ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 1ΗΣ ΜΑΪΟΥ 1947

ΠΡΟΕΔΡΙΑ ΙΩΑΝΝΟΥ ΚΑΛΙΤΣΟΥΝΑΚΗ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΘΑΝΑΤΟΥ ΤΟΥ ΒΑΣΙΛΕΩΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ Β΄

Ὁ **Πρόεδρος** ἀνεκοίνωσεν ἐν τῇ ἰδιαιτέρᾳ Συνεδρίᾳ τῆς 1 Μαΐου 1947 ὅτι ἡ Σύγκλητος τῆς Ἀκαδημίας, ἅμα τῇ ἀγγελίᾳ τοῦ θανάτου τοῦ Βασιλέως ***Γεωργίου Β΄***, ὁ ὁποῖος ὑπῆρξε φίλος καὶ προστάτης τῆς Ἀκαδημίας, ἐξέδωκε σχετικὸν ψήφισμα ὑποβληθὲν πρὸς τὴν Α. Μ. τὸν Βασιλέα Παῦλον, παρηκολούθησε δὲ τὴν κηδείαν τοῦ Σεπτοῦ νεκροῦ.

ΕΙΔΙΚΑΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΕΙΣ ΒΙΒΛΙΩΝ

Ὁ ***Γενικὸς Γραμματεὺς*** παρουσιάζει τὸν μόλις ἐκδοθέντα Β΄ τόμον τῆς Ἱστορίας τοῦ Βυζαντινοῦ Κράτους ὑπὸ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. ***Κ. Ἀμάντου*** καὶ ὁμιλεῖ περὶ τῆς σπουδαιότητος τοῦ συγγράμματος.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ

ΓΕΩΡΓΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ.—Sur la loi du rendement, *par N. Roussopoulos**.
Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κ. Ζέγγελη.

La courbe du rendement des plantes, en fonction d'un facteur, les autres facteurs restant constants, comprend, généralement, une branche ascendante, qui interesse particulièrement l'agriculture, et une branche descendante, manifestant l'action nocive du facteur du rendement considéré. Pour la première branche Mitscherlich a donné la formule bien connue, dite de première approximation, $y = A\left(1 - e^{-Kx}\right)$ ou $y = A\left(1 - 10^{-cx}\right)$; pour l'ensemble,

* Ν. ΡΟΥΣΣΟΠΟΥΛΟΣ: Περὶ τοῦ νόμου ἀποδόσεως.

au contraire, de la courbe du rendement, le même auteur a donné, ulterieurement, la formule dite de deuxième approximation $y = A \left(1 - 10^{-cx}\right) . 10^{-K'x^2}$.

La formule de première approximation est déduite par Mitscherlich correctement, par analogie avec la formule des reactions monomoleculaires; quant à la formule de deuxième approximation, sa déduction mathématique est erronnée et forcée, de telle sorte que cette formule doit être considérée, tout au plus, comme une formule empirique.

Sans nous arrêter sur les critiques adressées aux formules de Mitscherlich, nous nous contenterons de faire remarquer ici que, vue leur importance théorique et pratique (surtout de la première), il paraissait souhaitable de trouver, toujours sur la base de la formule initiale de Mitscherlich, qui s'est montrée si féconde pour la recherche, une formule plus générale, correctement déduite d'elle et embrassant toute l'étendue de la courbe du rendement. C'est le but de ce travail. La formule de première approximation de Mitscherlich, en ne considérant que la branche ascendante de la courbe du rendement, envisage ce dernier comme un phénomène purement anabolique ou d'assimilation, c'àd de formation de substance végétale.

Mais, en realité, le rendement est essentiellement un phénomène de métabolisme c'àd non seulement d'assimilation mais aussi de désassimilation, non seulement de formation mais en même temps de destruction de matière organique. La matière végétale pendant qu'elle se forme sous l'action d'un facteur, suivant la formule initiale de Mitscherlich, peut, en même temps et d'une manière générale, être plus ou moins détruite sous l'action de ce même facteur, suivant toujours le même mecanisme, c.à.d. en obéissant à la loi d'action des masses.

Ainsi, soit z le rendement qui correspondrait à une dose x d'un facteur, si la matière végétale ne se détruisait pas sous l'action de ce facteur; et soit. A le rendement maximum corresdondant. Nous dévrions alors avoir: $\frac{dz}{dx} = K\ (A - z)$ (I). Mais si ξ est, dans le cas le plus général, la quantité de matière détruite, pour la dose x du facteur considéré, le rendement réellement observé sera (pour cette dose x du facteur): $y = z - \xi$ (II).

