei $g(z)$ wieder unimodular beschränkt ist. Durch Differentiation von (8.2) erhalten wir

$$f'(z) = g(z) + z\, g'(z)$$

und hieraus, wenn wir die Bezeichnungen des § 6 benutzen und insbesondere (6.6) beachten

$$f'(z_0) = c + z_0 \frac{1 - c\bar{c}}{1 - z_0 \bar{z}_0} \varphi(z_0) \, . \tag{8.3}$$

Hieraus folgt weiter

$$|f'(z_0)| \leq |c| + |z_0| \frac{1 - |c|^2}{1 - |z_0|^2} \, ; \tag{8.4}$$

wir bemerken, dass die rechte Seite dieser Relation die genaue obere Grenze von $|f'(z_0)|$ darstellt, die bei vorgeschriebenem Werte von c wirklich erreicht wird, wenn man in (8.3) die Grösse $\varphi(z_0)$ geeignet wählt. Ferner bemerken wir, dass (8.4) auch für $|c| = 1$ richtig bleibt.

Setzt man also

$$|c| = \gamma \, , \quad |z_0| = r \, , \tag{8.5}$$

so ist

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\gamma(1 - r^2) + r(1 - \gamma^2)}{1 - r^2} \, . \tag{8.6}$$

Wir müssen die obere Grenze der rechten Seite dieser Relation bestimmen, wenn γ zwischen Null und Eins variiert.

Zu diesem Zwecke betrachten wir die Funktion

$$\Psi(\gamma) = \gamma(1-r^2) + r(1-\gamma^2) = \frac{(1+r^2)^2}{4r} - r\left(\gamma - \frac{1-r^2}{2r}\right)^2 \tag{8.7}$$

und bemerken, dass diese Funktion monoton wächst, solange

$$\gamma \leqq \frac{1-r^2}{2r} \tag{8.8}$$

bleibt, um für grössere Werte von γ wieder abzunehmen. Ist also

$$\frac{1-r^2}{2r} \geqq 1, \tag{8.9}$$

so wird $\Psi(\gamma)$ seinen grössten Wert für $\gamma = 1$ erhalten. Ist aber

$$\frac{1-r^2}{2r} < 1, \tag{8.10}$$

so wird das Maximum von $\Psi(\gamma)$ für

$$\gamma = \frac{1-r^2}{2r} \tag{8.11}$$

erreicht. Nun nimmt die Funktion

$$\frac{1-r^2}{2r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)$$

monoton ab, wenn r von Null bis Eins wächst. Für

$$r = \sqrt{2} - 1 \tag{8.12}$$

ist $1 - r^2 = 2r$. Die Bedingungen (8.9) und (8.10) sind also gleichbedeutend mit $r \leqq \sqrt{2} - 1$ bzw. mit $r > \sqrt{2} - 1$.

9.—Wir haben also zwei verschiedene Fälle zu behandeln. Ist erstens

$$|z_0| \leqq \sqrt{2} - 1, \tag{9.1}$$

so müssen wir in (8.4)

$$\gamma = |c| = 1 \tag{9.2}$$

setzen und erhalten

$$|f'(z_0)| \leqq 1. \tag{9.3}$$

Die einzigen Funktionen für welche hierin das Gleichheitszeichen angenommen wird, erhält man, wenn man in (8.2) setzt $g(z) \equiv e^{i\vartheta}$; sie sind infolgedessen von der Form

$$f(z) = e^{i\vartheta} . z \tag{9.4}$$

Hat man zweitens

$$\sqrt{2} - 1 < z_0 < 1, \tag{9.5}$$

so müssen wir in $\Psi(\gamma)$ für γ den Wert (8.11) einsetzen, und wir erhalten nach (8.6) und (8.7)

$$f'(z_0) \leqq \frac{(1+z_0^2)^2}{4 z_0 (1-z_0^2)}. \tag{9.6}$$

Um jetzt die Funktionen zu berechnen, für welche hierin das Gleichheitszeichen gilt, beachten wir, dass in (8.6) das Gleichheitszeichen nur dann angenommen wird, wenn man in (8.3)

$$\varphi(z_0) = \frac{c}{\gamma} \cdot \frac{r}{z_0} \tag{9.7}$$

setzt und selbstverständlich $\varphi(z)$ konstant nimmt. Mit diesem Werte von $\varphi(z)$ berechnen wir $h(z)$ aus (5.2) und hierauf $g(z)$ aus (6.4); endlich setzen wir in die gefundene Formel für γ den Wert (8.11) ein. Man findet, dass $f(z)$ die Gestalt haben muss

$$f(z) = e^{i\vartheta}.z.\frac{(1-3z_0^2) + \bar{z}_0(1+z_0^2)z}{z_0(1+z_0^2) + (1-3z_0^2)z}. \tag{9.8}$$

