ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 31ΗΣ ΜΑΪΟΥ 1979

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΚΑΙΣΑΡΟΣ ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Μία μέτρηση Πυθέα τοῦ Μασσαλιώτου καὶ ἡ ἱστοριογραφία τῶν μαθηματικῶν,** *ὑπὸ τοῦ ἀντεπιστέλλοντος μέλους κ. Árpád Szabó**.

Εἶναι γενικὴ ἡ ἄποψη τῶν ἱστοριογράφων τῶν Μαθηματικῶν, ὅτι στὴν ἀρχὴ ἡ Τριγωνομετρία ἦταν βοηθητικὴ ἐπιστήμη τῆς Ἀστρονομίας. Κατὰ τοὺς παλαιότερους χρόνους οἱ ἀστρονόμοι ἦταν ἐκεῖνοι ποὺ χρειάζονταν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ὑπολογισμούς, καὶ ἔτσι ἀνέπτυξαν πρῶτοι τὴν ἐπιστημονικὴ μέθοδο τῆς ἐπιλύσεως τοῦ τριγώνου. Πολλοὶ νομίζουν πὼς μποροῦν μάλιστα καὶ νὰ καθορίσουν τὸν ἄνθρωπο, ὁ ὁποῖος θεμελίωσε τὸν σπουδαῖο αὐτὸ κλάδο τῆς ἐπιστήμης. Ὑποτίθεται πὼς ἦταν ὁ μεγάλος ἀστρονόμος τοῦ δευτέρου αἰῶνος π. Χ., ὁ Ἵππαρχος τῆς Νικαίας.

Εἶναι πάνω ἀπὸ 160 χρόνια, ποὺ ὁ περίφημος Γάλλος ἀστρολόγος Delambre ἔγραψε ὅτι ὁ Ἵππαρχος ἦταν ὁ πρῶτος, ποὺ ἔδωσε μία Τριγωνομετρία στοὺς Ἕλληνες. Μάταια θὰ ψάχναμε τὰ ἴχνη τοῦ κλάδου αὐτοῦ τῆς ἐπιστήμης στὸν παλαιότερο Ἀρίσταρχο, στὸν Ἀρχιμήδη ἢ στὸν Εὐκλείδη. Κανένας ἀπ᾽ αὐτοὺς τοὺς περίφημους γεωμέτρες δὲν μπόρεσε νὰ ἐπιλύση τὸ τρίγωνο, ἀλλ᾽ οὔτε καὶ τὸ ὀρθογώνιο ἀκόμη κατ᾽ ἄλλον τρόπο παρὰ μὲ γραφικὲς μεθόδους.

Εἶναι πιθανόν, ὅτι ὁ Ἵπαρχος ὀφείλει τὴ φήμη του, ἀναγνωρισμένη καὶ σήμερα, σὲ μιὰ πηγὴ τῆς ἀρχαιότητας. Ὁ Θέων, ὁ φημισμένος Ἀλεξανδρινὸς μαθηματικὸς (τέταρτος αἰώνας μ. Χ.) σημείωσε σ᾽ ἕνα σχόλιό του, ποὺ ἔγραψε

* ÁRPÁD SZABÓ, **Eine Messung des Pytheas von Massilia und die Geschichte der Mathematik.**

γιὰ τὸ ἔργο τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου, ὅτι δὲν ἦταν ὁ Πτολεμαῖος ὁ πρῶτος ὁ ὁποῖος συνέταξε πίνακα χορδῶν (στὴν ἀρχαία γλῶσσα «κανόνιον τῶν εἰς κύκλον εὐθειῶν», γερμανικά: Sehnentafel). Εἶχε γράψει ἔργο μὲ παρόμοιο θέμα καὶ ὁ Ἵππαρχος τῆς Νικαίας δυόμισυ αἰῶνες πρὶν ἀπὸ τὸν Πτολεμαῖο. Καὶ ἐπειδὴ χωρὶς πίνακα χορδῶν πραγματικὰ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κάνη κανεὶς τριγωνομετρικὸ ὑπολογισμό, καὶ ἀφοῦ γιὰ κανένα συγγραφέα παλαιότερο ἀπὸ τὸν Ἵππαρχο δὲν σημειώθηκε, ὅτι εἶχε συντάξει ἕνα τέτοιο, ἡ σημείωση αὐτὴ τοῦ Θέωνος ἔγινε τὸ ξεκίνημα τῆς ἱστορικῆς ἀπόψεως, κατὰ τὴν ὁποία ὁ Ἵππαρχος ἦταν ὁ θεμελιωτὴς τῆς Τριγωνομετρίας.

