ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ. — **Quelques pensées sur un cas de l'égalité et de l'inégalité des puissances des ensembles***. *Note de M.* ***Spyridion Sarantopoulos.*** Présentée par M. G. Rémoundos.

---

1. C'est à cause d'une lettre[1] de M. MONTEL que l'on nous voit revenir à l'examen des ensembles dont nous nous sommes déjà occupés dans une Note qui est insérée dans les «PRAKTIKA» de l'Académie d'Athènes, 2, 1927 p. 123. Nous sommes obligés de donner ici quelques explications et d'exprimer quelques pensées relatives à ce sujet si intéressant et si dificile.

M. MONTEL dans sa lettre fait la remarque que l'on doit avoir en vue que les ensembles[2] A_2 et B peuvent satisfaire en même temps aux relations

$$(1) \qquad A_2 \not< B \not< A_2$$

c'est-à-dire qu'il peut arriver que B ne corresponde pas partiellement à A_2 et en même temps que A_2 ne corresponde pas partiellement à B. Cela est évidemment équivalent à l'hypothèse principale: «*Étant donnés deux ensembles* A *et* B *il n'existe ni un* A_1 (partie aliquote de A) *ayant même puissance que* A, *ni un* B_1 *ayant même puissauce que* A». Le droit donc d'admettre la possibilité de la réalisation de l'hypothèse (1) découle de celle de la réalisation de l'hypothèse principale.

Mais ayant en vue la réalité a-t-on le droit de former l'hypothèse principale? lorsque il s'agit des ensembles à un nombre fini d'élements, évidement oui, mais quand il s'agit des ensembles infinis? Ce point nous inspire des pensées.

Une étude plus approfondie sur la signification, sur le sens que contient l'hypothèse principale nous conduit à conclure qu'en formant cette hypothèse nous formons en même temps l'une de deux suivantes: a) *il existe des ensembles* A *et* B *infinis qui sont comparables* (c'est-à-dire, qui ont même puissance, ou l'un a une puissance supérieure ou inférieure à celle de l'autre), b) *il existe des ensembles incomparables.* Nous distinguons, c'est-à-dire, deux cas.

---

* Σ. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ. — Σκέψεις τινὲς ἐπὶ μιᾶς περιπτώσεως τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος τῶν δυνάμεων τῶν συνόλων.

[1] J'ai reçu cette lettre le 27 septembre 1927.

[2] Voir «**Praktika**» de l'Académie d'Athènes, 2, 1927, p. 126.

Après cela, il nous semble préférable de ne pas poser la question comme elle l'est déjà: «Lorsque on est dans l'hypothèse principale peut-on affirmer que les deux ensembles A et B ont même puissance?» Mais comme il suit:

1°. A *et* B *étant deux ensembles infinis comparables et assujettis à remplir l'hypothèse principale ont-ils même puissance?*

2°. *Ya-t-il des ensembles incomparables?*

Ma Note ci-dessus mentionnée concerne précisement le cas 1°. Après cette explication on devrait y ajouter que A et B sont comparables et la conclusion serait: Sous l'hypothèse principale deux ensembles *comparables* A et B ne peuvent exister qu'à la condition d'être composés d'un même nombre fini d'éléments. Désignons par (A) cette proposition.

Ma réponse sur la question 2° est négative.

Mais voyons tout d'abord comment on peut arriver à la conclusion que deux ensembles infinis assujettis à remplir l'hypothèse principale sont ou bien comparables ou bien incomparables.

2. Nous allons approfondir dans le sens de l'hypothèse principale: «Étant donnés deux ensembles infinis A et B il n'existe ni un A_1 ayant même puissance que B, ni un B_1 ayant même puissance que A». Que signifie la phrase «*il n'existe ni un* A_1 *ayant même puissance que* B»? Évidemment le contraire de ce que signifie la phrase «il existe au moins un A_1 ayant même puissance que B»; et celle-ci signifie «il existe au moins un A_1 dont les éléments correspondent aux éléments de B», un à un (d'une manière univoque et réciproque, d'après M. CANTOR). Donc la phrase négative veut dire: il n'existe ni un A_1 ayant des éléments pouvant correspondre (ou plutôt correspondant) un à un aux éléments de B; c'est-à-dire il n'existe pas une loi (non parce que nous ne pouvons la concevoir, il n'existe pas absolument) suivant laquelle on pourrait faire correspondre, les éléments de A_1 et B. Qu'est-ce qu'on en doit conclure? Il n'y a que deux choses que nous pouvons imaginer: 1° ou bien les éléments de A_1 et B ne peuvent se correspondre un à un, car dans une telle correspondance quelques-uns des éléments de A_1 n'ont pas d'éléments correspondant dans B ou inversement, 2° ou bien il n'en arrive rien, mais si l'on ne peut faire une correspondance, ce sera pour une raison quelconque, autre que la précédente. Arretons-nous provisoirement ici.