Es kann schliesslich folgendes Resultat ausgesprochen werden:

Satz 8.— Wir bezeichnen mit $M_0(z_0)$ *die obere Grenze von* $f'(z_0)$ *für alle unimodular beschränkten Funktionen, die in Mittelpunkt des Einheitskreises verschwinden. Dann ist für* $|z_0| \leqq \sqrt{2} - 1$ *immer* $M_0(z_0) = 1$ *und die obere Grenze* $M_0(z_0)$ *wird nur für die Funktionen* $f(z) = e^{i\vartheta} z$ *erreicht.*

Für $z_0 > \sqrt{2} - 1$ *dagegen ist*

$$M_0(z_0) = \frac{(1+z_0^2)^2}{4|z_0|(1-z_0^2)}$$

und diese obere Grenze $|f'(z_0)|$ *wird nur für die Einheitsfunktionen zweiten Grades* (9.8) *erreicht.*

10.—Die Tatsache, dass für die Funktionen $f(z) = e^{i\vartheta} z$ die Gleichung

$$|f'(z_0)| = M(z_0) \tag{10.1}$$

in allen Punkten der abgeschlossenen Kreisscheibe (9.1) gleichzeitig gilt, erlaubt folgenden Satz auszusprechen:

Satz 9.— Wir betrachten die Abbildung, die durch die Gleichung $w = f(z)$ *erzeugt wird, wobei* $f(z)$ *den Bedingungen des Satzes* 8 *genügt. Dann ist die*

Länge einer Kurve C_w, *auf welche eine rektifizierbare Kurve* C_z *abgebildet wird, die keinen einzigen Punkt ausserhalb der Kreisscheibe* (9. 1) *besitzt, immer kleiner als die Länge von* C_z, *ausser für den Fall, dass* C_w *aus* C_z *durch eine Rotation des Einheitskreises um seinen Mittelpunkt entsteht.*

Für Kurven C_z die den Rand des Kreises (9. 1) überschreiten, reichen im Allgemeinen unsere Mittel nicht aus, um die genaue obere Grenze der Längen ihrer Bilder C_w zu berechnen. Wählen wir z. B. für C_z einen Bogen eines Kreises $|z| = r > \sqrt{2} - 1$, so ist es nicht unmöglich und sogar nicht unwahrscheinlich, dass das Verhältnis zwischen der Länge λ von C_z und der oberen Grenze der Längen aller möglichen Kurven C_w mit λ variiert. Dies hängt mit der Tatsache zusammen, dass für die Einheitsfunktionen (9. 8) die Gleichung $|f'(z)| = M_0(z)$ nur im einzigen Punkte z_0 des Kreises $|z| = z_0$ gilt. Eine Ausnahme bildet aber der Kreis

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad (10.2)$$

Der Punkt z_0 kann irgendwo auf diesem Kreise liegen, immer fallen die Funktionen (9. 8) mit den Funktionen

$$f(z) = e^{i\vartheta} z^2 \qquad (10.3)$$

zusammen; diese sind also von der speziellen Lage von z_0 auf dem Kreise (10. 2) unabhängig und wir können aus diesem Grunde folgenden merkwürdigen Satz aussprechen:

Satz 10.— Für alle unimodular beschränkten Funktionen $f(z)$, *die im Punkte* $z=0$ *verschwinden, wird jeder Kreisbogen von der Länge* λ, *der auf dem Kreise*

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

liegt, durch die Gleichung $w = f(z)$ *auf eine Kurve abgebildet, deren Länge die Grösse*

$$\frac{2\lambda}{\sqrt{3}} = 1,1547\ldots\lambda$$

nicht überschreitet. Diese maximale Länge wird dann und nur dann erreicht, wenn $f(z)$ *die Gestalt*

