ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 10ΗΣ ΜΑΪΟΥ 2001

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΚΟΝΟΜΗ

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΒΙΒΛΙΟΥ

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Γεώργιος Κοντόπουλος** λέγει τὰ ἑξῆς:

Κύριε Πρόεδρε τῆς Ἀκαδημίας,
Κυρίες καὶ Κύριοι Συνάδελφοι,
Κυρίες καὶ Κύριοι,

Ἔχω τὴν τιμὴ νὰ παρουσιάσω σήμερα στὴν Ὁλομέλεια τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν τὸ βιβλίο τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Ν. Ἀρτεμιάδη μὲ τίτλο *«Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν (ἀπὸ τῆς σκοπιᾶς τοῦ μαθηματικοῦ)»*, ἔκδοση τῆς Ἐπιτροπῆς Ἐρευνῶν (2000) τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν. Πρόκειται γιὰ ἕνα σημαντικὸ σύγγραμμα 764 σελίδων γραμμένο σὲ ὕφος πρωτότυπο, μὲ ἀντικείμενο τὴν Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν.

Στὰ 40 κεφάλαια καὶ δύο παραρτήματα τοῦ ἔργου γίνεται μιὰ ἀναδρομὴ στὴν ἱστορία τῶν μαθηματικῶν περίπου ἀπὸ τὸ 500 π.Χ. μέχρι σήμερα. Τὸ σύγγραμμα ἀπευθύνεται κυρίως στοὺς νέους μαθηματικούς, σ' αὐτοὺς ποὺ βρίσκονται στὴν ἀρχὴ τῆς ἐπιστημονικῆς τους σταδιοδρομίας. Προσπαθεῖ νὰ παρουσιάσει στοὺς νέους τὴ γενικὴ κάτοψη τοῦ «δάσους» τῆς ἐπιστήμης τῶν μαθηματικῶν στὸ ὁποῖο ἐπιχειροῦν αὐτοὶ νὰ διεισδύσουν, τῆς ἐπιστήμης ποὺ εἶναι ἡ μητέρα ὅλων τῶν ἐπιστημῶν. Τὸ βιβλίο αὐτὸ θὰ βοηθήσει τοὺς νέους μαθηματικοὺς στὸ νὰ προσανατολισθοῦν πρὸς τὶς κατευθύνσεις ἐκεῖνες ποὺ ἀνταποκρίνονται στὴν ἀτομική τους ἐρευνητικὴ ἰδιοσυγκρασία καὶ στὰ δικά τους ἐνδιαφέροντα.

Τὸ ὅλο κείμενο συνοδεύεται συχνὰ ἀπὸ παρατηρήσεις, σχόλια καὶ ἀπόψεις φιλοσοφικοῦ περιεχομένου, οἱ ὁποῖες κατὰ κάποιο τρόπο ξεκουράζουν τὸν ἀναγνώστη. Τὸ βιβλίο αὐτὸ δὲν ἀκολουθεῖ τὴν κλασικὴ ὁδὸ τὴν ὁποίαν ἀκολουθοῦν πολλὰ καὶ ἀξιόλογα ἱστορικὰ συγγράμματα (παράθεση ὀνομάτων, ἡμερομηνιῶν, γεγονότων, συντόμων ἀναφορῶν στὸ θέμα κλπ.). Ἀντίθετα, καὶ ἐδῶ ἔγκειται μιὰ ἀπὸ τὶς πρωτοτυπίες τοῦ ἔργου, ὁ συγγραφέας ἐπικεντρώνει τὶς προσπάθειές του, στὸ νὰ παρουσιάσει τὰ μαθηματικὰ σὲ βασικὲς γραμμὲς κινούμενος σὲ γενικὰ ἱστορικὰ πλαίσια, κάτι ποὺ αἰτιολογεῖ καὶ τὸν ἐπεξηγηματικὸ ὑπότιτλο τοῦ βιβλίου, ὅτι δηλαδὴ πρόκειται περὶ ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν ἀπὸ τῆς σκοπιᾶς τοῦ μαθηματικοῦ.

Ἔχοντας πάντα κατὰ νοῦ τὸν ἀναγνώστη στὸν ὁποῖον ἀπευθύνεται, ὁ συγγραφέας ἐπιδιώκει νὰ παρουσιάσει μερικὲς ἀπὸ τὶς κυριώτερες μαθηματικὲς ἀνακαλύψεις καὶ δημιουργίες ἀπὸ τοὺς ἀρχαίους χρόνους μέχρι τὸ τέλος τοῦ 20οῦ αἰώνα. Ἡ προσπάθεια περιορίζεται στὴν παρουσίαση κεντρικῶν ἰδεῶν οἱ ὁποῖες εἶναι βασικὲς καὶ ἐπηρέασαν τὴν προαγωγὴ καὶ διαμόρφωση τῆς ἐν γένει μαθηματικῆς δραστηριότητας.