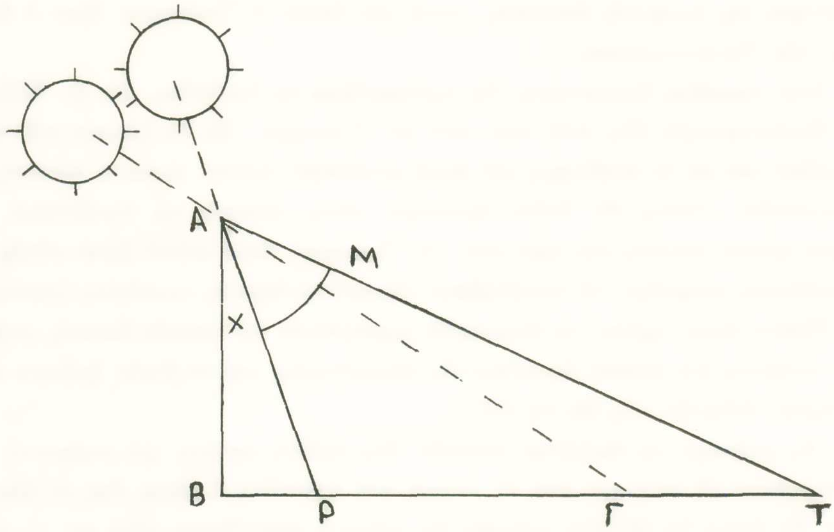
Στὴν παροῦσα ἀνακοίνωση θὰ προσπαθήσω νὰ ἀποδείξω, ὅτι οἱ Ἕλληνες εἶχαν Τριγωνομετρία ἤδη πολὺ πρὶν ἀπὸ τὸν Ἵππαρχο. Μὲ τὸ ζήτημα τοῦ πίνακος χορδῶν καὶ μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ ποιοί συνέταξαν πρῶτοι τέτοιους πίνακες δὲν θὰ ἀσχοληθῶ. Ὅπως θὰ δοῦμε ἀργότερα, εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑποθέσωμε, ὅτι ὑπῆρχαν τέτοιοι πίνακες καὶ πρὶν ἀπὸ τὸν Ἵππαρχο, διότι μόνον βάσει αὐτῆς τῆς προϋποθέσεως μποροῦμε νὰ καταλάβωμε ὡρισμένες ἀρχαῖες σπουδαῖες μαρτυρίες.

Πρῶτα ὅμως πρέπει νὰ ἀναφερθῶ περιληπτικὰ σὲ μερικὲς βασικὲς γνώσεις γιὰ τὸ γνώμονα (τὸ ἡλιακὸ ὡρολόγιο τῆς ἀρχαιότητος, γιὰ τὸ ὁποῖο ἐμίλησα στὴν Ἀκαδημία Ἀθηνῶν στὶς 24. 11.1977).

Ἂν στήσωμε σὲ ὁριζόντιο ἐπίπεδο ἕνα κάθετο κανόνα (τὸ γνώμονα) καὶ παρατηρήσωμε τὴ σκιά του ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ ἀνατέλλει ὁ ἥλιος ἕως τὸ ἡλιοβασίλεμα, θὰ δοῦμε ὅτι ἀλλάζει συνεχῶς ὄχι μόνον ἡ κατεύθυνση ἀλλὰ καὶ τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς του. Ὡς ἕνα σημεῖο μικραίνει διαρκῶς καὶ μετὰ αὐξάνει. Τὸ πιὸ ἀξιοσημείωτο μεταξὺ τῶν δύο περιόδων τῆς μειώσεως καὶ τῆς αὐξήσεως εἶναι ἡ στιγμή, ὁπότε ἡ σκιὰ εἶναι ἡ πιὸ μικρή. Αὐτὴ εἶναι ἡ ὥρα τοῦ μεσημεριοῦ. Τότε ὁ ἥλιος βρίσκεται στὸ ὑψηλότερο σημεῖο τῆς φαινομενικῆς τροχιᾶς του. Ἡ κατεύθυνση τῆς σκιᾶς του τὴν ὥρα αὐτή, στὸ μέρος τῆς Γῆς ὅπου ζοῦμε ἐμεῖς, εἶναι ἡ κατεύθυνση Νότος - Βορρᾶς.

