ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ — **Sur les Algèbres de dimension paire,** *par Jeanne Ferentinou - Nicolacopoulou* *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Φίλ. Βασιλείου.

Prélimimaires. On considère une R-Algèbre E de dimension n, où R est un anneau avec unité notée 1, mais non nécessairement associatif. On note $I = \{1, \ldots, n\}$ et on suppose qu'il existe une base $(c_i)_{i \in I}$ telle que à chaque couple $(i, j) \in I^2$ correspond un $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et un $h \in I$ de manière que $c_i c_j = \varepsilon c_h$.

Dans la première partie de ce travail on construit une R-Algèbre $\bar{A}$ de dimension 2n, ayant une sous-Algèbre A isomorphe à E et on démontre que :

1) Si E est commutative, $\bar{A}$ l'est aussi.

2) Si E est associative, $\bar{A}$ l'est aussi.

3) Si E possède un élément unité, qui est un élément de la base $(c_i)_{i \in I}$, alors $\bar{A}$ a un élément unité.

4) Ils existent deux sous-Algèbres A_1 et A_2 de $\bar{A}$ lesquelles considérées comme anneaux, sont idéaux de l'anneau $\bar{A}$ et tout élément différent de zéro de cettes sous-Algèbres est un diviseur de zéro de $\bar{A}$.

Dans la deuxième partie on suppose que R est un anneau associatif avec unité et tel que l'équation $2x = 1$ admet une solution dans R. Pour l'Algèbre $\bar{A}$ on démontre alors dans ce cas qu'elle a en plus les propriétés suivantes :

5) Chacune des sous-Algèbres A_1 et A_2 est isomorphe à l'Algèbre A.

6) L'anneau $\bar{A}$ est somme directe de ses idéaux A_1 et A_2.

7) Si l'anneau E est sans diviseurs de zéro, les idéaux A_1 et A_2 de $\bar{A}$ sont premiers et les diviseurs de zéro de $\bar{A}$ sont les éléments les différents de 0 de l'ensemble $A_1 \cup A_2$. L'ensemble $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ est un groupoid multiplicatif et si E est un anneau associatif avec unité, alors $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ est un monoïde.

8) Si E est un division ring, alors les idéaux A_1 et A_2 sont maximaux et pour tout $a \in \bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ et $b \in \bar{A}$ les équations $ax = b$ et $ya = b$ ont des solutions dans $\bar{A}$.

---

* ΙΩΑΝΝΑ ΦΕΡΕΝΤΙΝΟΥ-ΝΙΚΟΛΑΚΟΠΟΥΛΟΥ, **Περὶ τῶν Ἀλγεβρῶν ἀρτίας διαστάσεως.**

9) Si l'anneau E est un quasifield, alors pour tout $a \in \bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ et $b \in \bar{A}$ les équations $ax = b$ et $ya = b$ ont une et une seule solution dans $\bar{A}$ et l'ensemble $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ est un quasigroupe multiplicatif. Si en particulier E est un corps, alors $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ est un groupe.

Note. Nous remarquons ainsi l'existence d'une nouvelle structure «entre» l'anneau et le corps. Nous la nommons corpomorphe et nous la définissons comme suit : Si A est un anneau et S l'ensemble dont les éléments sont les diviseurs de zéro de A (s'ils existent) et l'élément zéro de A alors, si l'ensemble A-S est un groupe multiplicatif, l'anneau A s'appelle corpomorphe. Il est évident que le corpomorphe est un corps, si, et seulement si, $S = \{0\}$.

10) Si E est alternative, $\bar{A}$ l'est aussi.

Pour les définitions des notions et termes cités on a suivi le livre de Kurosh, A. : Lectures on general Algebra (english translation) (1963) qui, avec le livre des Mac Lane, S-Birkhoff : Algebra (1967), ont été les principales sources bibliographiques de ce travail.

PREMIÈRE PARTIE

1. Construction de l'Algèbre $\bar{A}$.

Pour construire la R-Algèbre $\bar{A}$ de dimension 2n ayant une sous-algèbre A isomorphe à E on considère un R-module $\bar{A}$ de dimension 2n ayant une base $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ et tel que le sous-module A engendré par les éléments $(e_i)_{i \in I}$ soit isomorphe à E. On note $J = \{n+1, \ldots, 2n\}$, $D = I \cup J$, $\bar{e}_i = e_{2n+1-i}$ $\forall i \in D$ et on identifie E et A en identifiant pour tout $i \in I$ c_i et e_i. On peut alors étendre sur $\bar{A}$ la multiplication de E de la manière suivante :

— Si $(r, s) \in J^2$ on pose $e_r e_s = \bar{e}_r \bar{e}_s$.

