ΩΠΛΙΣΜΕΝΑ ΣΚΥΡΟΔΕΜΑΤΑ. — **Περὶ τοῦ καθορισμοῦ τῆς θέσεως τῆς οὐδετέρας γραμμῆς τῆς λοξῶς καμπτομένης ὀρθογωνικῆς διατομῆς ἐξ ὡπλισμένου σκυροδέματος**, *ὑπὸ Ἀχ. Π. Σιμοπούλου**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασ. Αἰγινήτου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐντατικῆς καταστάσεως καὶ ἐν συνεχείᾳ τοῦ ἀπαιτουμένου ὁπλισμοῦ μιᾶς ὀρθογωνικῆς διατομῆς ἐξ ὡπλισμένου σκυροδέματος, ὑποβαλλομένης εἰς λοξὴν κάμψιν καὶ εὑρισκομένης εἰς τὸ στάδιον II (διερρηγμένη ἑλκυομένη ζώνη) ἀπαιτεῖται προηγουμένως ὁ καθορισμὸς τῆς θέσεως τῆς οὐδετέρας γραμμῆς. Δεδομένου δὲ ὅτι ἡ οὐδετέρα γραμμὴ ἔχει ἐν γένει λοξὴν θέσιν, ὡς πρὸς τοὺς κυρίους ἄξονας τῆς διατομῆς, διὰ τὸν καθορισμὸν ταύτης ἀπαιτοῦνται δύο στοιχεῖα: 1) ἓν σημεῖον καὶ 2) ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως.

Ὁ προσδιορισμὸς τῶν στοιχείων τούτων διὰ κλειστῶν μαθηματικῶν τύπων δὲν ἐδόθη μέχρι σήμερον εἰς τὴν σχετικὴν θεωρίαν τοῦ ὡπλισμένου σκυροδέματος. Εἰς πάσας τὰς μέχρι τοῦδε δοθείσας λύσεις ἐκλέγονται ἀρχικῶς ἡ θέσις καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς οὐδετέρας γραμμῆς κατ' ἐκτίμησιν, ἐν συνεχείᾳ δὲ μεταβάλλονται αὗται διὰ διαδοχικῶν δοκιμῶν, ἕως ὅτου πληρωθῶσιν αἱ σχετικαὶ συνθῆκαι ἰσορροπίας τοῦ προβλήματος.

Ἡ ὑφ' ἡμῶν διεξαχθεῖσα μαθηματικὴ ἔρευνα, περὶ ἧς ἡ παροῦσα ἀνακοίνωσις, κατέληξεν εἰς τὴν διαπίστωσιν τοῦ ὡς ἕπεται *«θεωρήματος τῆς οὐδετέρας γραμμῆς»*.

Ἐν τῇ λοξῇ κάμψει τῆς ὀρθογωνικῆς διατομῆς ἡ εἴς τινα λόγον $m = \sigma_e/\sigma_o$ ἀντιστοιχοῦσα οὐδετέρα γραμμὴ διέρχεται ἐκ τοῦ σημείου τομῆς S τῶν παραλλήλων πρὸς τοὺς κυρίους ἄξονας τῆς διατομῆς καὶ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον m ἀντιστοιχουσῶν γνωστῶν οὐδετέρων γραμμῶν (Σχ. 1)· ἡ δὲ κατεύθυνσις εφφ, ὑφ' ἣν τοποθετεῖται αὕτη, ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν b τῆς θλιβομένης γωνίας O, ἐπαληθεύει ἐν τῇ ἑκάστοτε περιπτώσει λοξότητος εφω/β τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἐξωτερικῆς ῥοπῆς μίαν ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων:

$$(\mathrm{A}): \quad (\beta \varepsilon\varphi\varphi)^3 + A_2(\beta \varepsilon\varphi\varphi)^2 + A_1(\beta \varepsilon\varphi\varphi) + A_o = 0$$

$$(\mathrm{B}): \quad B_2(\beta \varepsilon\varphi\varphi)^2 + B_1(\beta \varepsilon\varphi\varphi) - \nu B_o = 0$$

$$(\Gamma): \quad (\beta \varepsilon\varphi\varphi)^3 + \Gamma_2(\beta \varepsilon\varphi\varphi)^2 + \Gamma_1(\beta \varepsilon\varphi\varphi) + \Gamma_o = 0$$

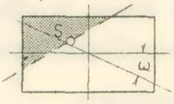
ὧν ἑκάστη ἀπορρέει ἐκ τῆς ἐπιβεβλημένης συνθήκης συνεπιπεδότητος τῶν ἐξω-