Si l'on admet que la première raison a lieu, on peut dire, d'une manière plus brève, qu'on ne peut faire A et B correspondre, car on admet que l'un des ensembles A_1 et B a une puissance inférieure ou supérieure à celle de l'autre.

Si l'on admet que la deuxième raison a lieu, on admet a priori l'existence de A_1 et B ayant la propriété d'être incomparables (c'est-à-dire n'ayant ni la même puissance, ni l'un, une puissance supérieure ou inférieure à celle de l'autre). Mais cela équivaut à ce que A et B sont aussi incomparables. Car A_1 est, par hypothèse, une partie aliquote de A mais quelconque; on peut donc l'avoir choisi de la manière qu'il ait même puissance avec A (p. ex. on peut choisir A_1 tel que A-A_1 soit un ensemble dénombrable). On peut évidemment répéter la même chose en partant des ensembles B_1 et A.

Après tout cela, on voit bien que *deux ensembles qui remplissent l'hypothèse principale sont ou bien comparables ou bien incomparables.*

Cela posé si l'on prend en considération la conclusion (A) on aboutit à conclure que les ensembles infinis qui peuvent remplir l'hypothèse principale sont incomparables.

3. On pourrait arriver a ce résultat en suivant un autre chemin, en s'appuyant sur les deux propositions suivantes:

I. *Deux ensembles* A *et* B *infinis ayant même puissance ne peuvent pas remplir l'hypothèse principale.*

En effet, en supprimant, parmi les éléments de A, les éléments d'un ensemble dénombrable Γ, on trouve un ensemble $A - \Gamma = A_1$ qui a même puissance que A. On voit donc, qu'il existe une partie aliquote A_1 de A ayant même puissance que B. De la même façon on voit qu'il existe une partie aliquote B_1 de B ayant même puissance que B.

Donc, A et B ne remplissent pas l'hypothèse principale.

II. *Deux ensembles infinis dont l'un a une puissance supérieure ou inférieure à celle de l'autre ne peuvent pas remplir l'hypotèse principale.*

Cette proposition est une conséquence immédiate de la difinition même des ensembles à puissance supérieure ou inférieure à celle d'un autre. On dit qu'un ensemble A a une puissance supérieure ou inférieure à celle de B, précisément, quand il existe une partie aliquote B_1 de B qui a même puissance que A et il n'existe ni une partie aliquote A_1 de A ayant même puissance que B etc.

Donc, A et B ne remplissent pas l'hypothèse principale.

Il résulte de ces deux propositions que deux ensembles A et B infinis remplissant l'hypothèse principale ne sont pas comparables. Ils sont donc incomparables. Évidemment ils sont comparables quand ils sont composés d'un même nombre fini d'éléments.

4. Il reste à examiner la question 2°. Voici comment nous arrivons à la réponse négative.

1re méthode.—Nous revenons aux idées du paragraphe 2. Supposons que A et B satisfaisant à l'hypothèse principale soient incomparables. Pour avoir le droit à dire que ni un A_1 de A n'a pas même puissance que B etc., il faut qu'une comparaison de A et B soit précedée, il faut qu'une correspondance de leurs éléments soit faite, c'est-à-dire une operation d'esprit telle que la pensée d'un élément de A éveille la pensée d'un élément de B. Cette correspondance s'impose à l'esprit, il existe donc dans l'hypothèse principale comme une présupposition. Il ne nous intéresse pas le moyen avec lequel on arrivera à faire cette correspondance, il n'importe pas quel mécanisme sera necessaire pour réussir à l'obtenir. Ce qui est essentiel est que notre esprit peut faire correspondre les éléments de A à ceux de B de sorte qu'on obtienne des couples, sans qu'il soit nécéssaire d'avoir soin, dans cette opération, si d'abord α correspondra à β et ensuite α_1 à β_1 et ainsi de suite. On peut concevoir cette correspondance simultanément comme il arrive dans la correspondance des points d'une surface par la méthode de projection. Dans une telle correspondance simultanée, notre esprit ne peut admettre que deux choses: 1° ou bien on ne déduira que des couples d'éléments correspondants, alors A et B auront même puissance, 2° ou bien on déduira un ensemble de couples, mais de plus, des éléments de A ou de B qui n'auront pas d'éléments correspondant dans l'autre. Alors l'ensemble A aura une puissance supérieure ou inférieure à celle de B.

