ΦΥΣΙΚΗ.— **Μελέτη τῶν συσφιγγομένων ζωνῶν εἰς ρηγματωμένας πλάκας διὰ τῆς ὀπτικῆς μεθόδου τῆς καυστικῆς***, ὑπὸ *Περικλέους Σ. Θεοχάρη***. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Κ. Ἀλεξοπούλου.

Η ΚΑΥΣΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΜΕΝΗ ΕΚ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΥΣΤΕΡΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΩΣ ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ

Θεωρήσωμεν ἐπίπεδον δοκίμιον μετὰ παραλλήλων παραπλεύρων ἐπιφανειῶν ἐκ διπλοθλαστικοῦ ὑλικοῦ καὶ ἀκτῖνα μονοχρωματικοῦ φωτὸς προσπίπτουσαν καθέτως ἐπὶ τοῦ δοκιμίου εἰς τυχὸν σημεῖον P (σχῆμα 1). Ἐὰν αἱ προσπίπτουσαι ὀπτικαὶ ἀκτῖνες εἶναι πεπολωμέναι κατὰ τὴν διεύθυνσιν σ_1 τῆς μεγαλυτέρας τῶν κυρίων τάσεων, ἐκ τῆς ἀπειρίας τῶν μερικῶς ἀνακλωμένων ἀκτίνων εἰς τὰς παραπλεύρους ἐπιφανείας τοῦ δοκιμίου καὶ μερικῶς διαθλωμένων κατὰ τὴν δίοδόν των δὶς διὰ τοῦ πάχους τῆς πλακὸς τοῦ δοκιμίου θεωροῦμεν μόνον τὴν ἀκτῖνα $r_{(1+2)}$ τὴν ὑφισταμένην μίαν μόνον ἀνάκλασιν καὶ δύο διαθλάσεις. Πράγματι, ἡ φωτεινὴ ἔντασις τῆς ἀκτῖνος ταύτης εἶναι σημαντική, καθὼς καὶ ἡ τῆς ἅπαξ ἀνακλωμένης ἐπὶ τῆς ἐμπροσθίας ἐπιφανείας τοῦ δοκιμίου, τῶν δὲ λοιπῶν ἡ φωτεινὴ ἔντασις εἶναι ἀμελητέα.

Ἐὰν φορτισθῇ ἡ πλὰξ καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς προσπιπτούσης ἀκτῖνος δὲν μεταβληθῇ, ὁ δείκτης διαθλάσεως n καὶ τὸ πάχος τῆς πλακὸς d μεταβάλλονται κατὰ τὴν φόρτισίν της εἰς n_1 καὶ d' ἀντιστοίχως. Ἡ ἀπόλυτος μεταβολὴ τῆς ὀπτικῆς πορείας τῶν ἀκτίνων $r_{(1+2)}$ κατὰ τοὺς κυρίους ἄξονας 1 καὶ 2 δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως (1):

$$\Delta s_{1,2} = 2\left[(n_{1,2} - n)\,d + (n_{1,2} - {}^1\!/_2)\,\Delta d\right] \tag{1}$$

Αἱ μεταβολαὶ $\Delta n_{1,2}$ τοῦ δείκτου διαθλάσεως n τῆς ἀφορτίστου πλακὸς κατὰ τὴν φόρτισίν της καὶ κατὰ μῆκος τῶν ἀξόνων 1 καὶ 2 δίδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων (2):

$$\begin{aligned} \Delta n_1 &= b_1 \varepsilon_1 + b_2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \Delta n_2 &= b_1 \varepsilon_2 + b_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \end{aligned} \tag{2}$$

ἔνθα b_1 καὶ b_2 εἶναι ὀπτικαὶ σταθεραὶ καὶ ε_1, ε_2, ε_3 αἱ συνιστῶσαι τῶν παραμορφώσεων τῆς πλακός.

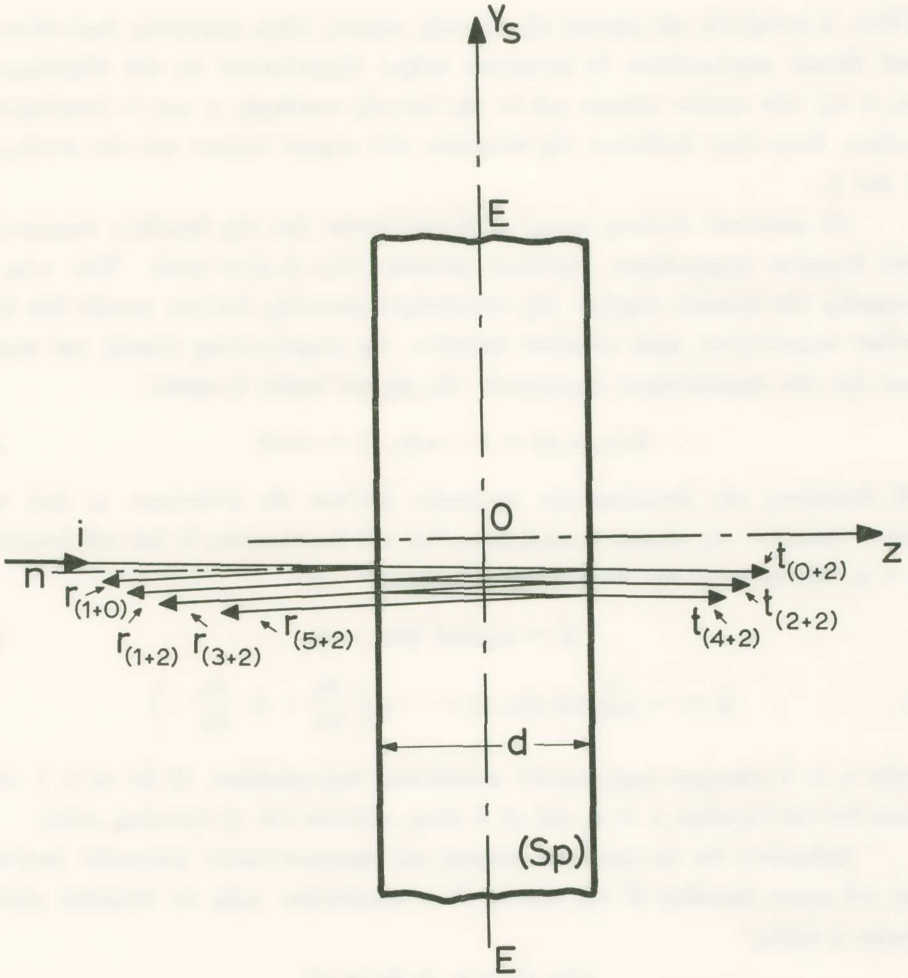
---

* P. S. THEOCARIS, **A Study of Constrained Zones in Cracked Plates by the Optical Method of Caustics.**

** Τακτικοῦ Καθηγητοῦ τῆς Θεωρητικῆς καὶ Ἐφηρμοσμένης Μηχανικῆς ἐν τῷ Ε. Μ. Πολυτεχνείῳ.

Εἰσάγοντες τὰς σχέσεις (2) εἰς τὰς ἐξισώσεις (1) λαμβάνομεν:

$$\begin{aligned}\Delta s_1 &= 2d\,[b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + (b_2 + n - {}^1/_2)\,\varepsilon_3] \\ \Delta s_2 &= 2d\,[b_1\varepsilon_2 + b_2\varepsilon_1 + (b_2 + n - {}^1/_2)\,\varepsilon_3]\end{aligned} \tag{3}$$



Σχ. 1. Διάγραμμα διαδοχικῶν ἀνακλάσεων ἀκτῖνος, προσπιπτούσης καθέτως ἐπὶ διαφανοῦς ρηγματωμένης πλακός.