Ἔτσι ὁ ἀναγνώστης παίρνει μιὰ ἰδέα γιὰ τὸ τί εἶναι οἱ διάφοροι κλάδοι τῶν μαθηματικῶν, τί περιλαμβάνουν, καὶ ποιὰ εἶναι τὰ κυριώτερα προβλήματα ποὺ τοὺς ἀπασχολοῦν. Ἀπὸ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τὸ βιβλίο εἶναι πλουσιώτατο. Περιλαμβάνει θέματα ἄλγεβρας, γεωμετρίας, ἀναλύσεως, καθὼς καὶ νεώτερους κλάδους ὅπως εἶναι ἡ θεωρία τῶν συνόλων, ἡ τοπολογία, ἡ συναρτησιακὴ ἀνάλυση, ἡ μὴ εὐκλείδεια γεωμετρία, ἡ θεωρία τοῦ μετασχηματισμοῦ Fourier καὶ τῶν wavelets (κυματίων) καθὼς καὶ «Κατηγορίες» καὶ «Συναρτητὲς» (Functors). Ἡ Λογικὴ καὶ ἡ Γλῶσσα ἐξετάζονται ἐπίσης ἀπὸ τὴ σκοπιὰ τῶν μαθηματικῶν.

Γιὰ τὸν φοιτητὴ τῶν μαθηματικῶν τὸ βιβλίο αὐτὸ ἔχει καὶ μιὰ ἰδιαίτερη ἐπιπλέον ἀξία. Εἶναι γνωστὸ ὅτι τὰ συνήθη πανεπιστημιακὰ μαθήματα δίνουν τὴν ἐντύπωση ὅτι τὰ διάφορα διδασκόμενα θέματα δὲν ἔχουν μεγάλη σχέση μεταξύ τους. Ἡ ἱστορία ἀντιθέτως παρέχει μιὰ γενικὴ εἰκόνα ἡ ὁποία ὄχι μόνο συνδέει τὸ ἕνα θέμα μὲ τὸ ἄλλο, ἀλλὰ τὰ συνδέει ἐπίσης καὶ μὲ τὸ κύριο σῶμα τῆς μαθηματικῆς σκέψης. Ὁ συγγραφέας τονίζει ὅτι χωρὶς νὰ γνωρίζομε τὶς ἔννοιες, τὶς μεθόδους καὶ τὰ ἀποτελέσματα ποὺ ἀνεκάλυψαν καὶ ἀνέπτυξαν οἱ προηγούμενες γενεές, ξεκινώντας ἀπὸ τὴν ἐποχὴ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀντιληφθοῦμε τὰ ἐπιτεύγματα, ἀκόμα καὶ τῶν τελευταίων ἑκατὸ ἐτῶν.

Ὁ Leibniz ὑπεστήριζε ὅτι ἐκεῖνος ποὺ ἀντιλαμβάνεται τὸ ἔργο τοῦ Ἀρχιμήδη καὶ τὸ ἔργο τοῦ Ἀπολλωνίου, θὰ ἐκφράσει ὀλιγότερο θαυμασμὸ γιὰ τὰ ἐπιτεύγματα τῶν γενεῶν ποὺ ἀκολούθησαν. Διαβάζοντας τὸ σύγγραμμα τοῦ κ. Ἀρτεμιάδη ὁ ἀναγνώστης θὰ πεισθεῖ γιὰ τὸ λαμπρὸ ἡγετικὸ καὶ ἀποφασιστικὸ ρόλο τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος στὴν διαμόρφωση τοῦ ροῦ τῆς ἱστορίας τῶν μαθηματικῶν.

Στὸ εἰσαγωγικὸ κεφάλαιο τοῦ βιβλίου παρατίθενται μερικὲς γενικὲς σκέψεις καὶ ἀπόψεις ποὺ ἀφοροῦν τὴν ἱστορία καὶ τὴν φιλοσοφία τῶν μαθηματικῶν. Στὴ συνέχεια τὸ σύγγραμμα περιλαμβάνει τὰ Μέρη Ι καὶ ΙΙ.

