Summe der Abschnitte zwischen dem Vieleck Π_2 und dem Kreise $K_2 < \varepsilon$, (3)

Durch Addition von (3) und (2) bekommen wir $\Pi_2 < \Sigma$. (4)

Dem Kreise K_1 umschreiben wir ein dem Vieleck Π_2 ähnliches Vieleck, es sei Π_1. Nach Euklid XII, 1 ist $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$. (5)

Aus (1) und (5) haben wir $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, wobei $\Sigma > K_2$ ist.

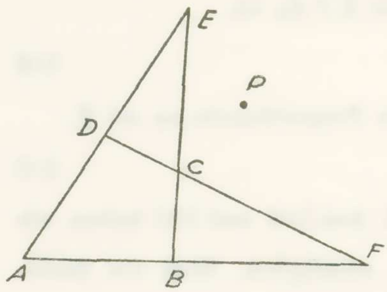
Weil nun $\Pi_1 > K_1$, so ist auch $\Pi_2 > \Sigma$, (V, 14). Dies ist aber wegen (4) unmöglich. Derselbe Beweis, dass $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{\Sigma}$, wobei $\Sigma > K_1$, nicht gilt. Es bleibt also $\Sigma = K_2$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.—**Περὶ ἑνὸς θεωρήματος τῆς Γεωμετρίας τοῦ Morley-Lebesque,** *ὑπὸ Θ. **Βαροπούλου****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

Αἱ ἐσωτερικαὶ τριχοτόμοι τῶν γωνιῶν A,B,C *τριγώνου τυχόντος* ABC, *τεμνόμεναι καθορίζουν ἰσόπλευρον τρίγωνον.*

Ἕπεται γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως στηριζομένη εἰς τὰ ἑξῆς γνωστά.

1. *Ἔστω ἓν πλῆρες τετράπλευρον* ABCDEF. *Τὰ τρία ζεύγη εὐθειῶν* PA, PC; PB, PD; PE, PF *ἑνουσῶν τυχὸν σημεῖον* P *μὲ τὰς ἔναντι κορυφὰς εἶναι ἐν ἐνελείξει, δηλαδὴ εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς δύο σταθερὰς εὐθείας* Px, Py.



Πράγματι αἱ ἐκ τοῦ P ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὰς κωνικάς, αἵτινες ἐφάπτονται τῶν τεσσάρων εὐθειῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, ἀποτελοῦν ἐνέλειξιν.

Μεταξὺ τῶν κωνικῶν τούτων εὑρίσκονται τὰ ζεύγη τῶν σημείων

A, C; B, D; E, F.

Ἐὰν αἱ γωνίαι (PA, PC), (PB, PD) ἔχουν τὰς αὐτὰς διχοτόμους Px, Py, τότε τὸ αὐτὸ θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὴν γωνίαν (PE, PF), καθ' ὅσον Px, Py εἶναι συζυγεῖς ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ἑκάστου τῶν δύο ζευγῶν PA, PC; PB, PD.

2. Ἔστω P ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἓν τρίγωνον ABC. Ἡ συμμετρικὴ τῆς PA ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον εἶναι ἡ εὐθεῖα AP′, ἥτις μετὰ τῆς AC σχηματίζει τὴν αὐτὴν γωνίαν ἣν καὶ ἡ AP σχηματίζει μετὰ τῆς AB.

---

* TH. VAROPOULOS, Sur un théorème de la géométrie de Morley-Lebesque.