Εἰσάγοντες νῦν τὸν γενικευμένον νόμον τοῦ Hooke εἰς τὰς σχέσεις (3) λαμβάνομεν τὰς συνθήκας Favre [2], αἵτινες ἐκφράζονται ὡς:

$$\Delta s_{1,2} = 2dc\,[(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi\,(\sigma_1 - \sigma_2)] \tag{4}$$

ἔνθα τὰ μεγέθη c καὶ ξ ἀποτελοῦν ὀπτικὰς σταθερὰς τοῦ ὑλικοῦ. Δι' ὀπτικῶς ἰσότροπα ὑλικὰ ἰσχύει ἡ ἰσότης $b_1 = b_2$ καὶ $\xi = 0$, ὁπότε ἔχομεν:

$$\Delta s_1 = \Delta s_2 = \frac{2d}{E}\left[b_1(1-2\nu) - \nu(n - {}^1/_2)\right](\sigma_1 + \sigma_2) = 2dc(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (5)$$

Οὕτω, ἡ μεταβολὴ τοῦ μήκους τῆς ὀπτικῆς πορείας λόγῳ φορτίσεως διπλοθλαστικοῦ ὑλικοῦ περιλαμβάνει ἓν ἰσότροπον τμῆμα ἐξαρτώμενον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $(\sigma_1 + \sigma_2)$ τῶν κυρίων τάσεων καὶ ἐκ τῆς ὀπτικῆς σταθερᾶς c καὶ ἓν ἀνισότροπον τμῆμα, ὅπερ εἶναι ἀνάλογον τῆς διαφορᾶς τῶν κυρίων τάσεων καὶ τῶν σταθερῶν c καὶ ξ.

Αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες $r_{(1+2)}$ αἱ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τῆς ὀπισθίας ἐπιφανείας τοῦ δοκιμίου σχηματίζουν κυματικὰ μέτωπα $S(x, y, z) =$ σταθ. Ἐὰν $s(x, y)$ ἐκφράζῃ τὴν ὀπτικὴν πορείαν τῆς ἀντιστοίχου φωτεινῆς ἀκτῖνος μεταξὺ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὸ μέσον ἐπίπεδον τῆς φορτιζομένης πλακὸς καὶ κειμένων ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν τῆς πλακὸς ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$S(x, y, z) = z - s(x, y) = \text{σταθ.} \quad (6)$$

Ἡ ἀπόκλισις τῶν ἀνακλωμένων φωτεινῶν ἀκτίνων εἰς ἀπόστασιν z_0 ἀπὸ τοῦ μέσου ἐπιπέδου τῆς πλακὸς ἐκφραζομένη διὰ τοῦ διανύσματος $\overline{w}$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $z = z_0$ δίδεται κατὰ τὴν θεωρίαν τῆς εἰκονικῆς [1] ὡς:

$$\overline{w} = z_0 \operatorname{grad} S(x, y, z) \quad (7)$$

ἢ

$$\overline{w} = -z_0 \operatorname{grad} s(x, y) = -z_0\left(\frac{\partial s}{\partial x}\,\overline{i} + \frac{\partial s}{\partial y}\,\overline{j}\right)$$

ἔνθα $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ σύστημα καρτεσιανῶν μοναδιαίων διανυσμάτων, ἐξ ὧν τὰ $\overline{i}$, $\overline{j}$ κείμενα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $z = z_0$ καὶ τὸ $\overline{k}$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

Δεδομένου ὅτι τὰ κυματικὰ μέτωπα τῶν προσπιπτουσῶν φωτεινῶν ἀκτίνων ἐπὶ τοῦ μέσου ἐπιπέδου E τῆς πλακὸς εἶναι παράλληλα πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$s(x, y) = s_0 + \Delta s(x, y)$$

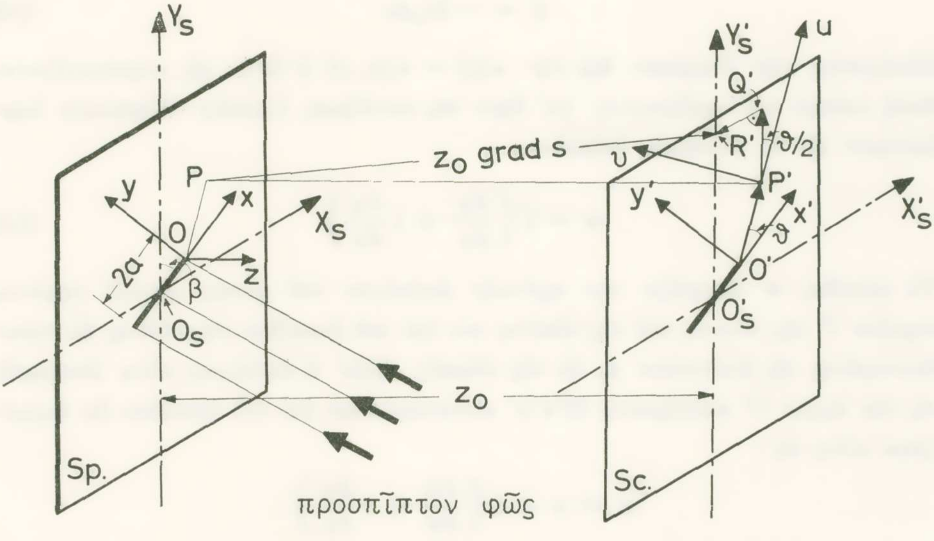
ἔνθα s_0 παριστᾷ σταθερὰν διά τι κυματικὸν μέτωπον ἐκ τῆς πλακὸς καὶ αὕτη ἐξαφανίζεται κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν κλίσεων. Ὅθεν ἔχομεν:

$$\overline{w} = -z_0 \operatorname{grad}\Delta s(x, y) \quad (8)$$

Αἱ αἰχμαὶ τοῦ διανύσματος $\overline{w}$ καθορίζουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $z = z_0$ περιβάλλουσαν (καυστικήν), ἥτις εἶναι στενῶς συνδεδεμένη μετὰ τοῦ τρόπου παραμορφώσεως τῶν περιοχῶν τῆς πλακός, ἐκ τῶν ὁποίων ἀναδύονται αἱ φωτειναὶ ἀκτῖνες. Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον ταύτην ἀνακλάσεως τῆς σκιᾶς διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἐνεργείας τῆς ἀπορροφουμένης ὑπὸ τῆς αἰχμῆς διαδιδομένης ρωγμῆς εἰς τὴν πλάκα.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΚΑΥΣΤΙΚΗΣ ΕΦΑΡΜΟΖΟΜΕΝΗ ΕΙΣ ΡΗΓΜΑΤΩΜΕΝΑΣ ΠΛΑΚΑΣ

Θεωρήσωμεν τὴν ἁπλῆν περίπτωσιν ἀπείρου πλακὸς περιεχούσης ἐσωτερικὴν ἐγκαρσίαν ρωγμὴν μήκους 2α ὑποβαλλομένην εἰς διαξονικὴν ἐντατικὴν κατάστα-



Σχ. 2. Διάγραμμα σχηματισμοῦ τῆς γενικευμένης ἐπικυκλοειδοῦς.