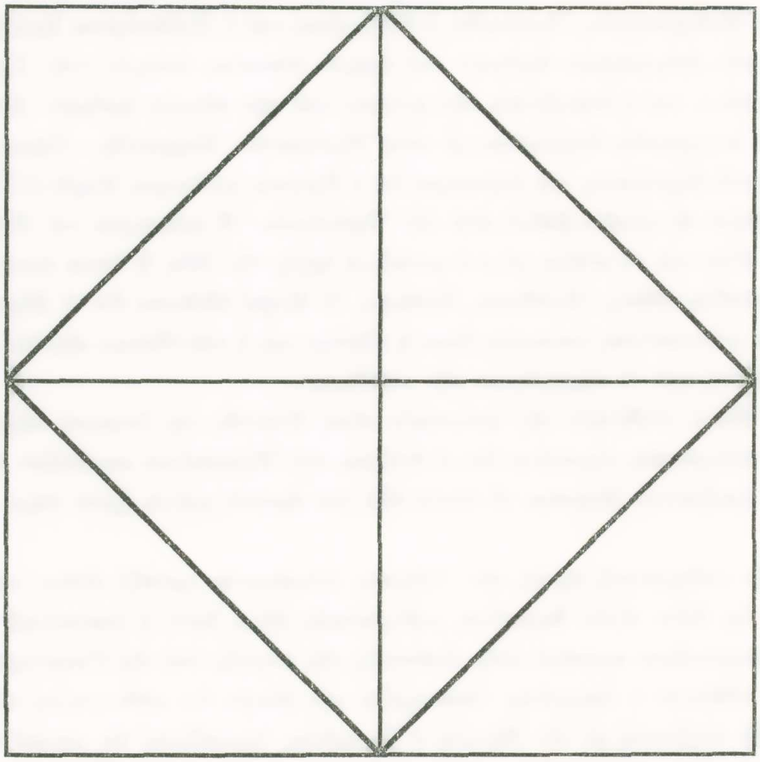
Μέρος Ι. Στὰ Κεφάλαια 1 καὶ 2 παρέχονται μερικὲς πρῶτες σύντομες πληροφορίες γιὰ τὰ μαθηματικὰ τῶν Αἰγυπτίων καὶ Βαβυλωνίων, ἐνῶ στὸ Κεφάλαιο 3 θίγονται μερικὰ θέματα ποὺ ἀφοροῦν τοὺς Πρώτους Ἀριθμούς. Στὰ Κεφάλαια 4, 5, 6, 7, 8 (συνολικὰ 50 σελ.) ὁ συγγραφέας ἀσχολεῖται διεξοδικὰ μὲ τὰ Μαθηματικὰ τῶν Ἀρχαίων Ἑλλήνων. Ἐδῶ γίνεται ἀναφορὰ στὸν Θαλῆ, ὁ ὁποῖος πρῶτος εἰσήγαγε τὴν ἀποδεικτικὴ μέθοδο στὰ Μαθηματικά, ἀλλάζοντας ἔτσι τὸν ροῦν τῆς ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν. Ἀκολουθεῖ ὁ Πυθαγόρας καὶ ἡ Πυθαγόρειος Σχολή, ἡ ἀνακάλυψη τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ποὺ ἔφεραν δύσκολες στιγμὲς στὴν Σχολὴ τῶν Πυθαγορείων, καὶ ἡ ἀνακάλυψη τῶν φιλικῶν καὶ τῶν τέλειων ἀριθμῶν. Στὸ Κεφάλαιο 6 ὁ συγγραφέας ἀσχολεῖται μὲ τοὺς Ἡράκλειτο - Παρμενίδη - Ζήνωνα - Ἐμπεδοκλῆ καὶ Δημόκριτο, καὶ παρατηρεῖ ὅτι ὁ Πρῶσος φιλόσοφος Hegel (1770-1831) ἐπηρεάσθηκε σὲ μεγάλο βαθμὸ ἀπὸ τὸν Ἡράκλειτο. Ἡ φιλοσοφία τοῦ Hegel ταυτίζει τὸ εἶναι καὶ τὴ σκέψη μὲ μιὰ μοναδικὴ ἀρχή, τὴν ἰδέα, ἡ ὁποία ἀναπτύσσεται σὲ τρία στάδια: Θέσις, Ἀντίθεσις, Σύνθεσις. Ὁ Hegel ἐδίδασκε ὅτι τὸ Σύμπαν εἶναι ἕνα εἶδος φιλονικούσας κοινωνίας ὅπου ἡ «θέσις» καὶ ἡ «ἀντίθεσις» αἰωνίως ἀλληλοσυγκρούονται γιὰ νὰ παραγάγουν τὴν «σύνθεση».