Ἐὰν ὕστερα ἐπὶ μακρὸ χρονικὸ διάστημα — ἐπὶ ἑβδομάδες ἢ ἐπὶ μῆνες — παρατηροῦμε προσεκτικὰ τὴ μεσημβρινὴ σκιὰ τοῦ γνώμονος — εὑρισκομένου πάντοτε στὴν ἴδια θέση — θὰ ἀντιληφθοῦμε ὅτι καὶ αὐτή, δηλαδὴ ἡ μεσημβρινὴ σκιά, ἀλλάζει τὸ μῆκος της, ἐνῶ ἡ κατεύθυνσή της μένει πάντα ἡ ἴδια. Τὸ καλοκαίρι, ὅταν φαίνεται ὁ ἥλιος νἆναι πιὸ ψηλὰ στὸν οὐρανό, ἡ μεσημβρινὴ σκιὰ εἶναι μικρότερη, ἐνῶ τὸ χειμῶνα, ὅταν ὁ ἥλιος εὑρίσκεται πιὸ χαμηλά, ἡ σκιὰ εἶναι μεγαλύτερη.

Σχηματικὰ θὰ μπορούσαμε νὰ δείξωμε τὶς ἀλλαγὲς τῆς μεσημβρινῆς σκιᾶς ὡς ἑξῆς: Ἂς εἶναι ΑΒ ὁ ἴδιος ὁ γνώμων. Μιὰ ὡρισμένη ἡμέρα ἡ μεσημβρινὴ σκιά του θὰ εἶναι ἐλάχιστη ΒΡ. Αὐτὴ ἡ μέρα εἶναι ἡ 21η Ἰουνίου, ἐπειδὴ τότε εὑρίσκεται στὸ πιὸ ὑψηλὸ σημεῖο ἡ μεσημβρία τοῦ ἥλιου, στὸ σημεῖο Α. Αὐτὴ εἶναι ἡ ἡμερομηνία τοῦ καλοκαιρινοῦ ἡλιοστασίου. Μεγίστη εἶναι ἡ μεσημβρινὴ σκιὰ τοῦ γνώμονος στὶς 21 Δεκεμβρίου· ΒΤ. Τότε φαίνεται νὰ εἶναι ἡ μεσημβρινὴ θέση τοῦ ἥλιου — παρατηρουμένη ἀπὸ τὸ σημεῖο Β — ἡ χαμηλότερη, στὸ σημεῖο Κ. Αὐτὸ εἶναι τὸ χειμερινὸ ἡλιοστάσιο. Ἀνάμεσα στὴν μικρότερη μεσημ-



Σχ. 1.

βρινὴ σκιὰ τοῦ γνώμονος ΒΡ καὶ στὴν μεγαλύτερη σκιά του, ΒΤ, βρίσκεται τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς ΒΓ· τοῦτο ἀνταποκρίνεται στὴν ἐαρινὴ καὶ στὴν φθινοπωρινὴ ἰσημερία.

Κατὰ τὴ γνώμη μου, ἡ παλαιότερη σχετικὴ ἀνακάλυψη τῶν Ἑλλήνων ἦταν τὸ ὅτι βρῆκαν πῶς ἠμποροῦν νὰ καθορίσουν τὴν ἰσημερινὴ μεσημβρινὴ σκιὰ τοῦ γνώμονος, μὴ ξέροντας τίποτα ἐκτὸς ἀπὸ τὰ μήκη τῶν δύο ἡλιοστασίων. Ἔπρεπε νὰ διαιρέσουν στὰ δύο τὸ τόξο κύκλου, τὸ ΧΜ. Ἔτσι διχοτομοῦσαν τὸ ἀντικαθρέφτισμα τοῦ φαινομενικοῦ τόξου, τὸ ὁποῖο πέφτει ἀνάμεσα στὸ ὑψηλότερο καὶ τὸ χαμηλότερο σημεῖο μεσημβρίας τοῦ ἥλιου, παρατηρούμενο ἀπὸ ἕνα δοσμένο σημεῖο. Σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς τελευταῖες μου ἐργασίες προσπάθησα νὰ ἀποδείξω, ὅτι αὐτὴ ἦταν ἀνακάλυψη τοῦ Ἀναξιμάνδρου τοῦ Μιλησίου (Βλ. «Φιλοσοφία» 8 - 9 (1978 - 79), σελ. 65 - 73.

