ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.—**Distance à valeurs dans un treillis et applications géométriques,** *par* ***L. Dokas****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημ. κ. Κωνστ. Παπαϊωάννου.

I. Considérons 2 ensembles $E \neq \emptyset$ et $\Delta \neq \emptyset$, le premier étant un ensemble fondamental, et le second, auxiliaire, muni d'une structure de treillis avec élément nul.

Considérons le produit cartésien $E \times E$, et une application $\sigma : E^2 \longrightarrow \Delta$ telle que

$$(x, x) \in E^2 \Longrightarrow \sigma(x, x) = \inf \Delta$$

$$\text{et } (x, y) \in E^2 \Longrightarrow \sigma(x, y) \in \Delta$$

*Définitions.*

1. On appelle boule, le sous-ensemble $\Pi(z, \varrho) \subset E$ défini de la façon suivante:

$$\Pi(z, \varrho) = \{x \mid x \in E \text{ et } \sigma(z, x) < \varrho, \ \varrho \in \Delta\}$$

L'ensemble $\Pi(z, \varrho)$ peut être un ensemble vide.

2. Si l'ensemble $\Pi(z, \varrho) - \{z\}$ est vide et $\varrho \neq \inf \Delta$, alors le point $z$ est défini comme point isolé.

3. On appelle frontière géométrique d'un voisinage $\Pi(z, \varrho)$, le sous-ensemble $\Pi^*(z, \varrho)$ de $E$ pour lequel on a $\sigma(z, x) = \varrho$

Le point $z$ est appellé centre de $\Pi(z, \varrho)$, et $\varrho$, son rayon.

4. Soit $A$ un sous-ensemble de $E$; on définit boule de centre $z$, par rapport à $A$, tout ensemble $\Pi_A(z, \varrho)$ satisfaisant à

$$x \in A \cap E \text{ et } \sigma(z, x) < \varrho$$

c'est-à-dire:

$$\Pi_A(z, \varrho) = \{x \mid x \in A \cap E \text{ et } \sigma(z, x) < \varrho, \ \varrho \in \Delta\}.$$

5. *Diamètre de* $\Pi(z, \varrho)$

Soit le produit

$$[\Pi_A(z, \varrho)] \times [\Pi_A(z, \varrho)] = \Pi^2_A(z, \varrho)$$

et soit l'ensemble

$$\{\sigma[\Pi^2_A(z, \varrho)]\}.$$

Notation: $\sup\{\sigma[\Pi^2_A(z, \varrho)]\} = \delta$, quand ce sup existe.

$\delta$ désigne alors le diamètre de $\Pi_A(z, \varrho)$.

---

* ΛΑΜΠΡΟΥ ΝΤΟΚΑ, Ἀπόστασις λαμβάνουσα τὰς τιμὰς της ἐντὸς δικτυωτοῦ καὶ γεωμετρικαὶ ἐφαρμογαί

6. *Points intérieurs du sous-ensemble A*

Un point $z \in A$ est intérieur à A, s'il existe une boule $\Pi(z, \varrho) \neq \emptyset$ et $\neq \{z\}$ avec $\varrho \neq$ inf. $\Delta$, qui soit un sous-ensemble de A.

z ainsi défini est appelé point intérieur à A.

7. *Ensemble ouvert.*

Si tous les points d'un sous-ensemble A sont interiéurs à A, alors A est ouvert.

8. *Ensemble fermé.*

C'est le complémentaire de l'ensemble ouvert.

9. Le plus grand sous-ensemble ouvert, d'un sous-ensemble, est défini comme noyau ouvert, et noté $\mathring{A}$.

Le plus petit sur-ensemble fermé d'un sous-ensemble A est appelé enveloppe fermée de A et noté $\bar{A}$.

*Remarque:* La frontière géometrique d'une boule ne coincide pas en *général avec* sa frontière topologique. C'est-à-dire:

$$\Pi(z, \varrho) - \Pi(\overset{\circ}{z}, \varrho) \neq \Pi^*(z, \varrho)$$

Pour que la frontière géométrique soit la même que la frontière topologique, il faudrait avoir une structure plus large. C'est un problème à considérer.

*Proposition.* Par l'introduction des définitions, et des conditions exposées ci-dessus, l' espace E devient un espace topologique ordinaire. On vérifie facilement les axiomes des ouverts.