— Si $(r, s) \in I^2$ et $e_r e_s = \varepsilon e_h$ on pose $\bar{e}_r e_s = e_r \bar{e}_s = \varepsilon \bar{e}_h$.

Alors le R-module $\bar{A}$ est une algèbre, grace à la formule

$$\left(\sum_{i=1}^{2n} a_i e_i\right)\left(\sum_{j=1}^{2n} b_j e_j\right) = \sum_{i,j=1,\ldots,2n} a_i b_j (e_i e_j), \quad \text{où} \quad a_i \in R \text{ et } b_j \in R.$$

La sous algèbre A et évidemment isomorphe à E.

2. Propriétés des éléments de la base $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$.

Soient r, s, t, h, m des nombres naturels compris entre 1 et 2n, et ε, $\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$. Alors

1. Pour tout $r, s \in D$ il existe $\varepsilon \in \{-1,1\}$ et $h \in D$ tel que $e_r e_s = \varepsilon e_h$

   En particulier: si $(r,s) \in I^2$ ou $(r,s) \in J^2$ alors $h \in I$
   si $(r,s) \in I \times J$ ou $(r,s) \in J \times I$ alors $h \in J$.

2. $\bar{e}_r = e_r \; \forall r \in D$.
3. $\bar{e}_r \bar{e}_s = e_r e_s \; \forall (r,s) \in D^2$.
4. Si $e_r e_s = \varepsilon e_h$ alors $\bar{e}_r e_s = e_r \bar{e}_s = \varepsilon \bar{e}_h$.
5. $e_t (e_r e_s) = \bar{e}_t (\bar{e}_r e_s)$.
6. $(e_r e_s) e_t = (\bar{e}_r e_s) \bar{e}_t$.
7. Si $e_r (e_s e_t) = \varepsilon e_h$ alors $\bar{e}_r (e_s e_t) = \varepsilon \bar{e}_h$.
8. Si $(e_r e_s) e_t = \varepsilon e_h$ alors $(e_r e_s) \bar{e}_t = \varepsilon \bar{e}_h$.

En effet:

1, 2, 3 sont évidentes d'après les définitions.

4. Si $(r,s) \in I^2$ la propriété est évidente. Si $(r,s) \in J^2$ et $e_r e_s = \varepsilon e_h$ on aura $\bar{e}_r \bar{e}_s = \varepsilon e_h$; on a donc $e_r \bar{e}_s = \bar{e}_r e_s = \varepsilon \bar{e}_h$. Si $(r,s) \in I \times J$ et $e_r e_s = \varepsilon e_h$, on construit le produit $e_r \bar{e}_s = \varepsilon_1 e_m$ et on a $e_r e_s = \varepsilon_1 \bar{e}_m$; d'où $\varepsilon e_h = \varepsilon_1 \bar{e}_m$. On a donc $e_h = \bar{e}_m$, $\varepsilon = \varepsilon_1$ et $\bar{e}_r e_s = e_r \bar{e}_s = \varepsilon \bar{e}_h$. De même si $(r,s) \in J \times I$.
5. Soit $e_r e_s = \varepsilon e_h$; de la propriété précédente résulte que $\bar{e}_r e_s = \varepsilon \bar{e}_h$. On a donc $e_t (e_r e_s) = \varepsilon (e_t e_h) = \varepsilon (\bar{e}_t \bar{e}_h) = \bar{e}_t (\varepsilon \bar{e}_h) = \bar{e}_t (\bar{e}_r e_s)$.
6. Si $e_r e_s = \varepsilon e_h$; on a $\bar{e}_r e_s = \varepsilon \bar{e}_h$; d'où $(e_r e_s) e_t = \varepsilon (e_h e_t) = \varepsilon (\bar{e}_h \bar{e}_t) = (\varepsilon \bar{e}_h) \bar{e}_t = (\bar{e}_r e_s) \bar{e}_t$.
7. Si $e_r (e_s e_t) = \varepsilon e_h$ et $e_s e_t = \varepsilon_1 e_m$, on a $e_r (\varepsilon_1 e_m) = \varepsilon e_h$; d'où $e_r e_m = (\varepsilon_1 \varepsilon) e_h$ et $\bar{e}_r e_m = (\varepsilon_1 \varepsilon) \bar{e}_h$; on a donc $\bar{e}_r (e_s e_t) = \varepsilon_1 (\bar{e}_r e_m) = \varepsilon_1 (\varepsilon_1 \varepsilon) \bar{e}_h = \varepsilon \bar{e}_h$.
8. Si $(e_r e_s) e_t = \varepsilon e_h$ et $e_r e_s = \varepsilon_1 e_m$, alors $\varepsilon_1 (e_m e_t) = \varepsilon e_h$ et $e_m e_t = (\varepsilon_1 \varepsilon) e_h$. On a donc $e_m \bar{e}_t = (\varepsilon_1 \varepsilon) \bar{e}_h$; d'où $(e_r e_s) \bar{e}_t = \varepsilon_1 (e_m \bar{e}_t) = \varepsilon_1 (\varepsilon_1 \varepsilon) \bar{e}_h = \varepsilon \bar{e}_h$.