Et si nous admettons, ainsi que nous venons de dire, que la destruction de la natière suit, elle aussi, une formule analogue à celle des réactions monomoléculaires, c.à.d. si nous admettons que $\frac{d\xi}{dx} = K'y$, nous devons alors avoir, d'après (II):

$$\frac{d\xi}{dx} = K'(z-\xi).$$

Mais de (I) nous tirons $z = A\left(1 - e^{-Kz}\right)$ et de (III):

$$\frac{d\xi}{dx} = K'(z-\xi) = K'A\left(1 - e^{-Kx}\right) - K'\xi \quad \text{ou} \quad \frac{d\xi}{dx} + K'\xi = K'A\left(1 - e^{-Kx}\right) \qquad \text{(IV)}.$$

Cette dernière équation est une équation linéaire de premièr ordre; En l'intégrant, nous avons, tous calculs faits:

$$\xi = \left[A - \frac{K'A}{K'-K}e^{-Kx} + Ce^{-K'x}\right] \qquad \text{(V)}$$

où C est la constante d'intégration. Cette constante nous pouvons la déterminer en faisant la remarque que pour $x = O$, nous devons avoir $y = O$.

$$O = \left[A - \frac{K'A}{K'-K} + C\right] \quad \text{d'où} \quad C = -A + \frac{K'A}{K'-K}, \quad \text{et (V)}$$

devient finalement, en y introduisant la valeur ci-dessus de C:

$$\xi = A\left(1 - e^{-Kx}\right) + \frac{K'A}{K'-K}\left(e^{-K'x} - e^{-Kx}\right) \qquad \text{(VI)}$$

Par conséquent (II) s'écrit:

$$y = z - \xi = A\left(1 - e^{-Kx}\right) - A\left(1 - e^{-Kx}\right) - \frac{KA}{K'-K}\left(e^{-K'x} - e^{-Kx}\right), \text{ ou,}$$

$$y = \frac{KA}{K'-K}\left[e^{-Kx} - e^{-K'x}\right] \qquad \text{(VII)}$$

La Fig. I représente, pour $A = 100$, les courbes du rendement, suivant (VII) pour qq couples de valeurs de K et K'.

La formule (VII) rapelle celle de la cinétique chimique qui se rapporte au cas où une substance M (un corps radioactif p. ex.), se transforme en une substance M', elle même détruite suivant une réaction du même ordre: $M \rightarrow M' \rightarrow M'' + \ldots$ C'est aussi le cas, d'après Brody, Ragsdale et Turner, de la croissance (ou sénescence), en fonction du temps, exprimée par un indice quelquonque, la sécrétion lactée pex (voir F. Faure-Frémiet, La Cinétique du développement, Presses Universitaires, Paris, 1925 p. 326).

Si la constante de destruction K' est égale à zéro (si c.à.d. le phénomène destructif est insignifiant), la formule (VII) devient $y = A\left(1 - e^{-Kx}\right)$: c'est la formule de première approximation de Mitscherlich, généralement valable d'après lui pour la branche ascendante de la courbe du rendement.