*Remarque*: L'espace ainsi établi est un espace généralisé, généralisation des les espaces métriques. Il contient entre autres, l'espace euclidien, si l'on considère E comme l'ensemble $\{(a_1, a_2, \dots a_n), a_i \in R,\}$ et D, comme l' ensemble des nombres réels traités par l'analyse classique.

On ne sait pas si pour chaque point il existe un système fondamental de voisinages non triviaux.

*Proposition.*

Si l'on ajoute les conditions suivantes pour la fonction $\sigma$

$$1)\ \sigma(x, y) = \sigma(y, x) \quad \forall\ (x, y) \in E^2$$

$$2)\ \forall\ \varrho_i \neq \inf\Delta\ \exists\ \varrho_j \neq \inf\Delta \text{ tel que.}$$

$$\sigma(y, z) < \varrho_j,\ \sigma(x, y) < \varrho_j \Longrightarrow (\sigma\ x, z) < \varrho_i$$

l' espace E devient un espace uniforme.

Soit U l'ensemble des sous-ensembles $A_i$ de $E \times E$ où

$$A_i = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \mid \sigma(x, y) < \varrho_i \\ \text{avec } \varrho_i \neq \inf\Delta \end{array} \right\}$$

$A_i$ ainsi défini, est appelé entourage.

Si l'on ajoute la conditions,

3) $\sigma(x, y) = \inf\Delta \Longrightarrow y = x$ alors il devient évident que l'espace E est un espace uniforme séparé, car

$\cap A = \mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est la diagonale de E.

$A \in u$

*Proposition.* Si

1) $U = \{V\varrho, \forall\varrho\}$ et $V\varrho = \{(x, y) \mid \sigma(x, y) < \varrho\}$

2) $V\varrho(x_o)$ est la coupe, c'est-à-dire

$V\varrho(x_o) = \{y \mid \sigma(x_o, y) < \varrho\}$

3) $\mathscr{B}(x_o) = \{V_\varrho(x_o)\ v_\varrho)\}$

Alors, les ensembles $\mathscr{B}(x_o)$ $\forall x_o \in E$ sont les filtres des voisinages des $x_o$ d'une topologie sur E déduit de la structure uniforme.

*Remarque*: Cette topologie coincide avec la topologie définie au début, mais pour elle, nous avons des voisinages non triviaux pour chaque élément de E.

II

On suppose en plus ci-dessous que $\Delta$ est complet au sens de Dedekind-MacNeille.

*Définition.*

Soient un sous-ensemble B de E, et x un élément quelconque de E.

Par définition, x satisfait à la relation

$R_1$ avec B à y ($y \in B$) notée

$$x \underset{y}{R_1} B$$

si

a) $\exists\ \Pi B(y, \varrho) \in \Omega B(y) = \{$ensemble des boules de centre y et de rayon $\varrho \neq \inf. \Delta\}$.

b) $$\sup\{[\sigma(\{x\})] \ X\ [\Pi^*_B(y, \varrho)]\} = \inf\{\sigma[\{x\}]\ X\ [\Pi^*_B(y, \varrho)]\}$$

*Remarque*: L'élément x peut être isolé dans E, de même que y dans B. Pour cela, il suffit qu'il existe une frontière géométrique.

$$\Pi^*(y, \varrho) \subset B$$

*Définition.*

Soient A et B, deux ensembles de E, tels que:

a) $A \cap B = \{z\}$

b) $\exists\ \Pi_B (z, \varrho) \neq \emptyset$ ou $\neq \{z\}$

c) $\forall\ x \in A\ \sup\{\sigma\,[\{x\}\ \ x\ \ \Pi^*_B (z, \varrho)\} =$

$\inf\{\sigma\,[\{x\}]\ \ x\ \ \Pi^*_B (z, \varrho)$

alors A satisfait à la relation $R_1$ avec B à z ($z \in B$), ce qui sera noté:

$$A \underset{z}{R_1} B$$

*Remarque*: La relation $R_1$ n'est pas symétrique en général, c'est-à-dire:

a) $A\ \ R_1\ \ B \not\Longrightarrow B\ \underset{z}{R_1}\ A$

b) $x \in A$ et $y \in B$ $\ x\ \underset{y}{R_1}\ B \Longrightarrow y\ \underset{x}{R_1}\ B$

Si l'on a $A \underset{z}{R_1} B$ et $B \underset{z}{R_1} A$ à la fois, on dit qu' il existe une relation $R_1$ entre A et B au point z.