σιν ἴσων τάσεων σ (σχῆμα 2). Σύστημα καρτεσιανῶν συντεταγμένων $O_s X_s Y_s$ συνδέεται μετὰ τῆς ρωγμῆς ἔχον τὴν ἀρχήν του O_s εἰς τὸ κέντρον τῆς ρωγμῆς καὶ τὸν ἄξονα $O_s X_s$ συμπίπτοντα πρὸς τὴν ἐγκαρσίαν διεύθυνσιν τῆς πλακός. Ἕτερον σύστημα Oxy καρτεσιανῶν συντεταγμένων ἀναφέρεται εἰς τὴν αἰχμὴν τῆς ρωγμῆς, ὡς ἐνδείκνυται εἰς τὸ σχῆμα 2.

Ἐὰν εἰσαχθῇ ἡ μιγαδικὴ μεταβλητὴ z τοιαύτη ὥστε:

$$z = x + iy$$

$$\text{καὶ} \qquad \operatorname{Re} \sigma(z) = (\sigma_x + \sigma_y) \tag{9}$$

εἰς τὴν γειτονίαν τῆς αἰχμῆς τῆς ρωγμῆς ἰσχύει ὅτι:

$$\sigma(z) = \frac{f(z)}{z^{1/2}} \tag{10}$$

ἔνθα ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ δίδεται διὰ διαφόρους περιπτώσεις φορτίσεως τῆς πλακός [3].

Θεωροῦντες περαιτέρω ὅτι τὸ ὑλικὸν τῆς πλακὸς εἶναι ὀπτικῶς ἰσότροπον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\xi = 0$, λαμβάνομεν εἰσάγοντες τὴν ἐξίσωσιν (5) εἰς τὴν σχέσιν (8) ὅτι :

$$\overline{w} = -z_0 \mathrm{grad}\Delta s = -2z_0 dc\, \mathrm{grad}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\text{ἢ} \quad \overline{w} = C\mathrm{grad}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{11}$$

ἔνθα ἡ νέα σταθερὰ C δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$C = -2z_0 dc \tag{12}$$

Εἰσάγοντες τὴν ἔκφρασιν διὰ τὴν $\sigma(z) = u(x, y) + iu(x, y)$, παραγωγίζοντες ἅπαξ ταύτην καὶ λαμβάνοντες ὑπ᾽ ὄψιν τὰς συνθήκας Cauchy - Riemann λαμβάνομεν εἰς τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον :

$$w = C\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{13}$$

Τὸ μέγεθος w ἐκφράζει τὴν σχετικὴν ἀπόκλισιν τοῦ φωτὸς μεταξὺ τυχόντος σημείου P τῆς πλακὸς καὶ τῆς εἰκόνος του ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ὀθόνης Sc τοποθετουμένης εἰς ἀπόστασιν z_0 ἐκ τῆς πλακός. Ἐὰν ἡ ἀπόκλισις αὕτη ἀναφερθῇ εἰς τὴν ἀρχὴν O′ συστήματος O′x′y′ συντεταγμένων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Sc ἐκφράζεται αὕτη ὡς :

$$W = z + C\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\text{ἢ} \quad W = \left(x + C\frac{\partial u}{\partial x}\right) + i\left(y + C\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{14}$$

Θέτοντες : $\quad x' = x + C\dfrac{\partial u}{\partial x} \quad$ καὶ $\quad y' = y + C\dfrac{\partial u}{\partial y}$

λαμβάνομεν :
$$W = (x' + iy') \tag{15}$$

Τὸ μέγεθος W ἐκφράζει τὴν προβολὴν ἐπὶ τῆς ὀθόνης Sc τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων $r_{(1+2)}$. Ἡ ἀπεικόνισις τῶν κροσσῶν, ἡ σχηματιζομένη ἐπὶ τῆς ὀθόνης ἐκ τῆς συμβολῆς τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων $r_{(1+0)}$ καὶ $r_{(1+2)}$, ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο διακεκριμένα τμήματα. Τὸ ἓν τμῆμα ἀποτελεῖται ἀπὸ πυκνὴν ἀπεικόνισιν κροσσῶν περιβάλλουσαν τὴν αἰχμὴν τῆς ρωγμῆς καὶ τὸ ἕτερον τμῆμα ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀραιὰν ἀπεικόνισιν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἐλαστικῶς παραμορφούμενον ὑπόλοιπον τμῆμα τῆς πλακός.

Τὰ δύο ταῦτα τμήματα διαχωρίζονται ἀπὸ διακεκριμένην καὶ φωτεινὴν περιβάλλουσαν καμπύλην, ἥτις σχηματίζεται ἐκ τῶν ἀποκλίσεων τῶν ἀνακλωμένων ἀκτίνων $r_{(1+2)}$, αἵτινες ἐκφράζονται ὑπὸ τοῦ μεγέθους W. Αἱ ἀκτῖνες αὗται, ἀνακλώμεναι εἰς τὴν συσφιγγομένην ζώνην τῆς ὀπισθίας ἐπιφανείας τῆς πλακός, ἀποκλίνουν κατὰ διάφορα μεγέθη ἐξαρτώμενα ἐκ τῆς κλίσεως τῶν σημείων τῆς συσφιγγομένης ζώνης. Αἱ πλάγιαι αὗται ἀκτῖνες συγκεντροῦνται εἰς περιβάλλουσαν, ἥτις φωτίζεται ἐντόνως λόγῳ τῆς συγκεντρώσεως ταύτης, σχηματίζουσα καυστικήν. Ἡ ὁριακὴ αὕτη περιβάλλουσα παριστᾷ ἀνώμαλον καμπύλην διὰ τὸ μέγεθος W. Αἱ συνθῆκαι διὰ τὴν ὕπαρξιν ἀνωμαλίας πληροῦνται διὰ μηδενισμοῦ τῆς Ἰακωβιανῆς διακρινούσης:

$$D = \frac{\partial (x', y')}{\partial (r, \vartheta)} = 0$$

ἤτοι

$$\begin{vmatrix} \left(1 + C \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) & C \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial u} \\ C \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \left(1 + C \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (16)$$

Ἡ συνθήκη (16) δίδει ὅτι:

$$1 + C\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + C^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right) = 0 \qquad (17)$$

Ἡ συνθήκη (17) μετά τινα ἁπλοποίησιν καὶ δι᾽ εἰσαγωγῆς τῶν συνθηκῶν Cauchy-Riemann λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$|\,\sigma''(z)\,| = -C^{-1} \qquad (18)$$