3. Théorèmes sur l'Algèbre $\bar{A}$.

Théorème I. Si E est un anneau commutatif, alors $\bar{A}$ est aussi un anneau commutatif.

Dém: E étant isomorphe à la sous-algèbre A de $\bar{A}$, A est donc aussi commutatif et on a pour $(r,s) \in I^2$ $e_r e_s = e_s e_r$ et pour $(r,s) \in J^2$ $e_r e_s = \bar{e}_r \bar{e}_s = \bar{e}_s \bar{e}_r = e_s e_r$. D'autre part, si $(r,s) \in I \times J$ et si $e_r \bar{e}_s = \bar{e}_s e_r = = \varepsilon e_h$, on a $e_r e_s = e_s e_r = \varepsilon \bar{e}_h$ et de même si $(r,s) \in J \times I$. c. q. f. d.

Théorème II. Si E est un anneau associatif, alors $\bar{A}$ est aussi un anneau associatif.

Dém: Le sous-anneau A de $\bar{A}$, étant isomorphe à E, est aussi associatif. On a donc:

— $(r,s,t) \in I^3$: $e_r(e_s e_t) = (e_r e_s) e_t$.

— $(r,s,t) \in I \times J^2$: $e_r(e_s e_t) = e_r(\bar{e}_s \bar{e}_t) = (e_r \bar{e}_s) \bar{e}_t = (e_r e_s) e_t$.

— $(r,s,t) \in J^2 \times I$: $e_r(e_s e_t) = \bar{e}_r(\bar{e}_s e_t) = (\bar{e}_r \bar{e}_s) e_t = (e_r e_s) e_t$.

— $(r,s,t) \in J \times I \times J$: $e_r(e_s e_t) = \bar{e}_r(\bar{e}_s e_t) = \bar{e}_r(e_s \bar{e}_t) = (\bar{e}_r e_s) \bar{e}_t = (e_r e_s) e_t$.

— $(r,s,t) \in I \times J \times I$ et soit $e_r(e_s e_t) = \varepsilon e_h$; alors $\bar{e}_r(e_s e_t) = \varepsilon \bar{e}_h$ et on a $(e_r \bar{e}_s) e_t = e_r(\bar{e}_s e_t) = \bar{e}_r(e_s e_t) = \varepsilon \bar{e}_h$ et $(e_r e_s) e_t = = (e_r \bar{e}_s) \bar{e}_t = \varepsilon e_h$; d'où $e_r(e_s e_t) = (e_r e_s) e_t$.

— $(r,s,t) \in J^3$: d'après le cas précédent on a $\bar{e}_r(e_s \bar{e}_t) = (\bar{e}_r e_s) \bar{e}_t$; d'où $e_r(e_s e_t) = \bar{e}_r(e_s \bar{e}_t) = (\bar{e}_r e_s) \bar{e}_t = (e_r e_s) e_t$.

— $(r,s,t) \in J \times I^2$: d'après le cas précédent on a $e_r(\bar{e}_s \bar{e}_t) = (e_r \bar{e}_s) \bar{e}_t$; d'où $e_r(e_s e_t) = e_r(\bar{e}_s \bar{e}_t) = (e_r \bar{e}_s) \bar{e}_t = (e_r e_s) e_t$.