*Généralisation.*

Soient A et B, deux sous-ensembles de E. On suppose que pour A et B, il existe deux partitions $\mathscr{P}A$ et $\mathscr{P}B$, c'est-à-dire

$$\mathscr{P}A = \underset{i \in I}{\cup} A_i \quad \text{et} \quad \mathscr{P}B = \underset{J \in I}{\cup} B_j$$

et de plus, si

a) il y une application $\varphi$ de l'ensemble des classes de A dans l'ensemble des classes de B

$\varphi\,(A_i) = B_j$ où $B_j$ est une classe de B.

b) $B_j \cap A_i = \{z_{ij}\}$

c) $A_i \underset{z_{ij}}{R_1} B_j \qquad \forall\ (i, j) \in I \times I$

Dans ces conditions, on dit que A satisfait à la relation $R_1$ avec B à l'intersection $A \cap B$, et on note

$$A \underset{A \cap B}{R_1} B$$

*Proposition.*

Soient $A \subset E$ et un élément $z \in C_E A$, si

a) il existe $z_0 \in A$ tel que $z \underset{z_0}{R_1} A$

b) $\inf \{\sigma(z,A)\} \in \sigma(z,A)$

Alors, il existe un nombre fini ou infini d'ensembles auxquels appartient z, et qui satisfont la relation $R_1$ avec A par rapport à différents éléments de A.

Relation $R_2$ entre 2 sous-ensembles.

*Définition.*

Soient A et B, 2 sous-ensembles de l'espace E et 2 familles d'ensembles de la forme:

$$T_1 = \{Ca : \forall\ a \in A\}$$

Ca = ensemble des éléments qui satisfont $R_1$ avec A à a

$$\text{et } T_2 = \{Cb : \forall\ b \in B\}$$

$C_b$ = ensemble d'éléments qui satisfont à la relation $R_1$ avec B à b.

Si $T_1 = T_2$, les 2 ensembles A et B satisfont la relation $R_2$ notée ainsi: A $R_2$ B.

*Remarque:* La relation $R_2$ est symétrique.

*Généralisation.*

Soient 2 ensembles A et B pour lesquels:

1) il existe respectivement 2 partitions

$$\Pi A = \underset{i \in I}{\cup} A_i = A, \quad \Pi = \underset{J \in I}{\cup} B_j = B$$

2) il existe une fonction (surjection)

$$\varphi(A_i) = B_j$$

3) à chaque $(A_i, B_j)$ correspondent 2 familles

$\{F_A = C_{Ai} \dots\}$ définies comme précédemment

$\{F_B = C_{Bj} \dots\}$

vérifiant toutes les conditions de la relation $R_2$ des 2 ensembles Ai, Bj.

Dans ce cas, on dit que les 2 ensembles A et B satisfont à la relation $R_2$.

LA RELATION $R_2$ EST UNE RELATION D'ÉQUIVALENCE

*Remarque générale:*

La relation $R_1$ géneralise la notion de la perpendicularité, et dans l'espace ordinaire (euclidien), coincide avec la notion usuelle de la perpendicularité. Dans un autre espace quelconque, cette notion peut avoir un sens différent. Par exemple, dans un espace ultramétrique, l'ensemble perpendiculaire à une circonférence est le complément de cette circonférence.

La relation $R_2$ déduite de la relation $R_1$, donne à la notion de parallélisme un sens dépendant de l'espace considéré.

EXEMPLES D'APPLICATIONS DE LA THEORIE

1/ – Soit E un ensemble abstrait et soit $\Delta$ une famille de Moore de parties de $E \times E$ vérifiant les conditions suivantes:

- $\mathscr{D} \in \Delta$
- $A \in \Delta \Longrightarrow A \geqq \mathscr{D}$

Soit $X \longrightarrow \overline{X}$ la fermeture de Moore définie par $\Delta$

Soit $\sigma$ l'application de $E \times E \longrightarrow \Delta$ définie par:

$\sigma\ (x, y) = \overline{\{x, y\}}$.

On a : $\sigma\ (x, y) = \mathscr{D} \Longleftrightarrow x = y$.