* **ACHILLES P. SIMOPULOS: Lehrsatz zur Bestimmung der Nullinie des auf schiefer Biegung beanspruchten rechteckigen Eisenbetonquerschnittes.**

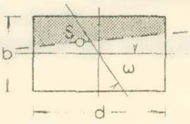
τερικῶν καὶ τῶν ἐσωτερικῶν ροπῶν καὶ ἰσχύει εἰς ὡρισμένον διάστημα τῶν μεταβολῶν, ἃς λαμβάνει ἡ λοξότης εφω/β. Δηλαδή:

(A) 

Ἡ σχέσις (A) ἰσχύει εἰς τὸ διάστημα: $\dfrac{\varepsilon\varphi\omega}{\beta} < \dfrac{1-\nu}{2-3\nu}$

(B) 

Ἡ » (B) » » » » : $\dfrac{1-\nu}{2-3\nu} < \dfrac{\varepsilon\varphi\omega}{\beta} < \dfrac{2-3\nu}{1-\nu}$

(Γ) 

Ἡ » (Γ) » » » » : $\dfrac{\varepsilon\varphi\omega}{\beta} > \dfrac{2-3\nu}{1-\nu}$

Ἔνθα

$$\beta = {}^{b}/_{d}\,,\quad B_o = \beta/_{\varepsilon\varphi\omega},\quad A_2 = (k_5 + k_2 B_o)/k_6,\quad A_1 = \left(k_4 - \frac{k_7}{\nu} B_o\right)/k_6,\quad A_o = k_3/k_6$$

$$B_2 = \nu,\qquad B_1 = k_7(B_o - 1)/\nu$$

$$\Gamma_2 = \left(k_4 - \frac{k_7}{\nu B_o}\right)/\,k_3,\quad \Gamma_1 = \left(k_5 + \frac{k_2}{B_o}\right)/\,k_3,\quad \Gamma_o = k_6/k_3$$

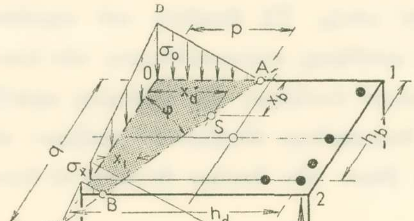
$$\nu = \frac{n}{n+m}\, h_d/d = \frac{n}{n+m}\, h_b/b$$

$$k_2 = (1-\nu)^2/_\nu,\quad k_3 = 2\nu(3-2\nu),\quad k_4 = 14\nu - 9\nu^2 - 6,\quad k_5 = (2 - 8\nu + 11\nu^2 - 6\nu^3)/_\nu$$

$$k_6 = (1-\nu)^3/_\nu\,,\quad k_7 = \nu(2-\nu),$$

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ

Ἔστω τυχοῦσα ὀρθογωνικὴ διατομή. Λαμβάνομεν ὡς ἄξονας συντεταγμένων τὰς πλευρὰς τῆς μᾶλλον θλιβομένης γωνίας O. Αἱ τάσεις δίδονται, ὡς γνωστόν, διὰ γραμμικὴν κατανομήν ὑπὸ τοῦ τύπου:



(Σχ. 1)

$$\sigma_b = \frac{\sigma_e}{n} = \sigma_o\left(1 - \frac{x}{p} - \frac{y}{q}\right)^{*} \qquad (1)$$

Ἐκ τούτου διὰ $\sigma_b = 0$ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τῆς οὐδετέρας γραμμῆς $^{x}/_{p} + {}^{y}/_{q} = 1$ (2)

Ἀφ' ἑτέρου εἶναι: (Σχ. 1) $\dfrac{\sigma_x}{x_1} = \dfrac{\sigma_e/n}{h_d - x_1}$ (3)

$$\sigma_x/\sigma_o = x_1/p,\quad x_1 = p - h_b\,\varepsilon\varphi\,\varphi. \qquad (4)$$

* Ἡ σχέσις αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς λύσεως ὡς πρὸς z τῆς ἐξισώσεως τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸν ἄξονα τῶν X εἰς τὸ σημεῖον A (p, O, O), τὸν ἄξονα τῶν Y εἰς τὸ ση-