Ἡ σχέσις (18) ἐκφράζει τὴν ἐξίσωσιν τῆς ἀρχικῆς καμπύλης τῆς καυστικῆς ἐπὶ τῆς ὀθόνης Sc. Ἡ περιβάλλουσα τῆς ἀρχικῆς ταύτης καμπύλης, ἡ ὁποία καλεῖται γενικευμένη ἐπικυκλοειδής, δίδεται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} W &= z + C\,\overline{\sigma'(z)} \\ \text{καὶ} \quad C\,|\,\sigma''(z)\,| &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν τῆς σταθερᾶς C ἐκ τῆς σχέσεως (12) λαμβάνομεν διὰ τὴν ἐξίσωσιν τῆς γενικευμένης ἐπικυκλοειδοῦς ὅτι:

$$\left.\begin{aligned} W &= z - 2z_0 tc\,\overline{\sigma'(z)} \\ 2z_0 tc\,|\,\sigma''(z)\,| &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Διὰ τὴν περίπτωσιν ἁπλῆς ἐγκαρσίας ἐσωτερικῆς ρωγμῆς εἰς ἄπειρον πλάκα ὑποβαλλομένην εἰς διαξονικὸν ἐφελκυσμὸν $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ εἰς τὸ ἄπειρον ἰσχύει προσεγγιστικῶς ὅτι [3]:

$$\sigma(z) = \frac{2\,|K^*|}{\sqrt{2\pi z}} \tag{21}$$

ἔνθα K^* ἐκφράζει τὸν μιγαδικὸν συντελεστὴν ἐντάσεως τάσεων περιλαμβάνοντα τὸν συντελεστὴν ἐντάσεως τάσεων ἐφελκυσμοῦ (K_I), καὶ τὸν διατμητικὸν τοιοῦτον (K_{II}) διὰ τῆς σχέσεως: $K^* = (K_I - iK_{II})$. Ὅθεν αἱ σχέσεις (19) καθίστανται:

$$\left.\begin{aligned} W &= z_0 + \frac{C_p}{z^{3/2}} \\ \text{καὶ}\quad & \\ r &= \left(\frac{3}{2}C_p\right)^{2/5} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\text{ὅπου}\quad C_p = (2z_0 dc)\,\frac{K^*}{\sqrt{2\pi}}$$

Αἱ σχέσεις (22) ἀποδεικνύουν ὅτι ἡ ἀρχικὴ καμπύλη εἶναι κύκλος ἀκτῖνος $r = \left(\frac{3}{2}C_p\right)^{2/5}$ καὶ ἡ γενικευμένη ἐπικυκλοειδὴς ἐκφράζεται ὑπὸ ἀμφοτέρων τῶν ἐξισώσεων (22). Τὰ ἀποτελέσματα ταῦτα εὑρέθησαν διὰ τὴν ἁπλῆν περίπτωσιν ἔνθα $K_I \neq 0$ καὶ $K_{II} = 0$ εἰς προηγουμένην δημοσίευσιν τοῦ συγγραφέως [4] δι' ἐφαρμογῆς τοῦ διανυσματικοῦ λογισμοῦ.

Οὕτω, εἰς τὴν περίπτωσιν ὀπτικῶς ἰσοτρόπων ὑλικῶν, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ὅτι $\xi = 0$, καὶ ἐὰν ἡ συνάρτησις $\sigma(z)$ εἶναι γνωστή, τὰ σχήματα τῆς ἀρχικῆς καμπύλης καὶ τῆς γενικευμένης ἐπικυκλοειδοῦς, ἥτις παριστᾷ τὴν καυστικὴν περὶ τὴν αἰχμὴν τῆς ρωγμῆς, δύνανται εὐκόλως νὰ προσδιορισθοῦν ἐκ τῶν σχέσεων (20).

ΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ ΕΠΙΚΥΚΛΟΕΙΔΟΥΣ ΔΙΑ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΝ ΑΠΛΗΣ ΡΩΓΜΗΣ

Θεωρήσωμεν νῦν διαφανῆ πλάκα περιέχουσαν ρωγμὰς εὑρισκομένας εἰς μεγάλην ἀπόστασιν μεταξύ των, ὥστε νὰ μὴν ἀλληλοεπηρεάζωνται καὶ ἑπομένως ἰσχύει ἡ σχέσις (21). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς γενικευμένης ἐπικυκλοειδοῦς ἐκφράζονται ὡς:

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\vartheta + \zeta K_I r^{-3/2}\cos\frac{3\vartheta}{2} - \zeta K_{II} r^{-3/2}\sin\frac{3\vartheta}{2} \\ y' &= r\sin\vartheta + \zeta K_I r^{-3/2}\sin\frac{3\vartheta}{2} + \zeta K_{II} r^{-3/2}\cos\frac{3\vartheta}{2} \end{aligned} \tag{23}$$

ἔνθα r παριστᾷ τὴν ἀκτῖνα τῆς ἀρχικῆς καμπύλης διδομένην ἐκ τῆς σχέσεως (22,2) καὶ ζ παριστᾷ νέαν σταθερὰν ἐκφραζομένην ὡς :

$$\zeta = \frac{C_p}{|K^*|} \tag{24}$$

Ἡ ἐξίσωσις τῆς γενικευμένης ἐπικυκλοειδοῦς εἰς μιγαδικὴν μορφὴν δίδεται ὡς:

$$z = re^{i\vartheta} + \zeta r^{-3/2} \bar{K}^* e^{i\frac{3\vartheta}{2}} \tag{25}$$

ἔνθα $K^* = (K_I + iK_{II})$ εἶναι ἡ συζυγὴς τοῦ μεγέθους K^*.

Ἐκ τῶν σχέσεων (23) προκύπτει ὅτι ἐὰν t εἶναι ἡ περίοδος τῆς παραμέτρου ϑ, ἰσχύει ὅτι :

$$\cos(\vartheta + mt) = \cos\vartheta, \qquad \sin(\vartheta + mt) = \sin\vartheta$$

καὶ

$$\cos\left(\frac{3\vartheta + mt}{2}\right) = \cos\frac{3\vartheta}{2}, \qquad \sin\left(\frac{3\vartheta + mt}{2}\right) = \sin\frac{3\vartheta}{2} \tag{26}$$

ἔνθα m εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐκ τῶν σχέσεων (26) συνάγεται ὅτι:

$$mt = 2\kappa\pi \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{3mt}{2} = 2\kappa'\pi$$

ἔνθα κ καὶ κ′ εἶναι πάλιν ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Ἐφ' ὅσον αἱ περίοδοι t καὶ 3t/2 πρέπει νὰ εἶναι πολλαπλάσιαι τοῦ 2π, συνάγεται ὅτι $t = 4\pi$ καὶ κατὰ συνέπειαν $3t/2 = 6\pi$.

Ὅθεν, ὅταν ἡ γωνία ϑ μεταβάλλεται μεταξὺ μηδενὸς καὶ 4π, ἅπασα ἡ ἐπικυκλοειδὴς χαράσσεται. Οὕτω ἡ γενικευμένη ἐπικυκλοειδὴς ἡ περιβάλλουσα τὴν αἰχμὴν τῆς ρωγμῆς εἶναι ὡρισμένη. Ἐξ ἄλλου, ἐκ τῶν σχέσεων (23) συνάγεται ἐπίσης ὅτι ἡ ἐπικυκλοειδὴς εἶναι κλειστὴ καμπύλη, δεδομένου ὅτι ἰσχύουν αἱ σχέσεις $|y'|, |x'| \leqslant r + \zeta r^{-3/2}(K_I + K_{II})$.