$\sigma$ définit une structure uniforme lorsque $\Delta$ vérifie l'axiome suivant:

$\forall\ A \in \Delta,\ \exists\ B \in\ \Delta \neq \mathscr{D}: (x, y)\ \sigma\ B,\ \ (y, z) \in B$

$\Longrightarrow (x, z) \in A$.

2°/ – Soit G un groupe abélien, et soif $\Delta$ une famille de Moore de parties de G vérifiant les conditions suivantes:

$\{O\} \in \Delta$

$A \in \Delta \Longrightarrow A \ni O$.

Soit $X \longrightarrow \overline{X}$ la fermeture de Moore définie par $\Delta$

Soit $\sigma$ l'application de $E \times E$ dans $\Delta$ définie par:

$\sigma\ (x, y) - \overline{x - y}$.

On détermine aisément la forme des boules $\Pi\ (x, \varrho)\ (\varrho \in \Delta)$ de G.

Si $\Delta$ vérifie la condition suivante:

$\forall\ A \in \Delta,\ \exists\ B \in \Delta \neq O: B + B \leqq A$, alors $\sigma$ définit une structure uniforme sur E. Ce cas est réalisé quand $\Delta$ est la famille des sous groupes (éventuellement invariants) de G.

3/ – Le schéma exposé dans la première partie peut être généralisé en prenant pour $\Delta$ un ensemble ordonné possèdant uu plus petit élément $\mathscr{D}$, et vérifiant la condition suivante:

$A\ A, B \in \Delta, > \mathscr{D},\ \exists\ C > \mathscr{D}:\ A \geqq C,\ B \geqq C.$

Il serait intéressant d'étudier la topologie définie par $\sigma$ sur E quand $\Delta$ vérifie l'une des conditions suivantes:

a) $\Delta$ vérifie la condition de chaîne descendante

b) $\forall\ A > \mathscr{D}, \exists\ B > \mathscr{D}: A > B.$

4/ – Soit G un groupe abélien, et $\Delta$ une suite décroissante d'éléments $a_n \geq a_n + 1 \geq \ldots$ à laquelle est adjoint un élément minimum $a_\infty = \mathscr{D}$.

Soit R une fonction *multivoque* de $G \longrightarrow \Delta$.

vérifiant les conditions suivantes:

- $\forall\ x \in G, \exists\ y \in \Delta : x\ R\ y.$
- $x\ R\ a_n,\ a_n \leq a_m \Longrightarrow x\ R\ a_n.$
- $x\ R\ \mathscr{D} \Longleftrightarrow x = O$

Soit $\varphi$ la fonction de $G \longrightarrow \Delta$ définie ainsi :

$\varphi(x) =$ plus grand entier n tel que $x\ R\ a_n$

(éventuellement $a_\infty = \varphi(x)$).

On pose $\varphi(x-y) = \sigma(x, y)$.

Ce schéma est applicable à l'étude de la topologie m – adique d'un anneau A commutatif.

*Ces derniers exemples m'ont été fourni par M. Koskas Maurice, Attaché de Recherche au C.N.R.S. que je remercie vivement.*

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς τὴν παροῦσαν μελέτην ἐξετάζεται μία ἀφῃρημένη γενίκευσις τῆς ἐννοίας τοῦ μετρικοῦ χώρου τοῦ Fréchet. Ὁ νέος χῶρος μελετᾶται τοπολογικῶς, ἐν συνεχείᾳ δὲ γενικεύονται εἰς τὸν χῶρον αὐτὸν αἱ ἔννοιαι τῆς καθετότητος καὶ τῆς παραλληλίας. Αἱ διὰ πρώτην φορὰν διδόμεναι γενικεύσεις αὗται εὑρίσκουν ἐνδιαφερούσας ἐφαρμογὰς εἰς διάφορα ἀξιωματικὰ συστήματα τῶν νεωτέρων μαθηματικῶν.

*

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Κ. Π. Παπαϊωάννου**, ἀνακοινῶν τὴν ἀνωτέρω μελέτην, εἶπε τὰ κάτωθι.