Ὁ Marx υἱοθέτησε τὴν φιλοσοφία αὐτὴ δίνοντάς της ὑλιστικὸ περιεχόμενο. Ἔτσι ὁ συγγραφέας σημειώνει ὅτι οἱ ἀπόψεις τοῦ Ἡρακλείτου κατέληξαν νὰ συνδεθοῦν μὲ μαρξιστικὰ δόγματα τὰ ὁποῖα ἐδῶ καὶ ἀρκετὰ χρόνια ἔχουν πάρει τὴν κατιοῦσα.

Στὴν μαθηματικὴ σχολὴ τῶν Ἀθηνῶν, ἀναφέρονται μεταξὺ ἄλλων καὶ ὁ Σωκράτης, ὄχι διότι αὐτὸς θεωρεῖται μαθηματικὸς ἀλλά, διότι ἡ ἐπαγωγικὴ μέθοδος ποὺ χρησιμοποίησε συντελεῖ στὴν ἀνάπτυξη τῆς λογικῆς καὶ τῆς Γεωμετρίας. Στὸν διάλογο «Μένων» ὁ Σωκράτης ὑποστηρίζει τὴν ἄποψη ὅτι κάθε γνώση εἶναι ἀνάμνηση. Σὲ συζήτηση μὲ τὸν Μένωνα ὁ Σωκράτης, ἰσχυρίζεται ὅτι μπορεῖ νὰ κάνει τὸν ὑπηρέτη του νὰ «θυμηθεῖ» κάποια γεωμετρικὴ κατασκευὴ καθὼς καὶ τὴν ἀπόδειξή της. Ζητεῖ λοιπὸν ἀπὸ τὸν ὑπηρέτη τοῦ Μένωνα ποὺ ἔχει πλήρη ἄγνοια τῆς γεωμετρίας νὰ κατασκευάσει τετράγωνο τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι διπλάσιο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς ἴσης μὲ 1. Ἡ πρώτη ἀντίδραση τοῦ ὑπηρέτη ἦταν νὰ διαπλασιάσει τὴν πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου. Σύντομα ὅμως παραδέχθηκε τὸ λάθος του. Ὁ Σωκράτης τοῦ ζητεῖ τότε νὰ παρατηρήσει τὸ σχῆμα 1, καὶ δὲν ἀργεῖ νὰ τὸν πείσει νὰ «θυμηθεῖ» ὅτι τὸ τετράγωνο μὲ πλευρὰ ἴση πρὸς τὴν διαγώνιο τοῦ ἀρχικοῦ τετραγώνου ἔχει ἐμβαδὸ διπλάσιο ἐκείνου τοῦ ἀρχικοῦ τετραγώνου.

Γενικώτερα στὸ Μέρος Ι, ὁ συγγραφέας ἀσχολεῖται μὲ τὴν Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν μέχρι τὰ τέλη περίπου τοῦ 18ου αἰῶνος. Μετὰ τὸ πέρας τοῦ 18ου αἰῶνος, τὰ μαθηματικὰ ἔχουν τὴν τάση νὰ ἀσχολοῦνται μὲ θέματα πιὸ ἐξειδικευμένα, πολλὰ ἀπὸ τὰ ὁποῖα εἶναι φυσικὸ νὰ εἶναι λιγότερο προσιτὰ στὸ ἀναγνωστικὸ κοινὸ στὸ ὁποῖο τὸ σύγγραμμα ἀπευθύνεται.

Τὸ Μέρος II ἀσχολεῖται μὲ ὡρισμένα πιὸ ἐξειδικευμένα θέματα τὰ ὁποῖα ἀναπτύχθηκαν κατὰ τοὺς δύο τελευταίους αἰῶνες καὶ στὰ ὁποῖα σημειώθηκαν θεαματικὲς πρόοδοι. Ἐπίσης στὶς σύντομες βιογραφίες ποὺ παρατίθενται μερικῶν μαθη-



Σχῆμα 1

ματικῶν τῶν δύο τελευταίων αἰώνων, δίνεται ἡ εὐκαιρία στὸν ἀναγνώστη νὰ παρακολουθήσει τὴν ἐξέλιξη τῆς ἐρευνητικῆς πορείας τῆς ἐπιστήμης.