Ἐὰν τὸ ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ συντελεστοῦ ἐντάσεως τῶν τάσεων K^* ὁρισθῇ ὡς (—ω) ἰσχύει ἡ σχέσις $K^* = |K^*|e^{-i\omega}$, ἐνῷ $K_I = |K^*|\cos\omega$ καὶ $K_{II} = |K^*|\sin\omega$ (σχῆμα 3). Αἱ σχέσεις (23) δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς :

$$\begin{aligned} x' &= r\left[\cos\vartheta + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} + \omega\right)\right] \\ y' &= r\left[\sin\vartheta + \frac{2}{3}\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} + \omega\right)\right] \end{aligned} \tag{27}$$

Πολλαπλασιάζοντες τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (27) ἐπὶ i καὶ προσθέτοντες ταύτας, λαμβάνοντες δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι $z' = x' + iy' = \varrho e^{i\varphi}$ συνάγομεν ὅτι :

$$z' = \varrho e^{i\varphi} = r\left[e^{i\vartheta} + \frac{2}{3} e^{i\left(\frac{3\vartheta}{2} + \omega\right)}\right] \tag{28}$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ὅτι:

$$\varrho = r\left[e^{i(\vartheta - \varphi)} + \frac{2}{3} e^{i\left(\frac{3\vartheta}{2} + \omega - \varphi\right)}\right] \tag{29}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης προκύπτουν αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς γενικευμένης ἐπικυκλοειδοῦς εἰς πολικὰς συντεταγμένας ϱ, φ. Αὗται εἶναι αἱ ἑξῆς :

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= r\left[\cos(\vartheta - \varphi) + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} + \omega - \varphi\right)\right] \\ 0 &= r\left[\sin(\vartheta - \varphi) + \frac{2}{3}\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} + \omega - \varphi\right)\right] \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Διὰ τὸν καθορισμὸν τῶν ἀκροτάτων τῆς ἀκτῖνος ϱ ἐκφραζομένης ὑπὸ τῆς σχέσεως (30, 1) καὶ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν ὡς δευτερευούσης συνθήκης τῆς σχέσεως (30, 2), σχηματίζομεν τὴν συνάρτησιν :

$$\left.\begin{aligned} F(\vartheta, \varphi) = r&\left[\cos(\vartheta - \varphi) + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} + \omega - \varphi\right)\right] + \\ + \lambda r&\left[\sin(\vartheta - \varphi) + \frac{2}{3}\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} + \omega - \varphi\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

ἔνθα λ πολλαπλασιαστής. Λαμβάνοντες τὰς παραγώγους $\partial F/\partial\vartheta = 0$, $\partial F/\partial\varphi = 0$ καὶ $\partial F/\partial\lambda = 0$ σχηματίζομεν σύστημα ἐξισώσεων, ὅπερ λυόμενον δίδει :

$$\left.\begin{aligned} &\sin(\vartheta - \varphi) = 0 \\ &\sin\left(\frac{3\vartheta}{2} + \omega - \varphi\right) = 0 \end{aligned}\right\} (32) \quad \text{ἤ} \quad \left.\begin{aligned} &\cos(\vartheta - \varphi) = \pm 1 \\ &\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} + \omega - \varphi\right) = \pm 1 \end{aligned}\right\} (33)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (30) καὶ δεδομένου ὅτι $\varrho \geqslant 0$ συνάγεται ὅτι ὑπάρχουν δύο ἀκρότατα τῆς πολικῆς ἀκτῖνος ϱ, ἐξ ὧν τὸ ἓν προκύπτει ἐκ τῶν σχέσεων (33) λαμβανομένων ὁμοσήμων, ἐνῷ τὸ ἕτερον προκύπτει ἐκ τῶν αὐτῶν σχέσεων λαμβανομένων ἑτεροσήμων. Οὕτω, διὰ $\cos(\vartheta - \varphi) = 1$ καὶ $\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} + \omega - \varphi\right) = 1$

συνάγεται ὅτι $\vartheta = \varphi = -2\omega$, ἐνῷ διὰ $\cos(\vartheta - \varphi) = 1$ καὶ $\cos\left(\frac{3\vartheta}{2} + \omega - \varphi\right) = -1$, προκύπτει ὅτι $\vartheta = \varphi = 2(\pi - \omega)$.

Εἰσάγοντες τὰς δύο τελευταίας σχέσεις μεταξὺ ϑ, φ καὶ ω εἰς τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων (30) λαμβάνομεν:

$$\text{Διὰ } \vartheta = \varphi = -2\omega \quad : \quad \varrho_{max} = 5r/3 \tag{34}$$

$$\text{Διὰ } \vartheta = \varphi = 2(\pi - \omega) : \quad \varrho_{min} = r/3 \tag{35}$$

Δεδομένου ὅτι ἡ γενικευμένη ἐπικυκλοειδὴς εἶναι κλειστὴ καμπύλη, τὰ ἀκρότατα ταῦτα εἶναι ἀπόλυτα ἀκρότατα.

Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν σχέσεων (30) συνάγεται ὅτι μεταξὺ τῶν γωνιῶν ϑ, φ καὶ ω ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\tan\varphi = \frac{3\sin\vartheta + 2\sin(3\vartheta/2 + \omega)}{3\cos\vartheta + 2\cos(3\vartheta/2 + \omega)} \tag{36}$$

Εἰσάγομεν νέον σύστημα συντεταγμένων $O'x_I\, y_I$, ὅπερ προκύπτει διὰ στροφῆς τοῦ συστήματος $O'x'y'$ περὶ τὴν ἀρχὴν O' ὥστε ὁ ἄξων $O'x_I$ νὰ καταστῇ συμμετρικὸς ἄξων τῆς ἀντιστοίχου ἐπικυκλοειδοῦς καὶ ἡ γωνία $(O'x', O'x_I)$ ὀξεῖα. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν σχέσιν (36) τὰς γωνίας $\vartheta' = (\vartheta + 2\omega)$ καὶ $\varphi' = (\varphi + 2\omega)$ λαμβάνομεν διὰ τὸ σύστημα συντεταγμένων $O'x_I\, y_I$ τὴν σχέσιν:

$$\tan(\varphi' - 2\omega) = \frac{3\sin(\vartheta' - 2\omega) + 2\sin(3\vartheta'/2 - 2\omega)}{3\cos(\vartheta' - 2\omega) + 2\cos(3\vartheta'/2 - 2\omega)} \tag{37}$$

Ἡ σχέσις αὕτη διὰ $\vartheta' = 0, 2\pi, 4\pi$ δίδει $\tan(\varphi' - 2\omega) = \tan(-2\omega)$ καὶ $\varphi' = 0, 2\pi, 4\pi$. Περαιτέρω, ἔχομεν ἑτέρας δύο τιμὰς διὰ τὴν γωνίαν ϑ' προκυπτούσας ἐκ τῆς σχέσεως $\varphi' = \pi, 3\pi$ αἱ ὁποῖαι ὑπολογίζονται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\frac{3\sin(\vartheta' - 2\omega) + 2\sin(3\vartheta/2 - 2\omega)}{3\cos(\vartheta' - 2\omega) + 2\cos(3\vartheta/2 - 2\omega)} = -\tan 2\omega \tag{38}$$