Εἰσάγοντες τὰς σχέσεις (4) εἰς τὴν (3) καὶ λύοντες ὡς πρὸς p λαμβάνομεν:

$$p = \frac{n}{n+\sigma_e/\sigma_o} h_d + \frac{n}{n+\sigma_e/\sigma_o} h_b \varepsilon\varphi\varphi \qquad (5)$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ ὡπλισμένου σκυροδέματος γνωρίζομεν ὅτι προκειμένου περὶ κάμψεως τῆς ἐν λόγῳ διατομῆς κατὰ κύριον ἄξονα, ἡ οὐδετέρα γραμμὴ αὐτῆς, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς τάσεις σ_e, σ_o εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἕτερον κύριον ἄξονα καὶ ἀπέχει τῆς θλιβομένης πλευρᾶς ἀπόστασιν $x = \frac{n}{n+\sigma_e/\sigma_o} h$ (ἔνθα h εἶναι τὸ ὠφέλιμον ὕψος τῆς διατομῆς κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κάμψεως). Κατ' ἀκολουθίαν ἐν τῇ ἐξισώσει (5) παριστῶσιν:

$\frac{n}{n+\sigma_e/\sigma_o} h_d = x_d$: Τὴν ἀπόστασιν τῆς εἰς τὰς τάσεις σ_e, σ_o ἀντιστοιχούσης οὐδετέρας γραμμῆς, ἀπὸ τῆς ὡς ἄξονος Y ληφθείσης πλευρᾶς τῆς γωνίας O.

$\frac{n}{n+\sigma_e/\sigma_o} h_b = x_b$: Τὴν ἀπόστασιν τῆς εἰς τὰς τάσεις σ_e, σ_o ἀντιστοιχούσης οὐδετέρας γραμμῆς ἀπὸ τῆς ὡς ἄξονος X ληφθείσης πλευρᾶς τῆς γωνίας O.

Ὁπότε ἡ τομὴ S τῶν οὐδετέρων τούτων γραμμῶν θὰ ἔχῃ συντεταγμένας $x = x_d$, $y = x_b$ συναρτήσει τῶν ὁποίων ἡ σχέσις (5) γράφεται:

$$p = x_d + x_b \varepsilon\varphi\varphi \qquad (6)$$

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου AOC προκύπτει: $p = q\varepsilon\varphi\varphi$ (7)
Εἰσάγοντες τὰς σχέσεις (6), (7) εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς οὐδετέρας γραμμῆς (2) λαμβάνομεν ἐν τέλει ταύτην ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$\frac{x}{x_d + x_b \varepsilon\varphi\varphi} + \frac{y\varepsilon\varphi\varphi}{x_d + x_b \varepsilon\varphi\varphi} = 1 \qquad (8)$$

Θέτοντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην $x = x_d$, $y = x_b$ παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη ἐπαληθεύεται· ἄρα τὸ σημεῖον S εὑρίσκεται ἐπ' αὐτῆς. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ σημείου S καὶ τῆς διὰ τὴν ἰσορροπίαν ἐπιβεβλημένης συνθήκης συνεπιπεδότητος τῶν ἐσωτερικῶν καὶ τῶν ἐξωτερικῶν ῥοπῶν προκύπτουσιν ἀναλόγως τῆς λοξότητος εφω/β τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἐξωτερικῆς ῥοπῆς, κατόπιν ἐκτεταμένων ἀλγεβρικῶν πράξεων, αἱ προηγουμένως δοθεῖσαι σχέσεις (A), (B), (Γ), βάσει τῶν ὁποίων δύναται νὰ ὑπο-

---

μεῖον C(O,q,O) καὶ τὸν ἄξονα τῶν Z εἰς τὸ σημεῖον $D(O, O, \sigma_o)$ ἥτις εἶναι: (βλ. *Γ. Ρεμούνδου*, Ἀναλυτικὴ Γεωμετρία, σελ. 85)

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{\sigma_o} = 1$$

καὶ ἀντικαταστάσεως τοῦ z ὑπὸ τοῦ σb, διότι ἐν τῇ ὑπ' ὄψει περιπτώσει, αἱ κατηγμέναι z ταὐτίζονται πρὸς τὰς ἐν τῇ διατομῇ ἀναπτυσσομένας τάσεις σb.

λογισθῇ ἑκάστοτε ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ συντελεστοῦ κατευθύνσεως εφφ τῆς οὐδετέρας γραμμῆς.

Τὸ σημεῖον S καλοῦμεν πόλον τῶν τάσεων σ_e, σ_o, διότι τῶν τάσεων σ_e, σ_o διατηρουμένων σταθερῶν, τὸ σημεῖον τοῦτο ἀποτελεῖ διὰ πάσας τὰς γωνίας λοξότητος ω τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἐξωτερικῆς μεταβλητῆς ροπῆς σταθερὸν πόλον περιστροφῆς τῆς οὐδετέρας γραμμῆς.