*Ὁ κ. Λάμπρος Ντόκας εἶναι πτυχιοῦχος τῶν μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, ὅπου διετέλεσεν ἐν συνεχείᾳ βοηθὸς τοῦ Καθηγητοῦ κ. Φουσιάνη.*

*Ἤρχισεν ἔκτοτε ἐρευνητικὴν ἐργασίαν ἐπὶ ἀλγεβρικῶν θεμάτων ἀφῃρημένης γεωμετρίας. Πρὸς συνέχισιν τῆς ἐργασίας του ἀπεστάλη, κατόπιν συστάσεως Καθηγητῶν του, εἰς Παρισίους ὡς ὑπότροφος τοῦ Γαλλικοῦ Ἰνστιτούτου τῶν Ἀθηνῶν διὰ τὸ ἔτος 1959 - 1960. Εἰς Παρισίους ὁ κ. Ντόκας εἰργάσθη ἐπιστημονικῶς ὑπὸ τὴν ἐποπτείαν τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ καὶ καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου τῶν Παρισίων κ. Bouligand. Κατόπιν συστάσεως τοῦ κ. Bouligand καὶ τοῦ Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κ. Μπρίκα, ὁ κ. Ντόκας προσελήφθη ὡς συνεργάτης τοῦ κ. Μπρίκα εἰς τὸ Βασιλικὸν Ἵδρυμα Ἐρευνῶν τῆς Ἑλλάδος διὰ τὸ ἔτος 1960-61 ὅπου συνέχισε τὰς ἐρεύνας του. Ἐν συνεχείᾳ, κατόπιν συστάσεώς μας, ἔτυχεν ὁ κ. Ντόκας* *ὑποτροφίας τοῦ ΝΑΤΟ διὰ τὸ ἔτος 1961-62, διὰ τῆς ὁποίας καὶ μετέβη εἰς Παρισίους ὅπου καὶ συνεχίζει τὰς ἐρεύνας του.*

*Ἡ παροῦσα ἀνακοίνωσις, τὴν ὁποίαν ἔχω τὴν τιμὴν νὰ παρουσιάσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν, συνοψίζει τὸ μεγαλύτερον μέρος τῶν ἀποτελεσμάτων, τὰ ὁποῖα ἐπέτυχεν ὁ κ. Ντόκας ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῶν ἐρευνῶν του μέχρι σήμερον.*

*Καθὼς εἶναι γνωστόν, μέγα μέρος τῆς δραστηριότητος τῶν μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς μας ἀπορροφεῖται ἀπὸ τὴν προσπάθειαν νὰ δοθοῦν εὐρύτεροι ὁρισμοὶ ἐννοιῶν τῶν κλασσικῶν μαθηματικῶν, οἱ ὁποῖοι ὁρισμοὶ νὰ προσφέρωνται διὰ τὴν ἀνάπτυξιν θεωριῶν εἰς τὸ πλαίσιον ἀφῃρημένων συνόλων.*

*Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν αἱ παλαιαὶ διακρίσεις εἰς Ἄλγεβραν, Γεωμετρίαν καὶ Ἀνάλυσιν ἔχουν σήμερον σχετικὴν ἀξίαν, διότι πολλὰ ἀπὸ τὰ σημαντικώτερα ζητήματά των κατέστησαν ἤδη μερικαὶ περιπτώσεις ζητημάτων θεωρίας συνόλων· αἱ δὲ νεώτεραι θεωρίαι ἀφῃρημένης ἀλγέβρας καὶ γεωμετρίας π.χ. δὲν διακρίνονται πάντοτε ἀλλήλων. Εἰς τὰς νεωτέρας αὐτὰς κατευθύνσεις τῶν μαθηματικῶν ἔχουν ἤδη γίνει ἀξιόλογοι ἐργασίαι Ἑλλήνων μαθηματικῶν, ὡς ἡ γενίκευσις τῶν ἐννοιῶν τοῦ κύκλου, τῆς γωνίας καὶ τοῦ κυρτοῦ συνόλου ἀπὸ τὸν Σ. Π. Ζερβόν.*

*Αἱ γενικεύσεις ἐκεῖναι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν τόσον ὡς ἀνήκουσαι εἰς τὴν ἀφῃρημένην γεωμετρίαν ὅσον καὶ εἰς τὴν ἀφῃρημένην ἄλγεβραν.*