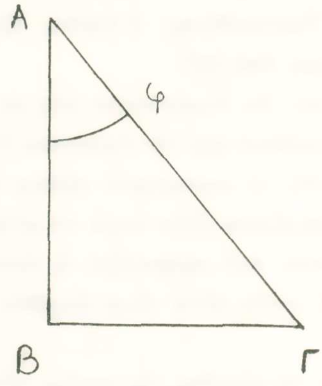
Μία μεταγενέστερη ἀνακάλυψη — ἀλλ' ἀκόμη στὸν πέμπτο π. Χ. αἰῶνα — ἦταν ὅτι ἔμαθαν νὰ μετροῦν καὶ αὐτὸ τὸ μισὸ τόξο, ὅταν ἀνεκάλυψαν πὼς σ' αὐτὸ τὸ μισὸ τόξο ἀνήκει μία χορδή, ἡ ὁποία ἀπυτελεῖ πλευρὰ δεκαπενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου, τοῦ δεκαπενταγώνου ποὺ μποροῦμε νὰ ἐγγράψωμε στὸν κύκλο παίρνοντας τὸ μῆκος τοῦ γνώμονος ὡς ἀκτίνας τοῦ κύκλου, πρᾶγμα ποὺ θὰ πῆ ἀστρονομικῶς ὅτι ἡ λοξότητα τῆς ἐκλειπτικῆς — ἀφοῦ τὴν λοξότητα αὐτὴ δείχνει τὸ διχοτομημένο τόξο — κατὰ μιὰ μέτρηση τοῦ πέμπτου π. Χ. αἰώνα εἶναι ἀκριβῶς 24°. Φυσικὰ τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ ἦταν μόνο κατὰ προσέγγιση. Ξέρομε ὅτι τὸ διώρθωσε ἤδη στὸν 3ο αἰῶνα ὁ Ἐρατοσθένης, ὁ ὁποῖος ἤξερε πλέον ὅτι ἡ λοξότητα τῆς ἐκλειπτικῆς εἶναι μικρότερη ἀπὸ 24°.

Ἄλλη βέβαια μεταγενέστερη ἀνακάλυψη ἦταν ὅτι διεπίστωσαν πὼς μὲ τὸ γνώμονα, τὴν ὥρα τῆς ἰσημερίας, ἠμποροῦν νὰ μετρήσουν καὶ τὴν ἀπόσταση ἑνὸς σημείου ἀπὸ τὸν ἰσημερινὸ κύκλο τῆς Γῆς, δηλαδὴ τὸ γεωγραφικὸ πλάτος τοῦ σημείου ἐκείνου. Γιὰ νὰ ἐξακριβώσωμε αὐτὸ δὲν χρειάζεται ἄλλο παρὰ νὰ μετρήσωμε — τὸ μεσημέρι κατὰ τὴν ἰσημερία — τὴ γωνία ποὺ σχηματίζει ἡ ἀκτίνα τοῦ ἥλιου μὲ τὴν κορυφὴ τοῦ γνώμονος. Ἐπειδὴ ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι ἀκριβῶς τὸ γεωγραφικὸ πλάτος τοῦ σημείου ἐκείνου.