Μιὰ ἀπὸ τὶς κύριες κατευθύνσεις τοῦ βιβλίου εἶναι ἡ παρακολούθηση τῆς ἐξελίξεως τῶν μαθηματικῶν ἐννοιῶν καὶ τῆς αὐστηρότητος καὶ ἀκριβείας τῶν μαθηματικῶν ἀποδείξεων. Οἱ περισσότεροι κλάδοι τῶν μαθηματικῶν ξεκίνησαν ἀπὸ ἁπλὲς παρατηρήσεις καὶ μόνον πολὺ ἀργότερα πῆραν τὴν μαθηματικὴ αὐστηρότητα ποὺ ἀπαιτεῖται.

Ἕνα παράδειγμα εἶναι ἡ μὴ εὐκλείδεια γεωμετρία, ποὺ ἄρχισε νὰ τὴν μελετᾶ ὁ περίφημος γερμανὸς μαθηματικὸς Gauss τὸ 1813, χωρὶς ὅμως νὰ δημοσιεύσει τὶς σχετικὲς ἐργασίες του. Ἔτσι ἡ μὴ εὐκλείδεια γεωμετρία παρουσιάστηκε τὸ 1892 ἀπὸ τὸν ρῶσο Lobachevsky καὶ συγχρόνως, ἀλλὰ ἀνεξάρτητα ἀπὸ αὐτόν, ἀπὸ τὸν οὗγγρο Bolyai. Στὸ Κεφάλαιο μὲ τίτλο «Ἡ Γεωμετρία τῆς Ἐμπειρίας» πολὺ ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ διερεύνηση γιὰ τὴν ἐξακρίβωση τῆς φύσης τῆς Γεωμετρίας τοῦ Φυσικοῦ κόσμου.

Αὐστηρὲς ἀποδείξεις ὅτι ἡ μὴ εὐκλείδεια γεωμετρία εἶναι ἀπαλλαγμένη ἀπὸ ἀντιφάσεις, ἂν καὶ ἡ εὐκλείδεια γεωμετρία εἶναι ἀπαλλαγμένη ἀπὸ ἀντιφάσεις, ἔδωσαν ὁ Beltrami καὶ ὁ Poincaré.

Ἐνῶ ἡ γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδου δέχεται ὡς ἀξίωμα ὅτι ἀπὸ ἕνα σημεῖο ἐκτὸς εὐθείας ἄγεται μία μόνο παράλληλος πρὸς αὐτήν, ἡ γεωμετρία τῶν Lobachevsky-Bolyai, δέχεται ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρες παράλληλοι. Ἡ γεωμετρία αὐτὴ λέγεται «ὑπερβολική». Ἀργότερα ὁ Riemann διατύπωσε τὴν «ἐλλειπτικὴ» γεωμετρία, ἡ ὁποία δέχεται ὅτι ἀπὸ ἕνα σημεῖο ἐκτὸς εὐθείας οὐδεμία παράλληλος ἄγεται. Καὶ αὐτὴ ἡ γεωμετρία εἶναι κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο ἀπαλλαγμένη ἀντιφάσεων.

Ὅπως τονίζεται στὸ βιβλίο τοῦ κ. Ἀρτεμιάδη ἡ διερεύνηση τῆς μὴ ὑπάρξεως ἀντιφάσεων στὰ μαθηματικὰ ἀποτελεῖ τὸ κύριο πρόβλημα τῶν συγχρόνων μαθηματικῶν. Τὸ πρόβλημα εἶναι ἂν τὰ ἀξιώματα τῶν μαθηματικῶν (π.χ. τὰ ἀξιώματα τῆς γεωμετρίας τοῦ Εὐκλείδου) δὲν ὁδηγοῦν ποτὲ σὲ ἀντιφάσεις. Τὴν κύρια προσπάθεια πρὸς τὴν κατεύθυνση αὐτὴ τὴν ἔκαμε ὁ Hilbert. Ἡ ἄποψη τοῦ Hilbert εἶναι ὅτι τὰ ἀξιώματα ἀποτελοῦν ἕνα τυπικὸ σύστημα ποὺ δὲν συνδέεται ἄμεσα μὲ τὰ φυσικὰ ἀντικείμενα. Π.χ. στὰ ἀξιώματα τοῦ Εὐκλείδου γίνεται λόγος γιὰ σημεῖα, εὐθεῖες καὶ ἐπίπεδα. Ἀλλὰ ὅλα αὐτὰ εἶναι ἰδεατὲς ἔννοιες, δηλαδὴ τὸ σημεῖο δὲν εἶναι ἁπλῶς μιὰ κουκίδα μὲ τὸ μολύβι μας, ἡ εὐθεῖα δὲν εἶναι μιὰ τεντωμένη κλωστή, οὔτε τὸ ἐπίπεδο μιὰ τεντωμένη μεμβράνη. Αὐτὲς οἱ εἰκόνες εἶναι χρήσιμες σὰν ἕνα προσεγγιστικὸ μοντέλο. Π.χ. μιὰ τεντωμένη κλωστὴ ἔχει μιὰ μικρὴ κάμψη λόγω τοῦ βάρους της. Πάντως τὰ ἀξιώματα ἀναφέρονται σὲ κάποιο ἀφηρημένο σύστημα ἐννοιῶν, καὶ δὲν ἔχει σημασία ἂν οἱ ἔννοιες αὐτὲς προσεγγίζουν πρὸς διάφορα φυσικὰ ἀντικείμενα.