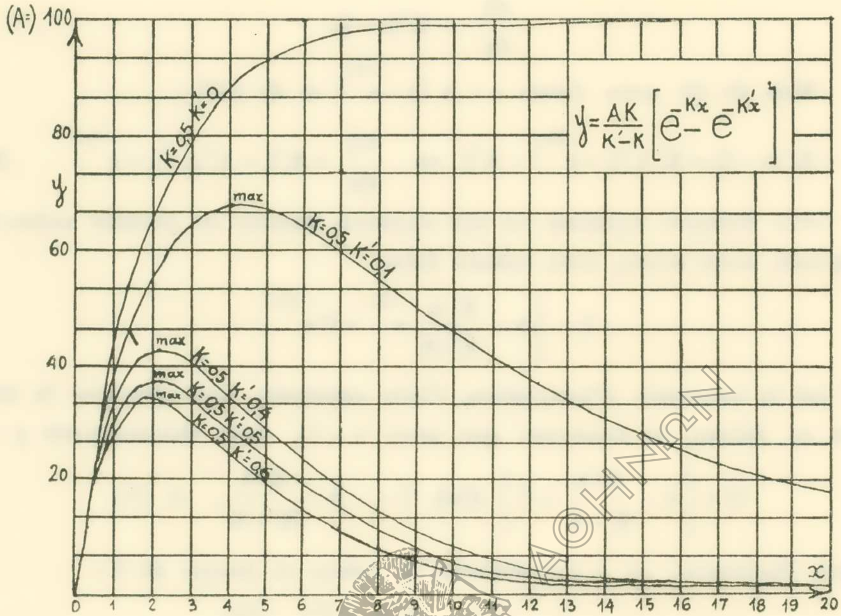

Fig. I.

D'autre part, dans le cas où K' = K la formule (VIII) donne $\frac{0}{0}$. Mais on peut, dans ce cas, calculer la valeur de y, en fonction de x, soit en égalant K' à K dans (IV), en intégrant comme précedemment, soit en cherchant la vraie valeur de (VII) se réduisant à $\frac{0}{0}$ pour K' = K. On trouve ainsi, pour K' = K :

$$y = K A x e^{-Kx}. \qquad \text{(VIII).}$$

Cette dernière formule est importante ; car l'assimilation et la désassimilation sous l'influence, respectivement, de l'action utile et de l'action nuisible de qq facteurs fondamentaux pour la nutrition des plantes, comme se rapportant, toutes deux, à la substance végétale et comme étant de la même nature enzymatique, est très probable, qu'elles présentent, tout au moins dans des conditions déterminées, la même constante d'action.

À remarquer que la valeur particulière de x, $z = \frac{1}{K}$, qui annule la dérivée première de (VIII) rend y maximum et ce maximum est, d'après (VIII), $y \max = \frac{A}{e} = \frac{A}{2{,}718}$, c'àd indépendant de la valeur de K.

La fig. (II) représente, pour A = 100, les courbes du rendement, suivant (VIII), pour quelques valeurs de K (= K').

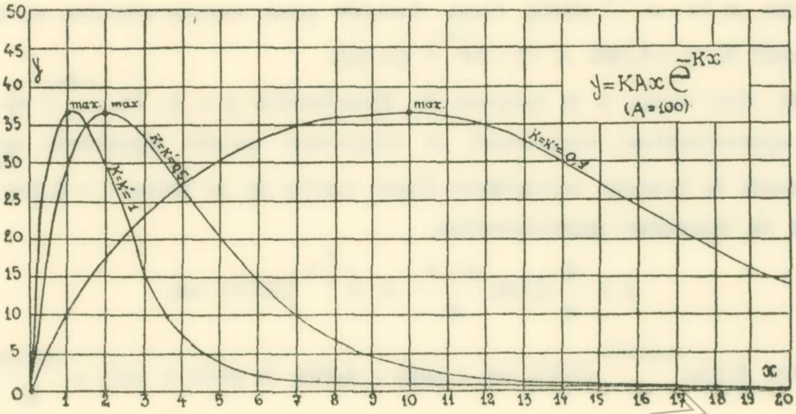

Fig. II.

D'autre part, l'allure des courbes (VII) et (VIII), coïncide pratiquement et d'une manière générale, jusqu'à y max, avec l'allure d'une courbe de Mitscherlich de première approximation, qui a la même tangente à l'origine des axes que les courbes précédentes, passe par le y max, et tend asymptotiquement à une valeur A′ légèrement supérieure à y max.

Ainsi soit la courbe $y = KAxe^{-Kx}$; elle peut approximativement, d'après ce qui précède, être remplacée, jusqu'à y max, par une courbe: $y = A'\left(1-e^{-K'x}\right)$ (IX). Déterminons les paramètres A′ et K′ de (IX), dans les suppositions que nous venons de faire. Les tangentes $\frac{dy}{dx}$, à l'origine des axes (c'àd pour $x = o$), de deux courbes (VIII) et (IX) sont respectivement égales à KA et à K′A′; et comme, d'après nos suppositions $KA = K'A'$ et $A' \simeq y\ max = \frac{A}{e}$, ils s'en suit que $K' = Ke$. Ainsi la formule (IX) devient $y = A'\left(1-e^{-Kex}\right)$ (X). Cette dernière nous permet de déterminer A′ plus exactement en remarquant que, d'après elle, nous devons avoir $y\ max = \frac{A}{e} = A'\left(1-e^{-Kex\ max}\right)$ et comme $x\ max = \frac{1}{K}$, $A' = \frac{A}{e}\,\frac{e^e}{(e^e-1)}$ ou $A' = y\ max\,\frac{e^e}{(e^e-1)}$.