Οὕτω, ἡ γωνία φ κυμαίνεται μεταξὺ 0 καὶ 4π, ὡς καὶ ἡ γωνία ϑ κατὰ τὴν χάραξιν ἁπάσης τῆς ἐπικυκλοειδοῦς. Εἰσάγοντες εἰς τὴν δευτέραν τῶν σχέσεων (30) τὰς τιμὰς τῶν ϑ' καὶ φ', ἀντὶ τῶν ἀντιστοίχων ϑ καὶ φ, λαμβάνομεν:

$$\sin(\vartheta' - \varphi') + \frac{2}{3}\sin\left(\frac{3\vartheta'}{2} - \varphi'\right) = 0$$

ἤ (39)

$$\sin\Big[(-\vartheta') - (-\varphi')\Big] + \frac{2}{3}\sin\left[\frac{3}{2}(-\vartheta') - (-\varphi')\right] = 0$$

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων συνάγεται ὅτι ἡ ἐπικυκλοειδὴς εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα $O'x_I$, ὅστις σχηματίζει γωνίαν α ἴσην πρὸς (-2ω) μετὰ τοῦ ἄξονος $O'x'$.

Διὰ τὸν καθορισμὸν τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐπικυκλοειδοῦς τῆς ἀπομενούσης τομῆς τῆς καμπύλης ταύτης μετὰ τοῦ ἄξονος συμμετρίας της $O'x_I$, ἥτις κεῖται ἐπὶ τῆς ἀντιθέτου διευθύνσεως τῶν ϱ_{max} καὶ ϱ_{min}, ἐκφράζομεν τὰς σχέσεις (27) εἰς τὸ σύστημα $O'x_I\,y_I$, ὅπερ εἶναι συμμετρικὸν πρὸς τὴν ἐπικυκλοειδῆ. Αἱ σχέσεις αὗται δίδονται ὡς:

$$\left.\begin{aligned} x_I &= r\left[\cos(\vartheta+2\omega)+\frac{2}{3}\cos\frac{3}{2}(\vartheta+2\omega)\right] \\ y_I &= r\left[\sin(\vartheta+2\omega)+\frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}(\vartheta+2\omega)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ἐπικυκλοειδοῦς μετὰ τοῦ ἄξονος $O'x_I$ εὑρίσκονται ἐὰν τεθῇ $y_I = 0$ εἰς τὰς σχέσεις (40). Ἐὰν ἡ σχέσις (40,2) τεθῇ ἴση πρὸς τὸ μηδὲν δίδει εἴτε $\sin[(\vartheta+2\omega)/2] = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγονται πάλιν αἱ τιμαὶ τῶν ϱ_{max} καὶ ϱ_{min}, εἴτε $\cos[(\vartheta+2\omega)/2] = -1/4$. Ἐκ τῆς πρώτης τῶν δύο τελευταίων σχέσεων προκύπτει πάλιν ἡ τιμὴ τῆς ϱ_{min}, ἐνῷ ἡ δευτέρα σχέσις δίδει:

$$\varrho_{mid} = \frac{4r}{3} \qquad (41)$$

Ἡ σχέσις (41) ἰσχύει διά:

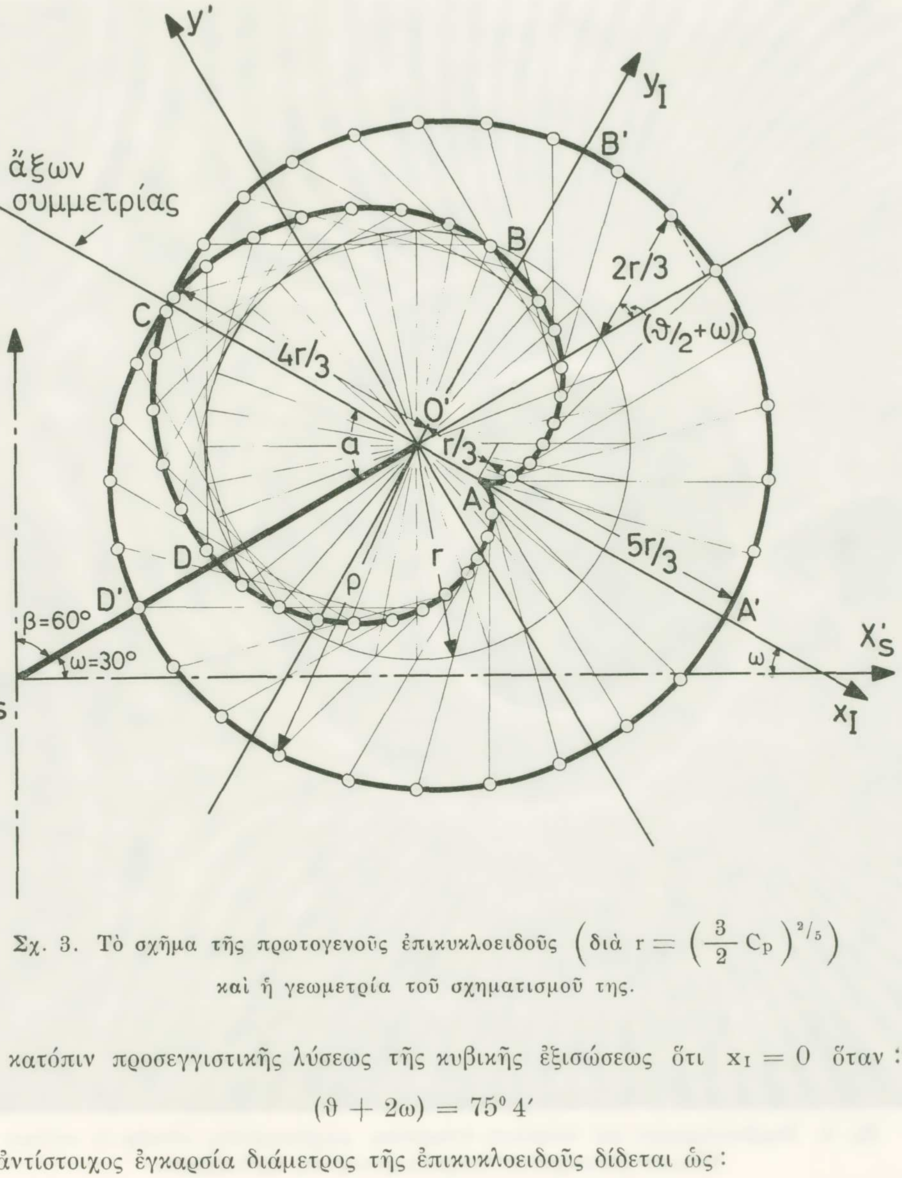
$$\left.\begin{aligned} &(\vartheta+2\omega) = 2\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \quad \text{ἢ} \quad (\vartheta+2\omega) = 151^0\ 3' \\ &\text{ἢ} \\ &(\vartheta+2\omega) = 4\pi - 2\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \quad \text{ἢ} \quad (\vartheta+2\omega) = 568^0 57' \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Ἡ τιμὴ τῆς ϱ_{mid} ἐκφράζει τὴν ἀκτῖνα τῆς ἐπικυκλοειδοῦς κατὰ τὴν τομήν της μετὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονος $O'x_I$.