Ἡ μεταβολὴ τοῦ λόγου τῶν τάσεων m προκαλεῖ κίνησιν τοῦ πόλου S ἐπὶ εὐθυγράμμου γεωμετρικοῦ τόπου διερχομένου ἐκ τῆς κορυφῆς O τῆς μᾶλλον θλιβομένης γωνίας.'Επὶ δὲ διατομῶν εἰς ἃς ἰσχύει ἡ σχέσις: $h_d/d = h_b/b$ ὁ ἐν λόγῳ γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ἡ διαγώνιος $\overline{02}$ τῆς διατομῆς. Ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου ἐπιτυγχάνεται ἡ σύνταξις πινάκων ὑπολογισμοῦ τῆς γωνίας φ, τοῦ ἀπαιτουμένου ὁπλισμοῦ Fe, Fe′ καὶ τῶν λοιπῶν στοιχείων.

Οὕτω τὸ πρόβλημα τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν ὀρθογωνικῶν διατομῶν ἐξ ὡπλισμένου σκυροδέματος εἰς λοξὴν κάμψιν παύει νὰ ἀποτελῇ θέμα διαδοχικῶν προσεγγίσεων ὡς μέχρι τοῦδε, λαμβάνον τὴν μαθηματικὴν λύσιν αὐτοῦ.

ZUSAMMENFASSUNG

Für die Berechnung der Spannungen und der erforderlichen Bewehrung eines rechteckigen, schief beanspruchten Eisenbetonquerschnittes, welcher sich im Zustande II befindet, ist es nötig, vorher die Nullinie zu bestimmen. Dazu sind zwei Elemente erforderlich:

1. Ein Punkt.
2. Die Richtung.

Die von mir ausgeführte mathematische Untersuchung, führte zu folgenden Lehrsatz:

“*In der Schiefen Biegung des rechteckigen Querchnittes geht die einem Verhältnisse $m = \sigma_e/\sigma_o$ entsprechende Nullinie durch den Schnittpunkt S der parallel zu den Hauptträgheitsachsen laufenden und der dem gleichen Verhältnis m entsprechenden bekannten Nullinien, unter einem Winkel zu der Seite des Querschnittes b, welcher sich aus den folgenden Beziehungen ergibt:*„

$$\text{(I)}\quad \begin{array}{lll} \text{(A)} & (\beta \operatorname{tg}\varphi)^3 + A_2(\beta \operatorname{tg}\varphi)^2 + A_1(\beta \operatorname{tg}\varphi) + A_o = O, & \text{wenn } \dfrac{\operatorname{tg}\omega}{\beta} < \dfrac{1-\nu}{2-3\nu}. \\ \text{(B)} & B_2(\beta \operatorname{tg}\varphi)^2 + B_1(\beta \operatorname{tg}\varphi) - \nu B_o = O, & \text{»} \quad \dfrac{1-\nu}{2-3\nu} < \dfrac{\operatorname{tg}\omega}{\beta} < \dfrac{2-3\nu}{1-\nu} \\ \text{(C)} & (\beta \operatorname{tg}\varphi)^3 + C_2(\beta \operatorname{tg}\varphi)^2 + C_1(\beta \operatorname{tg}\varphi) + C_o = O, & \text{»} \quad \dfrac{\operatorname{tg}\omega}{\beta} > \dfrac{2-3\nu}{1-\nu} \end{array}$$

Es lautet:

$$A_2=(k_5+k_2B_o)/k_6,\quad A_1=(k_4-\frac{k_7}{v}B_o)/k_6,\quad A_o=k_3/k_6,\quad B_o=\beta/tg\omega$$

$$B_2=v,\qquad B_1=k_7(B_o-1)/v$$

$$C_2=\left(k_4-\frac{k_7}{vB_o}\right)/k_3,\quad C_1=\left(k_5+\frac{k_2}{B_o}\right)/k_3,\quad C_o=k_6/k_3$$

$$v=\frac{n}{n+m}h_d/d=\frac{n}{n+m}h_b/b,\quad \beta=b/d,\quad k_5=(2-8v+11v^2-6v^3)/v$$

$$k_1=(4v-3),\quad k_2=(1-v)^2/v,\quad k_3=2v(3-2v),\quad k_4=14v-9v^2-6$$

$$k_6=(1-v)^3/v,\quad k_7=v(2-v).$$

Nehmen wir als Koordinatensystem die Seiten des Druckwinkels O (Abb.1) Die Spannungen werden, für geradlinige Verteilung durch die Formel:

$$\sigma_b=\frac{\sigma_e}{n}=\sigma_o\left(1-\frac{x}{p}-\frac{y}{q}\right) \tag{1}$$

gegeben.