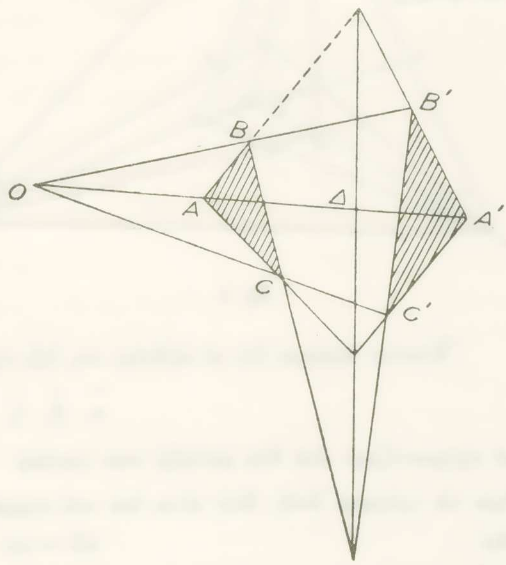
Αἱ συμμετρικαὶ τῶν AP, BP, CP συνέρχονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον P′.

Τὰ δυὸ σημεῖα P, P′ καλοῦνται *ἀντίστροφα ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον*.

3. Δύο τρίγωνα ABC, A′B′C′ καλοῦνται *ὁμόλογα*, ὅταν:

α) αἱ εὐθεῖαι AA′, BB′, CC′ αἱ ἑνοῦσαι τὰς ὁμολόγους κορυφὰς ἀνέρχονται δι᾽ ἑνὸς σημείου O, καλουμένου *κέντρου τῆς ὁμολογίας*.

β) τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ὁμολόγων πλευρῶν AB, A′B′; BC, B′C′; CA, C′A′ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, ἥτις καλεῖται *ἄξων τῆς ὁμολογίας*. Ἑκατέρα τῶν δύο τούτων ἰδιοτήτων συνεπάγεται τὴν ἄλλην.



4. Εἰς τὸ σχῆμα 1 θεωρήσωμεν τὸ τετράπλευρον αBβA, οὗτινος τελευταῖαι κορυφαὶ εἶναι c καὶ τὸ σημεῖον τομῆς ω τῶν Aα, Bβ.

Αἱ γωνίαι (Cα, Cβ) καὶ (CA, CB) ἔχουν τὴν αὐτὴν διχοτόμον, δηλαδὴ εἶναι συμμετρικαί, ὅθεν Cc καὶ Cω εἶναι συμμετρικαί.

Ἀλλὰ τὸ σημεῖον ἀντίστροφον τοῦ c ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον ABC εἶναι τὸ γ, ἄρα Cω διέρχεται διὰ τοῦ γ καὶ αἱ εὐθεῖαι Aα, Bβ, Cγ συγκλίνουν, ὅτε τὰ τρίγωνα ABC, αβγ εἶναι ὁμόλογα.

Αἱ συμμετρικαὶ Aa, Bb, Cc τῶν Aα, Bβ, Cγ συγκλίνουν εἰς τὸ σημεῖον O ἀντίστροφον τοῦ ω.

Ἄρα τὰ τρίγωνα ABC, abc εἶναι ὁμόλογα.

Τὸ τετράπλευρον cωγο ἔχει ὡς τελευταίας κορυφὰς τὸ σημεῖον c καὶ τὸ σημεῖον τομῆς h τῶν cω, ογ.

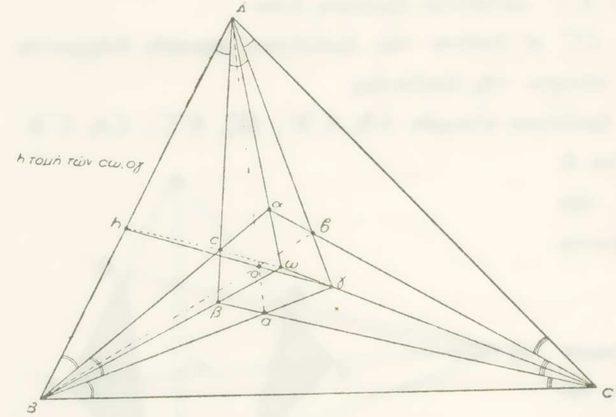
Ἀλλ᾽ αἱ γωνίαι (cA, γA), (oA, ωA) ἔχουν τὰς αὐτὰς διχοτόμους, ἄρα Ac, Ah εἶναι συμμετρικαὶ καὶ h κεῖται ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς AB τῆς AC.