Τὸ σχῆμα 3 δίδει τὸ σχῆμα τῆς ἐπικυκλοειδοῦς (ABCD'A'B'CDA) διὰ τὴν περίπτωσιν ρωγμῆς ὑπὸ γωνίαν $\omega = \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 30^0$, ἔνθα δεικνύονται αἱ θέσεις τῶν ϱ_{max}, ϱ_{min} καὶ ϱ_{mid}. Ἐνῷ αἱ ϱ_{max} καὶ ϱ_{min} κεῖνται πάντοτε ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος $O'x_I$, ἡ ἀκτὶς ϱ_{mid} κεῖται πάντοτε ἐπὶ τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονος $O'x_I$. Οὕτω, ἡ διάμετρος τῆς ἐπικυκλοειδοῦς κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος $O'x_I$ (A'AO'C) εἶναι πάντοτε ἴση πρός:

$$D_c = \frac{4r}{3} + \frac{5r}{3} = 3r \qquad (43)$$

Ἐργαζόμενοι παρομοίως διὰ τὴν ἐγκαρσίαν διάμετρον τῆς ἐπικυκλοειδοῦς κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος $O'y_I$, θέτοντες εἰς τὴν σχέσιν (40, 1) $x_I = 0$ λαμβάνο-



Σχ. 3. Τὸ σχῆμα τῆς πρωτογενοῦς ἐπικυκλοειδοῦς $\left(\text{διὰ } r = \left(\frac{3}{2} C_p\right)^{2/5}\right)$ καὶ ἡ γεωμετρία τοῦ σχηματισμοῦ της.

μεν κατόπιν προσεγγιστικῆς λύσεως τῆς κυβικῆς ἐξισώσεως ὅτι $x_I = 0$ ὅταν:

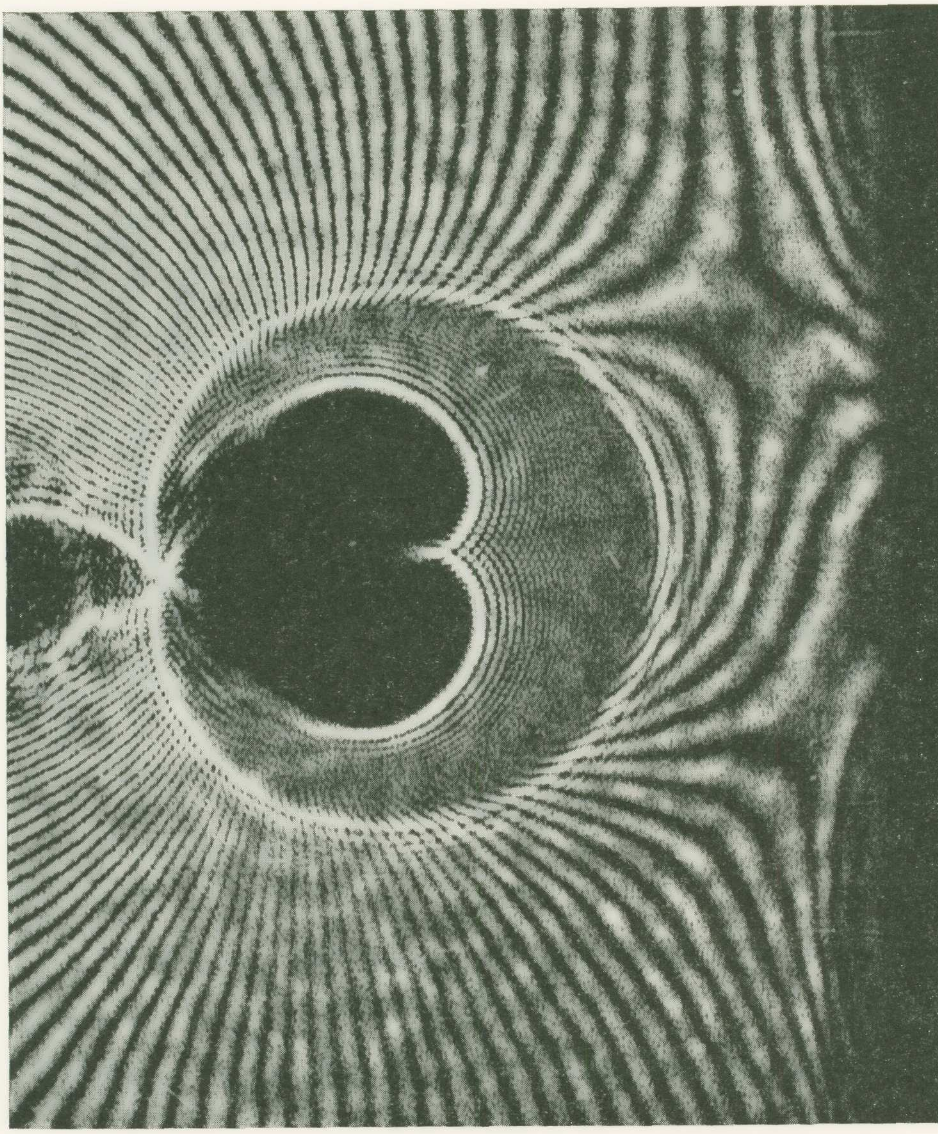
$$(\vartheta + 2\omega) = 75^0\,4'$$

Ἡ ἀντίστοιχος ἐγκαρσία διάμετρος τῆς ἐπικυκλοειδοῦς δίδεται ὡς:

$$D_t \simeq 3.163r \tag{44}$$

Οὕτω, ἡ ἐγκαρσία διάμετρος τῆς ἐπικυκλοειδοῦς ὑπερβαίνει τὴν ἐπιμήκη μόνον κατὰ 5 %.

Τὸ σχῆμα 4 δίδει τὴν μορφὴν τῆς ἐπικυκλοειδοῦς εἰς ρηγματωμένην πλάκα ἐκ πολυμεθυλικοῦ μετακρυλίου, ὥς αὕτη λαμβάνεται ἐπὶ ὀθόνης εἰς ἀπόστασιν



Σχ. 4. Συμβολόγραμμα καὶ καυστικὴ ἐγκαρσίως ρηγματωμένης πλακὸς ἐκ πολυμεθυλικοῦ μετακρυλίου ὑποβαλλομένης εἰς ἐφελκυσμόν.

$z_0 = 144$ cm ἀπὸ τοῦ δοκιμίου. Τὸ πάχος τῆς πλακὸς εἶναι $d = 2$ mm. καὶ τὸ μῆκος τῆς ρωγμῆς εἶναι $\alpha = 15$ mm. Αἱ διαστάσεις τῆς καυστικῆς συμφωνοῦν ἀπολύτως μετὰ τῶν θεωρητικῶν δεδομένων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Born, M., and Wolf, E.: *Principles of Optics,* Pergamon Press, 4th Edition, pp. 41-47, 110-113, 1970.
2. Favre, H.: «Sur une nouvelle méthode d'optique de détermination des tensions intérieures», Revue d'optique théorique et instrumentale, Vol. 8, pp. 5-8, 1929.
3. Paris, P. C., & Sih, G. C.: «Stress Analysis of Cracks», Fracture Toughness Testing and its Applications, A.S.T.M. Sp. Tech. Publ. No. 381, pp. 30-81, 1969.
4. Theocaris, P. S.: «Local Yielding Around a Crack-Tipin Plexiglas», Jnl. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 37, No. 3, pp. 409-415, 1970.