Für $\sigma_b=O$ ergibt sich die Gleichung der Nullinie: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ (2)

Andererseits haben wir (Abb. 1)

$$\frac{\sigma_x}{x_1}=\frac{\sigma_e/n}{h_d-x_1} \tag{3}$$

Und.

$$\sigma_x/\sigma_o=\frac{x_1}{p},\quad x_1=p-h_b tg\varphi \tag{4}$$

Setzt man die Werte σ_x, x_1 in die Gleichung (3) ein, so erhält man:

$$p=\frac{n}{n+\sigma_e/\sigma_o}h_d+\frac{n}{n+\sigma_e/\sigma_o}h_b tg\varphi \tag{5}$$

wonach die Gleichung (5) mit

$$\frac{n}{n+m}h_d=x_d,\qquad \frac{n}{n+m}h_b=x_b \tag{6}$$

ausgedrückt wird, und aus dem rechteckigen Dreieck AOC ergibt sich

$$p=q tg\varphi \tag{7}$$

Setzt man die Werte (6) und (7) in die Gleichung der Nullinie (2) ein so erhält man:

$$1-\frac{x}{x_d+x_b tg\varphi}-\frac{y tg\varphi}{x_d+x_b tg\varphi}=O \tag{8}$$

Es ist ersichtlich, daß sich diese Gleichung (8) durch

$$x=x_d,\quad y=x_b$$

bewahrheitet. Damit ist der Beweis erbracht.

Gemäß des obigen Lehrsatzes kennen wir, nach vorheriger Bestimmung der σ_e, σ_o einen Punkt S der Nullinie, und durch Anwendung einer der Gleichungen (I) die Richtung φ derselben.

Den Punkt S nennen wir Pol der Spannungen σ_e, σ_o. Denn für m konstant bildet S den festen Pol, um welchen sich die Nullinie dreht. Die Veränderung des Spannungsverhältnisses m ruft Bewegung des Pols S auf einen geradlinigen geometrischen ort hervor welcher durch die Spitze des Winkels O läuft.

Bei Querschnitten, bei denen das Verhältnis

$$h_d / d = h_b / b$$

gilt, ist der erwähnte Ort die Diagonale $\overline{02}$ des Querschnittes.

Praktisch betrachtet, können wir durch diesen Lehrsatz Tabellen zur Berechnung des Winkels φ und der erforderlichen Bewehrung aufstellen.

ΓΕΩΡΓΙΚΗ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ. — **Συμβολὴ εἰς τὴν ὀργάνωσιν γεωργικῆς παραγωγῆς (planning). Μέθοδος διαβαθμίσεως τῶν διαφόρων κλάδων γεωργικῆς παραγωγῆς καὶ βαθμοὶ προτεραιότητος αὐτῶν εἰς τὴν ἀνασυγκρότησιν,** *ὑπὸ Σωκράτους Α. Καλογερέα**. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κωνστ. Βέη.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ ὀργάνωσις τῆς παραγωγῆς βάσει σχεδίου (planning) δὲν ἀποτελεῖ μόνον γραμμὴν τῆς παραγωγικῆς πολιτικῆς τῶν σοσιαλιστικῶν χωρῶν ἀλλὰ τείνει νὰ κατακτήσῃ ἔδαφος καὶ εἰς τὰς καπιταλιστικὰς χώρας τοῦ ἐλευθέρου ἀνταγωνισμοῦ. Ἀναγνωρίζεται σήμερον καὶ εἰς τὰς χώρας αὐτὰς τοῦ «laisser faire laisser passer, ὅτι κάποια ἐξωτερικὴ ἐπέμβασις εἰς τὸν αὐτόματον μηχανισμὸν τῆς παραγωγῆς εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν ἀποφυγὴν σπατάλης ποὺ ἄλλως θὰ ἐπήρχετο, ἐὰν τὰ πράγματα ἀφίνοντο νὰ ρυθμισθοῦν μόνα των ὑπὸ τῆς προσφορᾶς καὶ τῆς ζητήσεως.

Τὸ σχέδιον συγκριτικῆς διαβαθμίσεως τῶν διαφόρων μορφῶν τῆς παραγωγικῆς δραστηριότητος ποὺ πρόκειται νὰ εἰσηγηθῶμεν κατωτέρω, χωρὶς νὰ ἀποτελῇ planning αὐτὸ καθ' ἑαυτό, εἶναι ἐξ ἴσου ἀπαραίτητον τόσον δι' οἱονδήποτε πρόγραμμα σχεδιασμένης σοσιαλιστικῆς παραγωγῆς ὅσον καὶ διὰ κάθε σύστημα

---

* **S. A. KALOGEREAS: Contribution towards planning in rehabilitation. A method of rating the importance of any food producing agricultural industry.**