— $(r,s,t) \in I^2 \times J$: d'après le cas précédent on a $\bar{e}_r(e_s \bar{e}_t) = (\bar{e}_r e_s) \bar{e}_t$; d'où $e_r(e_s e_t) = \bar{e}_r(e_s \bar{e}_t) = (\bar{e}_r e_s) \bar{e}_t = (e_r e_s) e_t$. c. q. f. d.

Théorème III. Si l'anneau E a comme élément unité l'élément c_i de la base $(c_i)_{i \in I}$, alors e_i est l'élément unité de l'anneau $\bar{A}$.

Dém: l'élément e_i est l'élément unité de A, c. à d. si $r \in I$ on a $e_r e_i = e_i e_r = e_r$. D'autre part si $r \in J$ et $e_r e_i = \varepsilon e_h$ on a $\bar{e}_r = \bar{e}_r e_i = = \varepsilon \bar{e}_h$, d'où $\bar{e}_r = \bar{e}_h$ et $\varepsilon = 1$. On a donc $e_r \, e_i = e_r$ et de même $e_i e_r = e_r$.

4. Des idéaux de l'anneau $\bar{A}$ dont tout élément différent de zéro est un diviseur de zéro de $\bar{A}$.

Pour tout $r \in D$ on pose $e'_r = e_r + \bar{e}_r$ et $e''_r = e_r - \bar{e}_r$ et on note A_1 la sous-algèbre engendrée par $(e'_i)_{i \in I}$ et A_2 la sous-algèbre engendrée par $(e''_i)_{i \in I}$. Alors si $e_r e_s = \varepsilon e_h$, on a $e'_r e'_s = (e_r + \bar{e}_r)(e_s + \bar{e}_s) = 2(e_r e_s + \bar{e}_r e_s) = 2(\varepsilon(e_h + \bar{e}_h)) = 2(\varepsilon e'_h)$ et $e''_r e''_s = (e_r - \bar{e}_r)(e_s - \bar{e}_s) = 2(\varepsilon e''_h)$, où $2 \in \mathbf{Z}^+$. On a donc $e'_r e'_s = (2\varepsilon) e'_h$ et $e''_r e''_s = (2\varepsilon) e''_h$, où $2 \in R$. Il en résulte donc que $(e'_i)_{i \in I}$ (resp. $(e''_i)_{i \in I}$) est une base de A_1 (resp. A_2).

T h é o r è m e IV. Les anneaux A_1 et A_2 sont des idéaux de $\bar{A}$ et tous les éléments les différents de zéro de $A_1 \cup A_2$ sont diviseurs de zéro de $\bar{A}$.

D é m : Soient $a \in A_1$, $b \in \bar{A}$, $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i$, $b = \sum_{i=1}^{2n} \beta_i e_i$ où $\alpha_i, \beta_i \in R$.

On pose $\gamma_{2n+1-i} = \gamma_i = \alpha_i \ \forall i \in I$. On a donc $a = \sum_{i=1}^{2n} \gamma_i e_i$, alors

$$ab = \sum_{(i,j) \in D^2} \gamma_i \beta_j (e_i e_j) = \sum_{(r,s) \in I^2} \gamma_r \beta_s (e_r e_s) + \sum_{(r,s) \in I \times g} \gamma_r \beta_s (e_r e_s) + \sum_{(r,s) \in g \times I} \gamma_r \beta_s (e_r e_s) +$$
$$+ \sum_{(r,s) \in g^2} \gamma_r \beta_s (e_r e_s) = \sum_{(r,s) \in I^2} \{ \gamma_r \beta_s (e_r e_s) + \gamma_r \beta_{2n+1-s} (e_r \bar{e}_s) + \gamma_{2n+1-r} \beta_s (\bar{e}_r e_s) +$$
$$+ \gamma_{2n+1-r} \beta_{2n+1-s} (\bar{e}_r \bar{e}_s) \} = \sum_{(r,s) \in I^2} \alpha_r (\beta_s + \beta_{2n+1-s})(e_r e_s + \bar{e}_r e_s).$$

Mais si $e_r e_s = \varepsilon e_h$, on a $e_r e_s + \bar{e}_r e_s = \varepsilon(e_h + \bar{e}_h) = \varepsilon e'_h$.