SUMMARY

An optical method was developed for the study of the constrained zones embedded at the crack tips in optically isotropic materials. Deviation of the partially reflected light beam on the back face of a thin transparent plate made of an optically isotropic material, which contained a crack, formed a caustic which defined the constrained zone around the crack-tip. The shape of the constrained zone, limited by the caustic, depended on the thickness variation of the plate, as well as, on the refraction of the impinging light beam. It was shown that for an elastically strained optically isotropic material the caustic has the shape of a circle. This circle when projected on a screen, forms a generalized epicycloid created by the tips of the resultant vector, which represents the reflected and optically deviated light rays. The characteristic properties of the epicycloids were discussed and their connection with the stress intensity factor K*, which is related with the various modes of fracture, was established. Experimental examples with transversely cracked plates made of optically isotropic materials were given.

★

Κατὰ τὴν ἀνακοίνωσιν τῆς ἀνωτέρω ἐργασίας, ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Κ. Ἀλεξόπουλος** εἶπε τὰ κάτωθι:

Ἔχω τὴν τιμὴν νὰ παρουσιάσω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν ἐργασίαν τοῦ τακτικοῦ Καθηγητοῦ τῆς Μηχανικῆς καὶ Διευθυντοῦ τοῦ Ἐργαστηρίου Ἀντοχῆς Ὑλικῶν τοῦ Ε. Μ. Πολυτεχνείου κ. Περικλέους Σ. Θεοχάρη, ὑπὸ τὸν τίτλον: «Μελέτη τῶν συσφιγγομένων ζωνῶν εἰς ρηγματωμένας πλάκας διὰ τῆς ὀπτικῆς μεθόδου τῆς καυστικῆς».

Ὁ κ. Θεοχάρης, μετὰ μακρὰν ἐρευνητικὴν ἐργασίαν εἰς διάφορα κέντρα τῆς Εὐρώπης καὶ τῆς Ἀμερικῆς, διετέλεσεν ἐν ἀρχῇ ἔκτακτος Καθηγητὴς καὶ ἐν συνεχείᾳ τακτικὸς Καθηγητὴς τοῦ Ε. Μ. Πολυτεχνείου ἀπὸ τοῦ 1960 μέχρι σήμερον. Ἐδημοσίευσεν ἀξιολόγους ἐργασίας εἰς περιοδικὰ διεθνοῦς φήμης καὶ εἰς τὰς περιοχὰς τῆς μαθηματικῆς θεωρίας τῆς Ἐλαστικότητος, θεωρίας τῆς Πλαστικότητος καὶ Βισκοελαστικότητος, εἰς τὴν πειραματικὴν ἀντοχὴν τῶν ὑλικῶν καὶ ἄλλους τομεῖς τῆς Ἐφηρμοσμένης Φυσικῆς. Εἶναι ἐπίσης συγγραφεὺς βιβλίου ἐκδοθέντος ἀγγλιστὶ ὑπὸ τῆς Pergamon Press ἀφορῶντος εἰς τὰς μεθόδους moiré διὰ τὴν μέτρησιν τῶν παραμορφώσεων τῶν ὑλικῶν, καὶ ἑτέρου βιβλίου ὑπὸ τίτλον: «Πειραματικὴ Μηχανικὴ τῶν Ὑλικῶν».

Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν ὁ κ. Θεοχάρης δίδει νέαν ἁπλῆν μέθοδον διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐνεργείας τῆς ἀπορροφουμένης ὑπὸ ρήγματος, ὅπερ διαδίδεται ἐντὸς τῆς πλακός.

Θὰ προσπαθήσω δι᾿ ὀλίγων νὰ περιγράψω τὴν οὐσίαν τῆς ἐργασίας του: Ὁ κ. Θεοχάρης ἀφήνει δέσμην φωτὸς νὰ ἀνακλασθῇ ἐπὶ διαφανοῦς πλακός. Ἐπειδὴ ἡ ἀνάκλασις λαμβάνει χώραν τόσον ἐπὶ τῆς προσθίας ὅσον καὶ ἐπὶ τῆς ὀπισθίας ἐπιφανείας, ἔχομεν δύο ἐπιστρεφούσας ἀκτῖνας, αἵτινες ἀλληλεπιδροῦν καὶ συμβάλλουσαι σχηματίζουν ἰδιάζουσαν εἰκόνα ἐπὶ πετάσματος. Ἐὰν τώρα τὸ ὑλικὸν εὑρεθῇ ὑπὸ παραμόρφωσιν τόσον τὸ πάχος, ὅσον καὶ αἱ ὀπτικαὶ ἰδιότητες αὐτοῦ μεταβάλλονται, καὶ οὕτω ἡ εἰκὼν ἐπὶ τοῦ πετάσματος παραμορφοῦται. Ὁ κ. Θεοχάρης ἔσχισε τὴν πλάκα καὶ ἐπίεσε αὐτὴν κατὰ τρόπον ὥστε εἰς τὰς δύο πλευρὰς τῆς σχισμῆς νὰ ὑπάρχουν διαφορετικαὶ καταστάσεις ἐλαστικῆς καταπονήσεως καὶ ἐμελέτησε τὸ ἀποτέλεσμα. Εὗρεν ὅτι δημιουργεῖται ἐπὶ τοῦ πετάσματος ἰδιάζουσα μορφὴ τοῦ σχήματος 3 ἐκ τῆς ὁποίας εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐλαστικὴ καταπόνησις. Ἡ μέθοδος ἔχει ἰδιαιτέραν σημασίαν διὰ τὴν μελέτην τῆς ἀντοχῆς τῶν ὑλικῶν, διότι ἐὰν καταπονήσωμεν ὑπερβολικὰ ἓν ὑλικὸν θὰ δημιουργηθῇ ρῆγμα, τοῦ ὁποίου τὴν ἐλαστικὴν κατάστασιν δυνάμεθα νὰ παρακολουθήσωμεν ἐκ τῆς μορφῆς τῆς ἐξ ἀνακλάσεως εἰκόνος. Εἰς τὴν πρᾶξιν τὸ ρῆγμα διαδίδεται καθ᾿ ὅλην τὴν ἔκτασιν τοῦ ὑλικοῦ πρακτικῶς ἀκαριαίως. Δι᾿ ἐντελῶς συγχρόνων τεχνικῶν μέσων, ἀκτίνων Laser καὶ ταχυτάτης κινηματογραφήσεως, ὁ κ. Θεοχάρης κατορθώνει νὰ παρακολουθήσῃ τὴν ἐπέκτασιν τοῦ ρήγματος κατὰ τὰς διαφόρους αὐτῆς φάσεις καὶ νὰ ἀποκτήσῃ οὕτω βαθυτέραν κατανόησιν ἐπὶ τοῦ τρόπου κατὰ τὸν ὁποῖον καταστρέφεται ἡ συνοχὴ τῶν στερεῶν, ὅταν ὑπερβαίνωμεν τὸ ὅριον ἀντοχῆς αὐτῶν.