Nous devons ainsi avoir $A' = 1{,}071$ y max et y max $= 0{,}934$ A′, et la formule (IX) s'écrit:

$$\text{(XI)}\quad y = \frac{A}{e}\,\frac{e^e}{(e^e-1)}\left(1-e^{-Kex}\right), \text{ ou } y = 1{,}071\ y\ max\left(1-e^{-Kex}\right) \text{ ou encore}$$

$$y = \frac{1{,}071}{2{,}718}\,A\left(1-e^{-Kex}\right) \text{ soit:}$$

$y = 0{,}394\ A\left(1 - e^{-Kex}\right)$ (XII). Cette formule peut encore s'écrire, en posant $c = 0{,}4343\ K$, $y = 0{,}394\ A\left(1 - 10^{-cex}\right)$ (XIII).

Et, vice versa, à la formule de Mitscherlich $y = A\left(1 - e^{-Kx}\right)$ de première approximation, correspond, en supposant qu'elle représente approximativement la branche ascendante d'une courbe de la forme $y = KAxe^{-Kx}$, la formule de deuxième approximation.

$$y = \frac{K}{e}(Ae)^{\frac{e^e-1}{e^e}} .\ x\ e^{-\frac{K}{e}x} \quad \text{(XIV) ou}$$

$y = 0{,}934\ KAxe^{-0{,}3679Kx}$ (XV), où $y\ max = 0{,}934\ A$ pour $x\ max = \frac{2{,}718}{K}$. La formule (XV) peut encore être écrite $y = 2{,}051\ CAx\ 10^{-Cx}$ (XVI).

Enfin, à la formule de Mitscherlich $y = A\left(1 - 10^{-Cx}\right)$ correspond, dans les conditions supposées, la foruule de deuxième approximation :

$$y = 2{,}150\ CAxe^{-0{,}3679\ cx} \qquad \text{(XVII)}$$

Les tableaux (I) et (II) montrent le dégré d'approximation obtenu en substituant la formule (XII) à la formule (VIII), pour la branche ascendante de cette dernière. Ainsi que nous voyons, la formule initiale de Mitscherlich peut bien se substituer, vue aussi sa plasticité, à la formule (VIII), pour la branche ascendante de la courbe représentée par cette dernière.

TABLEAU I.

(formule pour toute la courbe du rendement : $y = KAxe^{-Kx}$ (VIII) ; formule approchée pour la branche ascendante $y = 0{,}394\ A\left(1 - e^{-Kex}\right)$ (XII); A=100; K=1)

x	y calculé d'après (VIII)	y calculé d'après (XII)
0,01	0,99	1,08
0,05	4,76	5,06
0,1	9,05	9,37
0,2	16,29	16,51
0,3	22,22	21,97
0,5	30,4	29,27
0,75	35,47	35,27
1	36,79	36,79

TABLEAU II.

(formule pour toute la courbe du rendement: $y = KAxe^{-Kx}$ (VIII); formule approchée pour la branche ascendante: $y = 0{,}394\ A\left(1 - e^{-Kex}\right)$ (XII); A=100; K=0,1

z	y calculé d'après (VIII)	y calculé d'après (XII)
0,1	0,99	1,07
0,5	4,76	5,06
1	9,05	9,37
2	16,29	16,51
3	22,22	21,97
4,025	26,91	26,2
6,932	34,65	34,58
10	36,79	36,79

La loi du rendement pour plusieurs facteurs obéissant à la formule (VIII). De la même manière que Baule a déduit de la formule initiale de Mitscherlich la formule qui porte son nom, nous pouvons formuler que le rendement y, en fonction de plusieurs facteurs obéissant à la formule (VIII), ect.

$$y = KK'K''\ldots Axyz\ldots e^{-Kx} \cdot e^{-K'y} \cdot e^{-K''z} \ldots, \text{ où } K, K'K''\ldots$$

sont des constantes correspondant aux facteurs x, y, z . . Dans le cas où $-Kz = -K'y = -K''z\ldots \simeq 0$, cette formule se réduit à $y = kxyz\ldots$, c.à.d. à une formule identique à la loi du produit que sir Jagadis Bose a trouvé pour une portion de la courbe de l'assimilation du carbone (voir sa Physiologie de la photosynthèse, Gauthier-Villars, 1927 p. 270 et suivantes).