Ἡ σχολὴ τοῦ Hilbert ὀνομάζεται φορμαλιστική. Ὁ Hilbert ἀπέδειξε ὅτι ἡ εὐκλείδεια γεωμετρία εἶναι ἀπαλλαγμένη ἀντιφάσεων, ἂν ἡ ἀριθμητικὴ εἶναι ἀπαλλαγμένη ἀντιφάσεων.

Ἀλλὰ ἡ ἀριθμητικὴ παρουσιάζει ὡρισμένα ἰδιάζοντα προβλήματα. Π.χ. ὑπάρχουν ἄπειροι ἀριθμοὶ 1, 2, 3, ...,. Ἂν τώρα πάρουμε τοὺς ἄρτιους ἀριθμοὺς 2,4,6,... αὐτοὶ μποροῦν νὰ ἀντιστοιχηθοῦν, ἕνας πρὸς ἕνα, πρὸς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, ... Ἑπομένως τὸ πλῆθος τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδύναμο πρὸς τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, δηλαδὴ οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ δὲν εἶναι λιγότεροι συνολικὰ ἀπὸ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς. Λέμε ὅτι τόσο οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ ὅσο καὶ οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν δύο ἰσοδύναμα ἀριθμήσιμα σύνολα.

Ἂν ὅμως πάρουμε ὅλους τοὺς ἀριθμούς, ρητοὺς καὶ ἀρρήτους, αὐτοὶ εἶναι περισσότεροι ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει κανεὶς τρόπος νὰ ἀντιστοιχηθοῦν ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ μὲ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς. Αὐτὸ τὸ ἐκφράζουμε μὲ τὴ φράση ὅτι «οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν τὴν δύναμη τοῦ συνεχοῦς», δηλαδὴ εἶναι περισσότερο ἄπειροι ἀπὸ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3... Ὅμως ἡ θεωρία τῶν ἀπείρων καὶ γενικώτερα ἡ θεωρία τῶν συνόλων δημιουργεῖ ὡρισμένα παράδοξα.

Ἕνα πολὺ ἁπλὸ παράδειγμα εἶναι τὸ παράδοξο τοῦ κουρέα. Σ' ἕνα χωριὸ ὑπάρχουν δύο κατηγορίες ἀνθρώπων. (α) Αὐτοὶ ποὺ ξυρίζονται μόνοι τους, καὶ (β) αὐτοὶ ποὺ ξυρίζονται ἀπὸ τὸν κουρέα τοῦ χωριοῦ ὁ ὁποῖος ἔχει γένια καὶ ἔχει ἀνάγκη ξυρίσματος. Τότε ὁ κουρέας σὲ ποιὰ κατηγορία ἀνήκει; Ἂν ἀνήκει στὴν πρώτη κατηγορία, δηλαδὴ ἂν ξυρίζεται μόνος του, τότε ξυρίζεται ἀπὸ τὸν κουρέα τοῦ χωριοῦ καὶ ἀνήκει στὴν δεύτερη κατηγορία. Ἂν ὅμως ἀνήκει στὴν δεύτερη κατηγορία, τότε ξυρίζεται ἀπὸ τὸν κουρέα, δηλαδὴ ἀπὸ τὸν ἑαυτό του, δηλαδὴ ἀνήκει στὴν πρώτη κατηγορία. Τὸ παράδοξο αὐτὸ λύνεται εὔκολα. Ἀλλὰ στὴ θεωρία τῶν συνόλων ὑπάρχουν πολὺ πιὸ σοβαρὰ ἀνάλογα παράδοξα ποὺ ἀφοροῦν τοὺς διαφόρους τύπους τῶν ἀπείρων.