Εἰς τὸ τετράπλευρον ABβα ἡ αβ συναντᾷ τὴν AB εἰς τὸ σημεῖον h′ συζυγὲς τοῦ h ὡς πρὸς τὰ A καὶ B.

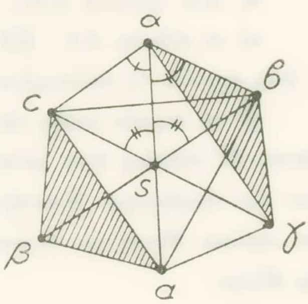
Εἰς τὸ τετράπλευρον ABba ἡ εὐθεῖα ab συναντᾷ τὴν AB εἰς τὸ σημεῖον h′ συζυγὲς τοῦ h ὡς πρὸς τὰ A καὶ B.

Ἄρα ab καὶ αβ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος ὁμολογίας τοῦ ABC καὶ abc ἢ τῶν ABC καὶ αβγ.

Τὸ αὐτὸ διὰ τὰς bc καὶ βγ, καθὼς καὶ τὰς ca καὶ γα, κατ᾽ ἀκολουθίαν τὰ τρίγωνα abc καὶ αβγ εἶναι ὁμόλογα καὶ αἱ aα, bβ, cγ συγκλίνουν (σχ. 2) εἰς τὸ σημεῖον s.



Σχ. 1



Σχ. 2.

Ἕπεται ἀμέσως ὅτι αἱ εὐθεῖαι aα, bβ, cγ εἶται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν

$$\widehat{\alpha},\ \widehat{\beta},\ \widehat{\gamma},$$

καὶ σχηματίζουν ἀνὰ δύο μεταξύ των γωνίας $\frac{\pi}{3}$.

Ἄρα τὰ τρίγωνα Sαb, Sαc εἶναι ἴσα καὶ συμμετρικὰ ὡς πρὸς Sα

ὅθεν $ab = ac$

ὁμοίως $bc = ba.$

5. Ἰδοὺ ἤδη ἡ ἐκφωνηθεῖσα πρότασις ὡς μερικὴ περίπτωσις τοῦ *θεωρήματος τοῦ Morley*.

Καλοῦμεν *πρώτας τριχοτόμους* προσκειμένας εἰς τὰς AB, BC, CA τὰς εὐθείας Aβ, Bγ, Cα καὶ εἰς τοῦ A τὰς εὐθείας Aβ′, Aβ″, αἵτινες σχηματίζουν μετὰ τῆς Aβ τὰς γωνίας $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$.

Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι Aβ, Aβ′, Aβ″ καλοῦνται *πρῶται τριχοτόμοι* εἰς τὸ A. Ὁμοίως ἔχομεν τὰς εἰς τὸ B πρώτας τριχοτόμους Bγ, Bγ′, Bγ″ καὶ τὰς εἰς τὸ C πρώτας τριχοτόμους Cα, Cα′, Cα″.

Ἰδοὺ τὸ *θεώρημα τοῦ Morley.*

Τὰ 27 σημεῖα τομῆς a, b, c *τῶν ζευγῶν τῶν πρώτων τριχοτόμων τῶν γωνιῶν* A, B, C, *προσκειμένων εἰς τὰς πλευρὰς* AB, BC, CA *διαχωρίζονται 6 ἀνὰ 6 ἐπὶ 9 εὐθειῶν καὶ εἶναι κορυφαὶ 27 ἰσοπλεύρων τριγώνων.* Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ ἰδία.

Ἡ μελέτη τῶν n-χοτόμων ($n \geq 3$) ἐγένετο ὑπὸ τοῦ Lebesque[1].