D'où $ab \in A_1$. De même $ba = \sum_{(r,s) \in I^2} (\beta_s + \beta_{2n+1-s}) \alpha_r (e_s e_r + \bar{e}_s e_r) \in A_1$.
Ce qui prouve que A_1 est un idéal de l'anneau $\bar{A}$.

De même si $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e''_i \in A_2$ et $b = \sum_{i=1}^{2n} \beta_i e_i \in \bar{A}$, $(\alpha_i, \beta_i \in R)$, on a

$$ab = \sum_{(r,s) \in I^2} \alpha_r (\beta_s - \beta_{2n+1-s})(e_r e_s - \bar{e}_r e_s) \in A_2, \quad \text{et}$$

$$ba = \sum_{(r,s) \in I^2} (\beta_s - \beta_{2n+1-s}) \alpha_r (e_s e_r - \bar{e}_s e_r) \in A_2.$$

A_2 est donc un idéal de $\bar{A}$.

D'après les formules trouvées pour les produits ab et ba il résulte que si $a \in A_1$ et $b \in A_2$, on a $ab = ba = 0$, c. à. d. tous les éléments les différent de zéro de $A_1 \cup A_2$ sont des diviseurs de zéro de l'anneau $\bar{A}$.

DEUXIÈME PARTIE

On suppose que R est un anneau associatif avec unité et tel que l'équation $2x = 1$ admet une solution dans R.

Evidemment 2 appartient au centre de R et la solution de l'équation $2x = 1$ est unique. On la note $\frac{1}{2}$ et elle appartient au centre de R, parce que $\forall y \in R$ on a $y = \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) y = 2\left(\frac{1}{2} y\right) = \left(\frac{1}{2} y\right) 2$. Donc $y \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot y$.

5. Isomorphisme des algèbres A, A_1 et A_2.

Théorème V. Les algèbres A, A_1 et A_2 sont isomorphes.

Dém : On définit l'application $A \to A_1$ (resp. $A \to A_2$) de la manière suivante: $\forall a \in A$, où $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $(a_i \in R)$ on fait correspondre $a' = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} a_i\right) e_i'$ $\left(\text{resp. } a'' = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} a_i\right) e_i''\right)$. Les deux applications sont évidemment bijectives.

Soit maintenant $b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i \in A$, $(\beta_i \in R)$, b' son image dans A_1 et $\gamma \in R$. Alors

$$a + b = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i, \quad a' + b' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} (\alpha_i + \beta_i) e_i',$$

$$\gamma a = \sum_{i=1}^{n} (\gamma \alpha_i) e_i, \quad \gamma a' = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \gamma \alpha_i\right) e_i',$$

$$ab = \sum_{(r,s) \in I^2} \alpha_r \beta_s (e_r e_s), \quad ba = \sum_{(r,s) \in I^2} \beta_r \alpha_s (e_r e_s),$$

$$a'b' = \sum_{(r,s) \in I^2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \alpha_r \beta_s (e_r' e_s'), \quad b'a' = \sum_{(r,s) \in I^2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \beta_r \alpha_s (e_r' e_s').$$

Mais, on a déjà vu que si $e_r e_s = \varepsilon e_h$, on a $e_r' e_s' = 2 \varepsilon e_h'$. Il en résulte que les algèbres A et A_1 sont isomorphes; de même pour l'isomorphie entre A et A_2.

6. Théorèmes relatifs à l'algèbre $\bar{A}$.

Théorème VI. L'anneau $\bar{A}$ est somme directe des idéaux A_1 et A_2.

Dém. En effet $\forall r \in D$ on a $e_r = \frac{1}{2}(e'_r + e''_r)$. Mais $e'_{2n+1-r} = e'_r$ et $e''_{2n+1-r} = e''_r$. On a donc $\bar{e}_r = \frac{1}{2}(e'_r - e''_r)$. Il en résulte que $\bar{A}$ est somme de A_1 et A_2. Mais comme d'autre part $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, cette somme est directe.

Théorème VII. Si l'anneau E est sans diviseurs de zéro alors 1) les idéaux A_1 et A_2 sont premiers, 2) les diviseurs de zéro de $\bar{A}$ sont exactement les éléments les différents de zéro de l'ensemble $A_1 \cup A_2$, 3) $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ est un groupoid multiplicatif.