*Εἰς τὸ τμῆμα τοῦτο τῆς ἐργασίας του, ὁρίζει μίαν σχέσιν $R_1$ εἰς ἀφῃρημένον σύνολον τῇ βοηθείᾳ πλήρους δικτυωτοῦ καὶ ἐξάγει ἀπὸ αὐτὴν ὡρισμένας ἐνδιαφερούσας προτάσεις· ὁρίζει κατόπιν μίαν ἄλλην σχέσιν $R_2$ συνδεομένην μετὰ τῆς $R_1$ καὶ διὰ τὴν ὁποίαν $R_2$ ἀποδεικνύει ὅτι εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.*

*Παρατηρεῖ κατόπιν ὁ κ. Ντόκας ὅτι εἰς τὸν ν-διάστατον Εὐκλείδιον χῶρον ἡ σχέσις $R_1$ συμπίπτει μὲ τὴν κοινὴν ἔννοιαν τῆς καθετότητος. Ἡ $R_2$ εἶναι τότε σχέσις παραλληλίας. Βλέπομεν οὕτως ὅτι αἱ σχέσεις $R_1$ καὶ $R_2$ δὲν εἶναι αὐθαίρετοι ἀλλ' ἀποτελοῦν γενικεύσεις κλασσικῶν ἐννοιῶν.*

*Ὡς εἶναι φυσικόν, αἱ γενικεύσεις αὐταὶ τοῦ κ. Ντόκα δὲν δίδουν νέα ἀποτελέσματα εἰς τὸν συνήθη Εὐκλείδειον χῶρον, ἐνῷ ἀντιθέτως παρουσιάζουν ἐνδιαφέρον εἰς διαφόρους ἄλλους χώρους, ὅπως π.χ. εἰς τοὺς Ultramétriques χώρους, ὅπου τὸ μὲ τὴν νέαν ἔννοιαν κάθετον ἐπὶ περιφέρειαν σύνολον εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς περιφερείας αὐτῆς.*

*Ἡ φαινομενικὴ παραδοξότης τοῦ ἀποτελέσματος αὐτοῦ δὲν ξενίζει τοὺς ἐξοικειωμένους μὲ τὰ σύγχρονα μαθηματικὰ ὅπου συμβαίνει ὁ ἴδιος φραστικῶς ὁρισμὸς ν' ἀποκτᾷ ἐντελῶς διάφορον ἔννοιαν εἰς διαφόρους χώρους.*

*Ἡ ἔρευνα αὐτὴ τοῦ κ Ντόκα ὤθησεν αὐτὸν εἰς τὴν παρατήρησιν, καθ' ἣν* *ἐποχὴν διετέλει συνεργάτης τοῦ κ. Μπρίκα, ὅτι ἡ θεώρησις πολὺ γενικῶν ἀπεικονίσεων τυχόντος ἀφηρημένου συνόλου ἐντὸς δικτυωτοῦ μὲ μηδενικὸν στοιχεῖον ὁδηγεῖ εἰς τὸν ὁρισμὸν ἐννοίας σφαιρικῆς περιοχῆς σημείου, καὶ τελικῶς τοπολογίας γενικευούσης τὴν τοπολογίαν μετρικοῦ χώρου.*

*Τὸ μέρος Ι τῆς παρούσης ἐργασίας ἐμπίπτει εἰς τὸ πλαίσιον τῆς προσπαθείας γενικεύσεως τῆς ἐννοίας τοῦ μετρικοῦ χώρου τοῦ Fréchet.*

*Σημαντικαὶ ἐργασίαι ἔχουν γίνει εἰς τὸ θέμα αὐτὸ ἀπὸ τὸν Kurepa, ἀπὸ τὸν ἴδιον τὸν Fréchet καὶ ἀπὸ νεωτέρους μαθηματικούς.*

*Ἀντιθέτως τὸ μέρος ΙΙ τῆς παρούσης ἐργασίας τόσον ὡς πρόβλημα ὅσον καὶ ὡς μέθοδος ἐργασίας ἐτέθη διὰ πρώτην φορὰν ὑπὸ τοῦ κ. Ντόκα.*

---

ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ.— **Ἡ διεθνὴς προβολὴ καὶ ἡ ἐπιβίωσις τῶν παραγωγικῶν κλάδων τῆς Ἑλλάδος,** *ὑπὸ* ***Χρ. Βοσυνιώτη.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Κωνστ. Βέη.