Εἶναι ἐνδιαφέρον νὰ δοῦμε πῶς ἐξακρίβωναν τὸ μέγεθος τῆς γωνίας αὐτῆς τὸν καιρὸ τοῦ Ἱππάρχου, ἐπειδὴ δὲν ἦταν αὐτὴ ἡ ἴδια ἡ γωνία ποὺ μετροῦσαν ἀλλὰ τὸ μῆκος τοῦ γνώμονος καὶ τῆς ἰσημερινῆς σκιᾶς του. Στὸ μοναδικὸ ἔργο ποὺ σώζεται ἀπὸ ἐκεῖνα ποὺ ἔγραψε ὁ Ἵππαρχος στὴ νεότητά του, στὴν ἐξήγηση τῶν φαινομένων τοῦ Εὐδόξου, διαβάζομε: Ἀφοῦ στὴν Ἑλλάδα τὸ μῆκος τοῦ γνώμονος ἔχει λόγο πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἰσημερινῆς σκιᾶς του ὡς 4 : 3 (τέσσερα πρὸς τρία), ἡ Ἑλλάδα ἀπέχει περίπου 37° ἀπὸ τὸν Ἰσημερινό. Ὁ Ἵππαρχος, δηλαδή, ἀπὸ τὰ δυὸ μήκη τοῦ γνώμονος καὶ τῆς σκιᾶς του ἠμποροῦσε νὰ ὑπολογίση τὴν ἐν λόγῳ γωνία. Σήμερα ἐμεῖς τὸ ζήτημα τὸ ἐπιλύομε μέσῳ τῶν τριγωνομετρικῶν μας πινάκων. Ὁ Ἵππαρχος ὅμως δὲν διέθετε τέτοιους πίνακες. Γι' αὐτὸν ἡ παράδοση λέγει μόνον, ὅτι συνέταξε πίνακα χορδῶν, ἀλλ' οὔτε καὶ αὐτὸς ὁ πίνακας δὲν περιεσώθη. Ἠμποροῦμε ὡστόσο νὰ σχηματίσωμε μίαν ἰδέα γιὰ τὸν πίνακα αὐτὸν βάσει ἑνὸς ἄλλου παρόμοιου πίνακα, ποὺ διασώθηκε στὸ ἔργο τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου, ποὺ ἔζησε δυόμισυ αἰῶνες ὕστερα ἀπὸ τὸν Ἵππαρχο. Ἂς ἐφαρμόσωμε αὐτὸ τὸν πολὺ μεταγενέστερο πίνακα γιὰ τὸ πρόβλημα ποὺ ἔπρεπε νὰ ἐπιλύση ὁ Ἵππαρχος. Αὐτὸς πιθανῶς σκέφθηκε ὡς ἑξῆς:

Ὁ γνώμων (ΑΒ), ἡ σκιὰ τοῦ ΒΓ, καὶ ἡ ἡλιακὴ ἀκτίνα ποὺ προβάλλει τὴ σκιὰ (ΑΓ) σχηματίζουν ὀρθογώνιο τρίγωνο. Σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλῆ, σὲ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο μποροῦμε νὰ περιγράψωμε μία περιφέρεια, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ἴση μὲ τὴν ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Πρὸς τὸ παρὸν διαθέτομε δυὸ χορδὲς αὐτοῦ τοῦ κύκλου· ΑΒ = τέσσερις μονάδες καὶ ΒΓ τρεῖς μονάδες. Θέλομε νὰ μάθωμε τί μέγεθος ἔχει ἡ περιφερειακὴ γωνία, ἀπέναντι στὴ χορδὴ ΒΓ, τὸ φ.

Ἂς ὑπολογίσωμε πρῶτα βάσει τῶν δύο χορδῶν, δηλαδὴ τῶν δύο καθέτων τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης (ΑΓ) δηλαδὴ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου. Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα αὐτὸ τὸ μῆκος θὰ εἶναι ἀκριβῶς 5, διότι $4^2 + 3^2 = 5^2$.



Σχ. 2.

Εἶναι ἐνδιαφέρον, ὅτι στὴ συγκεκριμένη μας περίπτωση ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος 5 μονάδες, διότι ὁ πίνακας χορδῶν τοῦ Πτολεμαίου σχεδιάσθηκε βάσει ἑνὸς κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶχε διαιρεθῆ σὲ 120 μονάδες μήκους. Ἀπὸ αὐτὸ προκύπτει, ὅτι ὁ πίνακας χορδῶν τοῦ Πτολεμαίου χρησιμεύει στὴν περίπτωσή μας μόνον ἂν ἐργαζώμεθα μὲ ἕνα τέτοιο ὀρθογώνιο τρίγωνο, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα μετράει ὄχι 5 ἀλλ' ἀκριβῶς 24 φορὲς περισσότερο, ἀφοῦ 120 πρὸς 5 ἴσον 24. Βέβαια, στὸν πίνακα τοῦ Πτολεμαίου οὔτε ἡ χορδή μας, τὸ ΒΓ, δὲν θὰ εἶναι τριῶν μονάδων ἀλλὰ 24 φορὲς περισσότερο, ἄρα 72 μονάδων.