Conclusion. Le rendement sous l'action d'un facteur x, dans le cas le plus général où ce facteur exerce une action formatrice (correspondant à la constante K), en même temps qu'une action plus ou moins destructive (correspondant à la constante K') est donnée, en admettant que ces deux actions antagonistes obéissent toutes deux à une loi analogue à la loi d'action des masses de la cinétique chimique, par la formule $y = \frac{KA}{K'-K}\left[e^{-Kx} - e^{-K'x}\right]$ (VI). Dans le cas où K'=K cette formule devient: $y = KAxe^{-Kx}$ (VIII). Quant à la formule de première approximation de Mitscherlich $y = A\left(1 - e^{-Kx}\right)$ ou $y = A\left(1 - 10^{-cx}\right)$ elle doit s'appliquer soit (et alors exactement) lorsque dans (VI) $K' = O$, soit (et alors approximativement) pour la branche ascendante (jusqu'à y max seulement) des courbes (VI) et (VIII). La formule générale (VI) doit être considérée comme une généralisation de la formule initiale de Mitscherlich.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ γενικὸς τύπος τῆς καμπύλης ἀποδόσεως (δευτέρας προσεγγίσεως) ὑπὸ θεώρησιν καὶ τῆς ἐπιδλαβοῦς δράσεως ἑνὸς παράγοντος x (εἰς ἣν ἀντιστοιχεῖ συντελεστὴς K΄), ἀκολουθούσης καὶ ταύτης τύπον ἀνάλογον πρὸς τὸν νόμον τῶν μονομοριακῶν ἀντιδράσεων, ἤτοι Mitscherlich πρώτης προσεγγίσεως, εἶναι $y = \frac{KA}{K' - K}\left(e^{-Kx} - e^{-K'x}\right)$ (VII). Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $K' = K$, ὁ τύπος οὗτος καθίσταται $y = KAxe^{-Kx}$ (VIII).

Ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸν τύπον πρώτης προσεγγίσεως τοῦ Mitscherlich $y = A\left(1 - e^{-Kx}\right)$ οὗτος δέον νὰ ἰσχύῃ εἴτε, καὶ δὴ ἀκριβῶς, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἰς τὴν (VIII) ἔχομεν $K' = O$ (μηδαμινὴν ἐπιδλαβῆ δρᾶσιν), εἴτε, καὶ δὴ κατὰ προσέγγισιν, διὰ τοὺς ἀνερχομένους μόνον κλάδους (μέχρι y max) τῶν καμπύλων (VI) καὶ (VIII). Οὕτως εἰς τὸν ἀνερχόμενον κλάδον τῆς (VIII) ἀντιστοιχεῖ καμπύλη τύπου Mitscherlich $y = 0{,}394\ A\left(1 - e^{-Kex}\right)$ ἢ $y = 0{,}394\ A\left(1 - e^{-cex}\right)$ (ὅπου $c = 0{,}4343\,K$).

Τέλος, σχετικῶς πρὸς τὴν ἀπόδοσιν περισσοτέρων παραγόντων, δρώντων κατὰ τὸν τύπον $y = KAxe^{-Kx}$ (VIII) αὔτη παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$y = KK'K'' \ldots Axyz \ldots e^{-Kz} \,.\, e^{-K'y} \,.\, e^{-K''z} \ldots .$$

(ὅπου K,K΄,K΄΄.. σταθεραὶ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τοὺς παράγοντας x, y, z,...). Ὁ τελευταῖος τύπος διὰ $e^{-Kx} = e^{-K'y} = e^{-K''z} \ldots \cong O$, λαμβάνει τὴν μορφὴν $y = kxyz$ (ὅπου $K = KK'K'' \ldots A$), ἤτοι ἀνάλογον πρὸς τὸν νόμον τοῦ γινομένου, τὸν ὁποῖον εὗρεν ὁ Bose δι' ἓν τμῆμα τῆς καμπύλης ἀφομοιώσεως τοῦ ἄνθρακος. Ὁ τύπος (VI) δέον νὰ θεωρηθῇ ὡς γενίκευσις τοῦ τόσον γονίμου ἀρχικοῦ τύπου τοῦ Mitscherlich.