Τὶς δυσκολίες αὐτὲς ἀντιμετωπίζει ἡ Λογικὴ Σχολὴ τῶν Μαθηματικῶν τῶν Russell καὶ Whitehead. Ἡ Σχολὴ αὐτὴ δέχεται ὅτι τὰ μαθηματικὰ εἶναι κλάδος τῆς λογικῆς.

Μιὰ ἄλλη ἐντελῶς διαφορετικὴ ἀντιμετώπιση τῶν προβλημάτων θεμελιώσεως τῶν μαθηματικῶν διατυπώθηκε ἀπὸ τοὺς Kronecker καὶ Brouwer. Αὐτοὶ δέχονται μόνο τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ὅσους ἀριθμοὺς προκύπτουν ἄμεσα ἀπὸ αὐτοὺς (ὅπως εἶναι οἱ ρητοὶ ἀριθμοί). Δὲν δέχονται τοὺς ἀρρήτους ἀριθμούς, οὔτε τὰ διάφορα εἴδη ἀπείρων. Γενικὰ δέχονται ὡς ἀποδείξεις μόνον τὶς λεγόμενες «κατασκευαστικὲς ἀποδείξεις», δηλαδὴ δέχονται μόνον ὅσα μποροῦν νὰ ἀποδειχθοῦν μὲ μιὰ ὡρισμένη κατασκευή. Δὲν δέχονται τὴν εἰς ἄτοπον ἀπαγωγή. Δηλαδὴ ἂν ἀποδείξει κανεὶς ὅτι δύο τρίγωνα δὲν εἶναι ἄνισα, αὐτὸ δὲν σημαίνει ὅτι εἶναι ἴσα.

Ἡ Σχολὴ τῶν Kronecker καὶ Brouwer λέγεται Διαισθητικὴ Σχολὴ καὶ ἀπορρίπτει ἕνα μεγάλο μέρος τῶν μαθηματικῶν.

Τέλος ἡ Φορμαλιστικὴ Σχολὴ τοῦ Hilbert προσπαθεῖ νὰ περισώσει ὅλα τὰ γνωστὰ μαθηματικά, συμπεριλαμβανομένων τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν, τῆς ἀρχῆς τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλείσεως καὶ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων, μὲ κατάλληλα ἀξιώματα.

Ἀλλὰ στὸ ἐρώτημα, ἂν τὰ γνωστά μας ἀξιώματα τῆς γεωμετρίας ἢ τῆς ἀριθμητικῆς περιέχουν ἢ ὄχι ἀντιφάσεις, ἡ Σχολὴ τῶν Φορμαλιστῶν δὲν ἔδωσε ἀπάντηση.

Ἀντίθετα ὁ αὐστριακὸς μαθηματικὸς Gödel ἀπέδειξε τὸ 1931 ὅτι οἱοδήποτε σύστημα ἀξιωμάτων δὲν μπορεῖ ποτὲ νὰ ἀποδείξει ὅτι στερεῖται ἀντιφάσεων. Τὸ θεώρημα τοῦ Gödel δὲν λέει ὅτι ὑπάρχουν ἀντιφάσεις στὰ μαθηματικά, ἀλλὰ μόνον ὅτι ποτὲ δὲν θὰ μπορέσει νὰ ἀποδειχθεῖ ἡ ἔλλειψη ἢ ὄχι ἀντιφάσεων.

Τὸ θεώρημα αὐτὸ ἀφήνει μετέωρο τὸ ὅλο σύστημα τῶν μαθηματικῶν. Σωστὰ θεωρεῖται ὅτι ἀποτελεῖ τὴν σημαντικότερη συμβολὴ στὴ Λογικὴ ἀπὸ τὴν ἐποχὴ τοῦ Ἀριστοτέλους.

Πάντως μέχρι τώρα δὲν βρέθηκαν ἀντιφάσεις στὰ μαθηματικά, ἐκτὸς ἀπὸ ὡρισμένα παράδοξα τῆς θεωρίας τῶν συνόλων, τὰ ὁποῖα ἀντιμετωπίζουν κατὰ κάποιο τρόπο οἱ διάφορες Σχολὲς τῶν μαθηματικῶν. Ἔτσι ὁ γερμανὸς μαθηματικὸς Weyl εἶπε: «Ὁ Θεὸς ὑπάρχει ἐπειδὴ τὰ μαθηματικὰ εἶναι συνεπῆ, ὁ δὲ διάβολος ὑπάρχει ἐπειδὴ δὲν μποροῦμε νὰ ἀποδείξουμε τὴν συνέπεια τῶν μαθηματικῶν».