Πρέπει λοιπόν, νὰ βροῦμε στὸν πίνακα, τί μέγεθος ἔχει σὲ μοῖρες ἐκεῖνο τὸ τόξο ποὺ ἀνήκει στὴ χορδὴ ποὺ ἔχει 72 μονάδες μῆκος. Ὁ πίνακας τοῦ Πτολεμαίου δείχνει πὼς σ' αὐτὸ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ἀνταποκρίνεται — κατὰ προσέγγιση — ἕνα τόξο 74^0. Αὐτὸ ὅμως τὸ τόξο ὡς κεντρικὴ γωνία εἶναι ἀκριβῶς τὸ διπλάσιο ἐκείνης τῆς περιφερειακῆς γωνίας (φ), ἡ ὁποία μᾶς ἐνδιαφέρει. Πρέπει δηλαδὴ νὰ διχοτομήσωμε τὶς 74^0 καὶ ἔτσι θὰ βγῆ τὸ ἀποτέλεσμα ποὺ ζητούσαμε : 37^0.

Ὁ θεωρούμενος αὐτὸς ὑπολογισμὸς ἐνισχύει ἐκείνη τὴ μαρτυρία τοῦ Θέωνος, κατὰ τὴν ὁποία ὁ Ἵππαρχος ἔπρεπε νὰ ἐγνώριζε κάποιο εἶδος πίνακος χορδῶν. Νομίζω ὅμως ὅτι μποροῦμε νὰ ὑποδείξωμε μία ἀκόμη παλαιότερη περίπτωση ἐφαρμογῆς τῆς Τριγωνομετρίας καὶ τοῦ πίνακος χορδῶν.

Σὲ ἁδρὲς γραμμὲς γίνεται λόγος γιὰ τὰ ἑξῆς : Στὸν πρῶτο π.Χ. αἰῶνα ἔζησε ὁ ἀρχαῖος γεωγράφος Στράβων, ὁ ὁποῖος πολλὲς φορὲς ἀναφέρει στὸ ἔργο του τὸν φημισμένο περιηγητή, τὸν Πυθέα τῆς Μασσαλίας. Ἀρκεῖ νὰ μνημονεύσωμε ἐδῶ, ὅτι ὁ Πυθέας ἔζησε στὸν τέταρτο αἰῶνα π. Χ., ἦταν δηλαδὴ σύγχρονος — λίγο πιὸ ἡλικιωμένος — τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους. Ὁ Στράβων θεωρεῖ τὸν Πυθέα ἀναξιόπιστο, φλύαρο, καὶ γενικὰ πασχίζει νὰ διαψεύση τὰ στοιχεῖα ποὺ προσφέρει ἐκεῖνος.

Ἀλλὰ ὁ Στράβων σημειώνει ἀκόμα ὅτι ὁ Πυθέας ὑπελόγισε τὴν ἀπόσταση τῆς Μασσαλίας ἀπὸ τὸν Ἰσημερινό, δηλαδὴ τὸ γεωγραφικὸ πλάτος τῆς πόλεως αὐτῆς. Δυστυχῶς ὁ Στράβων δὲν ἀναφέρει καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ ὑπολογισμοῦ αὐτοῦ. Ἐμᾶς ὅμως ἐνδιαφέρει περισσότερο νὰ μάθωμε ἀπὸ ποιὰ μέτρηση ξεκίνησε ὁ Πυθέας. Φαίνεται ὅτι ἔκανε ὅ,τι καὶ ὁ Ἵππαρχος. Δηλαδὴ ὁ Πυθέας, κατὰ τὸν Στράβωνα, ὑπεστήριζε ὅτι ἐὰν στὴ Μασσαλία τὴν ὥρα τοῦ καλοκαιρινοῦ ἡλιοστασίου τὸ μῆκος τοῦ γνώμονος εἶναι 120 μονάδες, τότε ἡ μεσημβρινὴ σκιά του θὰ εἶναι 41 $^4/_5$ (σαράντα μιὰ μονάδες καὶ τέσσερα πέμπτα).

Καὶ ἀπὸ αὐτὰ τὰ δυὸ στοιχεῖα εἶναι δυνατὸ νὰ ὑπολογίση κανεὶς μιὰ σημαντικὴ γωνία, ἀπὸ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς ὁποίας συνάγεται πράγματι μὲ καταπληκτικὴ — θὰ λέγαμε — ἀκρίβεια τὸ γεωγραφικὸ πλάτος τῆς Μασσαλίας.