$$f(z) = e^{i\vartheta}.\, z^2$$

besitzt.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Θεωρεῖται τὸ σύνολον τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων $f(z)$ τῶν κανονικῶν ἐντὸς τοῦ κύκλου $|z| < 1$, τῶν ὁποίων τὸ μέτρον $|f(z)|$ δὲν ὑπερβαίνει οὐδαμοῦ τὴν μονάδα καὶ τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ εἰς τὸ κέντρον $z=0$ τοῦ κύκλου εἶναι ἴση πρὸς τὸ μηδέν. Ὑπολογίζεται διὰ τὸ σύνολον τοῦτο τὸ ἀνώτατον ὅριον τοῦ μέτρου $f'(z)$ τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων $f(z)$ εἰς δεδόμενον σημεῖον z_0 τοῦ κύκλου. Τοῦτο τὸ ὅριον ἀποτελεῖ συνάρτησιν τοῦ z_0 σταθερὰν μὲν ἐφ' ὅσον εὑρίσκεται ἡ z_0 ἐντὸς τοῦ κύκλου

$$|z_0| \leq \sqrt{2} - 1,$$

παρισταμένην δὲ διὰ τοῦ τύπου

$$\frac{(1+|z_0|^2)}{4|z_0|(1-|z_0|^2)}$$

ὅταν λαμβάνει τὸ $|z_0|$ μεγαλειτέρας τιμάς. Τὸ διπλοῦν τοῦτο συμπέρασμα ἀποτελεῖ συμπλήρωσιν τοῦ γνωστοῦ λήμματος τοῦ Schwarz, ἑρμηνευόμενον δὲ γεωμετρικῶς ἐπιτρέπει ἐφαρμογὰς εἰς τὴν θεωρίαν τῶν συμμόρφων ἀπεικονίσεων.

ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΟΝ ΔΙΚΑΙΟΝ.— Περὶ τοῦ ἐκκλησιαστικοῦ ἀξιώματος τοῦ πρωτεκδίκου, *ὑπὸ Κ. Μ. Ράλλη**.

I. — Ὁ πρωτέκδικος ἀποτελεῖ ἐκκλησιαστικὸν ἀξίωμα (ὀφφίκιον) ὅπερ ἐτάσσετο ὑπό τινων μὲν ἐκκλησιαστικῶν καταλόγων μετὰ τὸν σακελλίωνα καὶ πρὸ τοῦ ὑπομνηματογράφου[1] ὑπ' ἄλλων δὲ ἐν, τοῦ δεξιοῦ χοροῦ, τῇ τρίτῃ πεντάδι τῇ τάξει πρῶτον, καὶ δὴ πρὸ τοῦ ἱερομνήμονος[2]. Ἀλλ' ὁ Βαλσαμὼν ἐν τῷ ἑαυτοῦ ὑπομνήματι Καρθαγένης[3] τάσσει τὸν πρωτέκδικον μετὰ τὸν ἱερομνήμονα, ἤτοι ἐν τῇ γ' πεντάδι, τῇ τάξει δεύτερον. Ἀλλὰ τὸ ἀξίωμα τοῦ πρωτεκδίκου ἐν τοῖς ὑποβεβηκόσιν ὂν προὐβί-

* Ἐξήγησις συντετμημένων λέξεων:

A. D. = Acta et Diplomata, ed. Miklosich et Müller.
Α. Ε. Ι. = Ἀρχεῖον Ἐκκλησιαστικῆς Ἱστορίας.
Α. Ι. Σ. = Ἀνάλεκτα Ἱεροσολυμιτικῆς Σταχυολογίας.
A. P. = Acta Patriarchatus Konstantinopolitani, ed. Miklosich et Müller.
Β. Χ. = Βυζαντινὰ Χρονικά, Πετρουπόλεως.
B. Z. = Byzantinische Zeitschrift.
Ε. Α. = Ἐκκλησιαστικὴ Ἀλήθεια Κωνσταντινουπόλεως.
Κ.Δ.Π.Θ.Ι. Κανονικὸν δίκαιον τοῦ πατριαρχικοῦ θρόνου Ἱεροσολύμων ἐπὶ τῆς ἀρχιεπισκοπῆς Σινᾶ, 1868.
Ν. Ε. = Νέος Ἑλληνομνήμων.
Π. = Πατριάρχης.
Π. Ε. = Πατριαρχικὰ ἔγγραφα, ἐκδ. ὑπὸ Κ. Δελικάνη.
Συντ. = Σύνταγμα ἱερῶν κανόνων, ἔκδ. Γ. Α. Ράλλη καὶ Μ. Ποτλῆ.

[1] Τάξ. ὀφφικ. Μ. ἐκκλησίας ἐν Συντ., **5**, σ. 537.
[2] Ἑρμην. ὀφφικ. Μ. ἐκκλησίας ἐν Συντ., **5**, σ. 534.
[3] Συντ., **3**, σ. 385.