Ἐκ τῶν 27 ἰσοπλεύρων τριγώνων τοῦ θεωρήματος τοῦ Morley 3 ἔχουν κορυφὰς τὰ σημεῖα a, *τρία τρίγωνα ἔχουν κορυφὰς τὰ σημεῖα* b, *καὶ τρία τὰ σημεῖα* c.

Τὰ 18 ἄλλα τρίγωνα ἔχουν κορυφὰς ἓν a *ἓν* b *καὶ ἓν* c.

Ἰδιαιτέρως τὰ σημεῖα τομῆς τῶν προσκειμένων εἰς τὰς πλευρὰς AB, BC, CA *ἐσωτερικῶν διχοτόμων εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου* $a_{11}b_{11}c_{11}$.

RÉSUMÉ

Dans le second livre postume de Henri Lebesque se trouve exposé, pour le cas des tricectrices, un resultat du géomètre Frank Morley, qui, pour le cas de $n = 3$, prend la forme suivant: «*Les 27 points d'intersection a,b,c des couples de trisectrices adjacentes aux cotés* BC, CA, AB *se repartissent 6 à 6 sur 9 droites dont les trisections ont des inclinaisons moyennes arithmétiques de celles de côtés; ces points sont les sommets de 27 triangles équilateraux*» Lebesque *remarque que bien des parties de cet énoncé s'obtiennent* par la géométrie.

Nous établissons dans cette courte note, par des voies géométriques, la proposition en question, selon l'assertion de Lebesque.

ΓΕΩΡΓΙΑ. — Ἡ ἀποτελεσματικότης τῆς φωσφορικῆς λιπάνσεως διὰ τὴν παραγωγικὴν ἀνάπτυξιν τῆς καλλιεργείας τῶν ἐτησίων ὀσπρίων ἐν Ἑλλάδι, *ὑπὸ* ***Δημ. Ἀθ. Πάνου.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κωνστ. Ἰσαακίδου.

Ἡ παραγωγὴ τῶν ὀσπρίων καὶ γενικώτερον τῶν ἐτησίων ψυχανθῶν ἐπηρεάζεται, ὡς γνωστόν, ἀπὸ πλείστους παράγοντας, μεταξὺ τῶν ὁποίων ἀποφασιστικὴν σημασίαν ἔχει ἡ χρησιμοποιουμένη ποικιλία, καθὼς ἐπίσης καὶ ἡ ἐφαρμοζομένη λίπανσις.

Διὰ τὴν ἐπιστημονικὴν διερεύνησιν τῆς λιπάνσεως ὁ Γεωργικὸς Σταθμὸς Ἐρεύνης Λαρίσης διενήργησεν ἐπὶ σειρὰν ἐτῶν πειράματα εἰς διαφόρους περιοχὰς τῆς χώρας (1) καὶ (2) μὲ ἐνδιαφέροντα στοιχεῖα.

Ἐνταῦθα προτιθέμεθα νὰ ἀνακοινώσωμεν τὰ ἐπιτευχθέντα ἀποτελέσματα πολυετοῦς πειραματισμοῦ, ὅστις ἐγένετο εἰς τὰς κεντρικὰς ἐκτάσεις τοῦ Ἱδρύματος, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ ἀρκούντως ἀντιπροσωπευτικαὶ τῆς πεδιάδος Λαρίσης.

Οἱ ἀγροὶ εἶναι ἀργιλλώδους συστάσεως μὲ ποσοστὸν φυσικῆς ἀργίλλου **μέχρι** καὶ 49,48 %, μικρᾶς περιεκτικότητος εἰς χουμάδα, ἥτις διακυμαίνεται εἰς τὸ ἀνώτε-

---

[1] Βλπ. τὸ βιβλίον «Sur les constructions géométriques» ch. IV, καθὼς καὶ τὸ Enseignement mathématique 1939-1940, nos 1, 2, 3, p. 39· ἐπίσης *Congrès de l'Avancement des Sciences*, à Liège, 1939.