Μέσα τὸ βιβλίο τοῦ κ. Ἀρτεμιάδη, βρίσκει κανεὶς πολλὰ ἄλλα παραδείγματα ἀπὸ τὴν ἐξέλιξη τῶν Μαθηματικῶν μέχρι τῶν ἡμερῶν μας. Τὸ βιβλίο κλείνει μὲ ἕνα χρονολογικὸ πίνακα ποὺ ἔχει τὶς διάφορες χρονολογίες στὴν ἀνάπτυξη τῶν μαθηματικῶν καὶ παράλληλα τὰ διάφορα ἱστορικὰ γεγονότα. Κάνει ἐντύπωση στὸν ἀναγνώστη ὅτι τὸ βιβλίο αὐτὸ καλύπτει ἱκανοποιητικὰ τοὺς διαφόρους κλάδους τῶν μαθηματικῶν. Αὐτὸ εἶναι ἰδιαίτερα σημαντικὸ γιατὶ συνήθως οἱ μαθηματικοὶ εἶναι «περιχαρακωμένοι» σὲ ἕνα ἰδιαίτερο κλάδο καὶ ἀγνοοῦν τοὺς ἄλλους κλάδους τῶν μαθηματικῶν. Ἀντίθετα ὁ κ. Ἀρτεμιάδης παρουσιάζει μιὰ εὐρύτητα γνώσεων ποὺ ξενίζει εὐχάριστα.

Ἐπίσης μοῦ ἔκανε ἐντύπωση ὅτι, παρόλον ὅτι διάβασα ἀρκετὰ λεπτομερῶς τὸ βιβλίο, δὲν βρῆκα παρὰ ἐλάχιστα παροράματα.

Τέλος, ὁ κ. Ἀρτεμιάδης ἀναφερόμενος στὰ θέματα ποὺ δὲν συμπεριέλαβε στὸ σύγγραμμά του προσθέτει: «Δυστυχῶς, αὐτὸ ποὺ λίγο ἀναγνωρίζεται εἶναι ὅτι τὰ πιὸ ἀξιόλογα ἐπιστημονικὰ βιβλία εἶναι ἐκεῖνα στὰ ὁποῖα ὁ συγγραφέας ὑποδεικνύει τὰ θέματα ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα αὐτὸς ἀγνοεῖ. Διότι ὁ συγγραφέας ποὺ περισσότερο ἀπὸ κάθε ἄλλον βλάπτει τὸν ἀναγνώστη του, εἶναι ἐκεῖνος ποὺ «ἀποκρύπτει» ἀπὸ τὸν ἀναγνώστη τὶς δυσκολίες ποὺ ὁ ἴδιος ὡς συγγραφέας ἀντιμετωπίζει».

Τὸ ἐνδιαφέρον τοῦ βιβλίου αὐτοῦ γιὰ τοὺς Μαθηματικοὺς εἶναι πολὺ μεγάλο. Ἀκόμη καὶ ὅσοι ἐργάζονται κατ' ἐπάγγελμα στὰ μαθηματικὰ θὰ βροῦν νέα στοιχεῖα ποὺ θὰ ἐμπλουτίσουν τὶς γνώσεις τους καὶ τὴν προοπτικὴ μὲ τὴν ὁποίαν θὰ πρέπει νὰ ἀντιμετωπίζουν τὰ μαθηματικά.

Γι' αὐτὸ θεωρῶ ἀπαραίτητο κάθε Ἕλληνας μαθηματικὸς νὰ ἀποκτήσει τὸ βιβλίο τοῦ κ. Ἀρτεμιάδη. Συνέστησα μάλιστα στὸν κ. Ἀρτεμιάδη ὅτι θὰ ἦταν χρήσιμο τὸ βιβλίο του νὰ μεταφρασθεῖ στὴν Ἀγγλική.

Ἐξάλλου τὸ βιβλίο διαβάζεται ἐπίσης ἄνετα καὶ εὐχάριστα καὶ ἀπὸ ὅσους ἔχουν μόνο ἐρασιτεχνικὴ ἐπαφὴ μὲ τὰ μαθηματικὰ καὶ ἰδιαίτερα μὲ τὴν φιλοσοφία τῶν μαθηματικῶν καὶ γιαυτὸ τὸ συνιστῶ θερμά.