Démonstration. 1) Soient a et b deux éléments de $\bar{A}$ tels que $ab \in A_1$. On décompose, d'après le théorème précédent, $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$ où $a_1, b_1 \in A_1$ et $a_2, b_2 \in A_2$. On a déjà vu que le produit d'un élément de A_1 par un élément de A_2 est toujours égal à 0 ; on a alors $ab = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Mais comme $ab \in A_1$ il s'ensuit que $a_2 b_2 \in A_1 \cap A_2$, c. à. d. $a_2 b_2 = 0$. Or, l'Algèbre A_2, étant isomorphe à E, est sans diviseurs de 0; on a donc que, ou bien $a_2 = 0$, d'où $a = a_1 \in A_1$, ou bien $b_2 = 0$, d'où $b = b_1 \in A_1$. L'idéal A_1 est donc premier et de même pour l'idéal A_2.

2) On sait déjà (théorème IV) que tous les éléments les différents de 0 de $A_1 \cup A_2$ sont des diviseurs de 0 de l'anneau $\bar{A}$. Il suffit donc que tout diviseur de 0 de $\bar{A}$ appartient à $A_1 \cup A_2$. En effet: soit $ab = 0$, sans que a ou b soit égal à 0. On a $ab \in A_1 \cap A_2$ et les idéaux A_1 et A_2 étant premiers, il s'en suit que a et b appartiennent à $A_1 \cup A_2$.

3) On a évidemment $\bar{A} \neq A_1 \cup A_2$, car $A \cap (A_1 \cup A_2) = \{0\}$. Soient alors a et b deux éléments de $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$. On écrit $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$ et maintenant a_1, a_2, b_1, b_2 sont tous différents de 0. On a alors $ab = a_1 b_1 + a_2 b_2$ où $a_1 b_1$, $a_2 b_2 \neq 0$ parce que les algèbres A_1 et A_2 sont sans diviseurs de 0. On a donc $ab \in \bar{A} - (A_1 \cup A_2)$. c. q. f. d.

Corollaire. Si E est un anneau associatif avec unité et sans diviseurs de 0, alors $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ est un monoïde multiplicatif.

Dém. Soit e l'unité de A, qui est isomorphe à E. Alors, e est aussi l'unité de $\bar{A}$, car sinon, $\bar{A}$ étant associatif, e serait un diviseur de 0 de $\bar{A}$, c. à. d. on aurait $e \in A_1 \cup A_2$; or, $A \cap (A_1 \cup A_2) = \{0\}$. On a donc $e \in \bar{A} - (A_1 \cup A_2)$.

Théorème VIII. Si E est un division ring, alors:

1) Si $a \in \bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ et $b \in \bar{A}$, les équations $ax = b$ et $ya = b$ ont des solutions dans $\bar{A}$.

2) Les idéaux A_1 et A_2 sont maximaux.

Dém. 1) Soit $a = a_1 + a_2$, où $0 \neq a_1 \in A_1$ et $0 \neq a_2 \in A_2$, et $b = b_1 + b_2$, où $b_1 \in A_1$ et $b_2 \in A_2$. On va prouver qu'il existe $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$ et tel que $ax = b$. En effet, A_1 et A_2 étant isomorphes à E, les équations $a_1 x_1 = b_1$ et $a_2 x_2 = b_2$ ont des solutions dans A_1 et A_2 respectivement et par conséquent on a $ax = a_1 x_1 + a_2 x_2 = b_1 + b_2 = b$. De même pour l'équation $ya = b$.

2) Soit I un idéal de l'anneau $\bar{A}$ tel que $A_1 \subset I$ strictement; on a donc $I \not\subseteq A_1$, et comme $A_1 \cap A_2 = \{0\}$, on a aussi $I \not\subseteq A_2$. Il en résulte donc que $I \not\subseteq A_1 \cup A_2$.

Soit alors $d \in I$ et $d \notin A_1 \cup A_2$ et b élément quelconque de $\bar{A}$. Il existe alors $x \in \bar{A}$ tel que $dx = b$; mais $dx \in I$ c. à. d. $b \in I$. Ce qui prouve que $I = \bar{A}$ c. à. d. que l'idéal A_1, de même pour A_2, est maximal.

c. q. f. d.

Théorème IX. Si l'anneau E est un quasifield, alors:

1) Si $a \in \bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ et $b \in \bar{A}$, chacune des équations $ax = b$ et $ya = b$ a une et une seule solution dans $\bar{A}$.