Ἀπὸ τὸ στοιχεῖο αὐτό, ποὺ διέσωσε ὁ Στράβων, προκύπτει ὅτι ὁ Πυθέας — ὁ σύγχρονος, ὅπως εἴπαμε, τοῦ Μεγάλου Ἀλεξάνδρου καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους — ἠμποροῦσε νὰ ὑπολογίση τὸ γεωγραφικὸ πλάτος τῆς Μασσαλίας, καὶ αὐτὸ ἦταν δυνατὸ μόνον ἂν ὑπῆρχε ἤδη τότε ἡ Τριγωνομετρία, ἀφοῦ δὲν θὰ εἶχε νόημα νὰ ὑπολογίσουν τότε ἕναν λόγο μὲ τόση ἀκρίβεια — ἑκατὸν εἴκοσι πρὸς σαράντα ἕνα καὶ τέσσερα πέμπτα — ἐκτὸς ἂν εἶχαν μοναδικὸ σκοπὸ τὴν εὕρεση κάποιου παράδοξου λόγου.

Συμπερασματικά, ἡ οὐσία τῆς ἀνακοινώσεώς μου ἔγκειται εἰς τοῦτο: ὅτι ἡ ἀπὸ τὸν Πυθέα γενόμενη μέτρηση ἀποτελεῖ ἀξιοσημείωτο ἱστορικὸ στοιχεῖο, πού, μεταξὺ ἄλλων, ἠμπορεῖ καλύτερα νὰ φωτίση τὴν πρώτη περίοδο ἀνθήσεως τῆς ἑλληνικῆς ἐπιστήμης, περίοδο ἀπὸ τὴν ὁποία χρονολογεῖται καὶ ἡ ἐπινόηση τῆς Τριγωνομετρίας.

ZUSAMMENFASSUNG

Als Begründer der Trigonometrie, dieser Hilfsdisziplin der Astronomie, gilt gewöhnlich Hipparchos von Nikaia im 2. Jh. v. Chr. Der Alexandriner Theon, im 4. Jh. u.Z. berichtet, dass er, Hipparchos ein wissenschaftliches Werk darüber verfasst hatte, wie man die Sehnenlängen in einem Kreis berechnen kann. Die Sehnentafeln des Hipparchos sind zwar verlorengegangen, aber wir

vermuten, wie sie gewesen sein mögen, auf Grund der ähnlichen Tafeln im Werke des Klaudios Ptolemaios.

Vortragender versuchte nachzuweisen, dass eine ähnliche Trigonometrie und Sehnentafeln, auch schon im 4. Jahrhundert v. Chr., zur Zeit des Aristoteles und Alexanders des Grossen, existiert haben müssen. Der Nachweis erfolgte in den folgenden Schritten.

1. Es wurde zunächst skizziert, wie die Gnomon-Messungen — zu einer Zeit, die wir einstweilen nicht genau fixieren können — zu jener Entdeckung führten, dass man mit dem äquinoktialen Mittagschatten des Gnomons die geographische Breite des Messungsortes berechnen kann.

2. Dann wurden die wichtigsten Etappen einer solchen Berechnung bei Hipparchos skizziert, und ein Beispiel dafür gezeigt.

3. Es wurde im nächsten Schritt darauf hingewiesen, dass der Geograph Strabon über eine merkwürdige Messung des Pytheas von Massilia berichtet: er hätte die Entfernung seiner Vaterstadt vom Äquator berechnet. Das konkrete Ergebnis dieser Berechnung wird bei Strabon nicht mitgeteilt. Aber er hat jenes Gnomon-Verhältnis in Massilia aufgezeichnet, von dem Pytheas ausgegangen war (Gnomon und sein Mittagschatten bei Sommersonnenwende in Massilia: 120 : 41,8).

4. Man kann in der Tat auf Grund dieses Gnomon-Verhältnisses— und unter Benutzung jener Sehnentafel, die uns erst im Werk des Klaudios Ptolemaios zur Verfügung steht — die geographische Breite von Massilia genau berechnen.

Dies ist nach dem Vortragenden ein schlagender Beweis dafür, dass griechische Trigonometrie und Sehnentafeln schon im 4. Jahrhundert v. Chr. existiert haben müssen.