2) $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ est un quasigroupe multiplicatif.

Dém. 1) En effet l'équation $ax = b$ a une solution $x \in \bar{A}$ d'après le théorème précédent. Soit $t \in \bar{A}$ une autre solution de l'équation; on aura donc $a(x - t) = 0$. Mais l'anneau E étant sans diviseurs de zéro et a étant différent de 0, il en résulte que $x = t$. De même pour l'équation $ya = b$.

2) Si a et b sont des éléments de $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$, alors les solutions des équations $ax = b$ et $ya = b$ appartiennent aussi à $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$. Mais comme on sait déjà que $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ est un groupoid multiplicatif (th. VII), ça prouve que $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ est un quasigroupe multiplicatif.

Corollaire. Si l'anneau E est un corps, alors $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ est un groupe multiplicatif.

Dém. $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ est un quasigroupe multiplicatif. Mais comme A est un anneau associatif il en résulte que $\bar{A} - (A_1 \cup A_2)$ est un groupe multiplicatif.

Théorème X. Si l'anneau E est alternatif, $\bar{A}$ est aussi un anneau alternatif.

Dém. D'après le théorème d'Artin, il suffit de montrer que pour tout $(a, b) \in \bar{A} \times \bar{A}$, on a

$$(aa)b = a(ab) \quad \text{et} \quad (ba)a = b(aa).$$

Or, si on écrit $a = a_1 + a_2$ et $b = b_1 + b_2$, $(a_1, b_1 \in A_1$ et $a_2, b_2 \in A_2)$ et étant donné que les anneaux A_1 et A_2 sont altérnatifs, comme isomorphes à E, on a

$$(aa)b = ((a_1 + a_2)(a_1 + a_2))(b_1 + b_2) = (a_1 a_1 + a_2 a_2)(b_1 + b_2) =$$
$$= (a_1 a_1) b_1 + (a_2 a_2) b_2 = a_1 (a_1 b_1) + a_2 (a_2 b_2)$$

et $$a(ab) = (a_1 + a_2)((a_1 + a_2)(b_1 + b_2)) = (a_1 + a_2)(a_1 b_1 + a_2 b_2) =$$
$$= a_1 (a_1 b_1) + a_2 (a_2 b_2).$$

On montre de même que $(ba)a = b(aa)$. c. q. f. d.

Remarque. Dans la première partie on a supposé que R est un anneau unifère non nécessairement associatif, tandis que dans la deuxième partie on a supposé qu'il était un anneau associatif avec unité et tel que l'équation $2x = 1$ a une solution dans R. Sous cette hypothèse, les théorèmes 1 et 2 selon lesquels si E est un anneau commutatif respectivement associatif, $\bar{A}$ l'est aussi, se démontrent immédiatement en décomposant les éléments de $\bar{A}$ en somme d'un élément de A_1 et d'un élément de A_2.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Θεωρεῖται ἕνας μοναδιαῖος δακτύλιος R, ὄχι κατ' ἀνάγκην προσεταιριστικὸς καὶ μία n-διάστατος R-"Αλγεβρα E, μὲ τὴν ἰδιότητα: διὰ τυχόντα α, β στοιχεῖα τῆς βάσεως, τὸ «γινόμενον» $\alpha\beta$ ἰσοῦται ἢ πρός τι στοιχεῖον τῆς βάσεως ταύτης ἢ πρὸς τὸ ἀντίθετον ἑνὸς τοιούτου στοιχείου. Κατόπιν τούτου σχηματίζεται μία 2n-διάστατος R-"Αλγεβρα $\bar{A}$, ἐπέκτασις τῆς E, ὅπου τὰ στοιχεῖα τῆς βάσεώς της ἔχουν ἐπίσης τὴν αὐτήν, ὡς ἄνω, ἰδιότητα. Διὰ τὴν μελέτην τῆς 'Αλγέβρας $\bar{A}$ χωρίζεται ἡ ἐργασία εἰς δύο μέρη:

I. Εἰς τὸ πρῶτον μέρος ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν ἡ E εἶναι μεταθετικὴ (ἀντ. προσεταιριστική), τότε τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν $\bar{A}$. Ὑπάρχουν δὲ δύο ὑπο-Ἄλγεβραι A_1 καὶ A_2 τῆς $\overline{A}$, αἵτινες, θεωρούμεναι ὡς δακτύλιοι, εἶναι ἰδεώδη τοῦ δακτυλίου $\overline{A}$ καὶ κάθε διάφορον τοῦ μηδενὸς στοιχεῖον τῆς ἑνώσεως $A_1 \cup A_2$ εἶναι μηδαινοδιαιρέτης τοῦ $\overline{A}$.

II. Εἰς τὸ δεύτερον μέρος ὑποτίθεται, ἐπὶ πλέον, ὅτι ὁ δακτύλιος R εἶναι προσεταιριστικὸς καὶ ἡ ἐξίσωσις $2x = 1$ ἐπιλύεται ἐν R καὶ ἀποδεικνύεται κατ' ἀρχὰς ὅτι ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω Ἀλγεβρῶν A_1 καὶ A_2 εἶναι ἰσόμορφος πρὸς τὴν E, ὁ δὲ δακτύλιος $\overline{A}$ εἶναι εὐθὺ ἄθροισμα τῶν ἰδεωδῶν του A_1 καὶ A_2.

Ἂν ὁ δακτύλιος E δὲν ἔχει μηδενοδιαιρέτας, τότε ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ ἰδεώδη A_1 καὶ A_2 τοῦ $\overline{A}$ εἶναι πρῶτα, τὸ δὲ σύνολον τῶν μηδενοδιαιρετῶν τοῦ $\overline{A}$ συμπίπτει πρὸς τὸ $(A_1 \cup A_2) - \{0\}$.

Ἂν εἰς τὸν δακτύλιον E ἡ διαίρεσις, μὲ στοιχεῖον διάφορον τοῦ μηδενός, εἶναι πάντοτε δυνατὴ (χωρὶς νὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην καὶ μονοσήμαντος, διότι δὲν ἀποκλείεται τώρα ἡ ὕπαρξις μηδενοδιαιρετῶν τοῦ E), τότε, ὡς ἀποδεικνύεται, τὰ ἰδεώδη A_1 καὶ A_2 τοῦ $\overline{A}$ εἶναι μέγιστα καὶ διὰ κάθε $a \in \overline{A} - (A_1 \cup A_2)$ καὶ κάθε $b \in \overline{A}$ αἱ ἐξισώσεις $ax = b$ καὶ $ya = b$ ἔχουν λύσεις ἐν $\overline{A}$.

Ἂν ὅμως εἰς τὸν δακτύλιον E ἡ διαίρεσις, μὲ στοιχεῖον διάφορον τοῦ μηδενός, εἶναι πάντοτε μονοσημάντως δυνατή, τότε αἱ ἀνωτέρω θεωρηθεῖσαι ἐξισώσεις ἐπιλύονται μονοσημάντως ἐν $\overline{A}$. Εἰς ἣν περίπτωσιν δὲ τὸ E εἶναι σῶμα, τότε τὸ $\overline{A} - (A_1 \cup A_2)$ ἀποτελεῖ πολλαπλασιαστικὴν ὁμάδα.

Σημείωσις. Ἐμφανίζεται οὕτως ἡ ὕπαρξις μιᾶς νέας δομῆς «ἐνδιαμέσου» δακτυλίου καὶ σώματος. Τὴν δομὴν ταύτην καλεῖ ἡ συγγραφεὺς σωματόμορφον καὶ τὴν ὁρίζει ὡς ἑξῆς: Ἔστω A δακτύλιος καὶ S τὸ σύνολον μὲ στοιχεῖα τοὺς (τυχὸν ὑπάρχοντας) μηδενοδιαιρέτας τοῦ A καὶ τὸ μηδενικὸν στοιχεῖον αὐτοῦ. Τότε, ἂν τὸ σύνολον $A - S$ εἶναι πολλαπλασιαστικὴ ὁμάς, ὁ δακτύλιος A καλεῖται σωματόμορφος. Ὡς εἶναι προφανές, ἕνας σωματόμορφος δακτύλιος εἶναι σῶμα, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, $S = \{0\}$.

Τέλος, ἀποδεικνύεται εἰς τὸ δεύτερον μέρος τῆς παρούσης ἐργασίας ὅτι, ἂν ἡ Ἄλγεβρα E εἶναι alternative, τότε τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν $\overline{A}$.