On déduit de cette manière de penser qu'il n'existe pas d'ensembles incomparables.

2ème méthode. — Cette méthode s'appuie sur le théorème que *tout ensemble peut être bien ordonné.* Il est bien connu le débat que la demonstration de M. Zermelo a soulevé. La question n'est pas encore finie. Si l'on ne doute pas pour la justesse du raisonnement de M. Zermelo, je peux donner la démonstration suivante.

Supposons que nous ayons bien ordonné A et B. Alors comme on le voit bien dans le livre de Baire[1], A et B ou bien sont semblables, ou bien l'un est semblable à un segment de l'autre. Cela signifie que A et B ou bien correspondent d'une manière univoque et réciproque, ils ont donc même puissance, ou bien l'un a une puissance supérieure ou inférieure à celle de l'autre A et B donc sont comparables, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que A et B sont incomparables. Il en résulte que A et B n'existent pas.

3ème méthode.— Cette méthode a pour base la proposition suivante: *La somme des ensembles ayant même puissance a même puissance.*

Cette proposition, comme il est connu, est vraie pour les ensembles dénombrables et pour ceux qui ont la puissance du continu. Nous ne doutons pas de sa vérité dans le cas général, mais malheuresement la démonstration de ce cas nous échappe.

De la vérité de cette proposition générale on déduirait aisement que: *En supprimant dans un ensemble quelconque A des éléments d'autre ensemble B ayant une puissance inférieure à celle de A, on obtient un autre ensemble ayant même puissance que A.* La démonstration est pareille à celle que l'on fait quand B est dénombrable. Il suffit de prendre en considération la proposition précédente.

Cela posé, pour démontrer qu'il n'y a pas d'ensembles incomparables on devrait proceder comme il suit.

Soit A et B deux ensembles quelconques. Considérons l'ensemble $A+B$. Posons $\Gamma=A+B$. A est une partie aliquote de Γ; alors ou bien il aura une puissance inférieure à celle de Γ ou bien il aura même puissance que Γ. D'après la proposition précédente $\Gamma—A$ et Γ devront avoir même puissance, Donc B et Γ auront même puissance. Par conséquent A ayant une puisance inférieure à celle de Γ, a aussi une puissance inférieure à celle de B.

En raisonnant sur B de la même manière, on arrive à la conclusion que B ayant une puissance inférieure à celle de Γ a aussi une puissance inférieure à celle de A.

Si l'on admet dans chacun de deux raisonnements précédents que ni A a une puissance inférieure à celle de Γ (lorsque A aura même puissance que Γ) ni B a une puissance inférieure à celle de Γ (lorsque B aura même puissence que Γ) A et B auront même puissance que Γ. Donc A et B auront même puissance entre eux. Ils sont donc comparables.

[1] Leçons sur les fonctions discontinues, 1905, p. 35.

On en conclut qu'il n'existe pas d'ensembles incomparables.

En combinant cette conclusion avec les propositions I et II, on aboutit à la proposition que j'ai énoncé dans ma Note citée au commencement.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Ὁ κ. Σαραντόπουλος ἔκαμεν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν μίαν ἀνακοίνωσιν καταχωρισθεῖσαν εἰς τὸ τεῦχος 2, 1927. Ἐπὶ τῆς ἀνακοινώσεως ταύτης ὁ κ. MONTEL δι' ἐπιστολῆς του πρὸς τὸν κ Σαραντόπουλον κάμνει ἐνδιαφέρουσαν παρατήρησιν ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ κ Σαραντόπουλος δίδει ἐξηγήσεις καὶ διατυπώνει ἐνδιαφερούσας σκέψεις ἐν σχέσει πρὸς τὴν τετάρτην περίπτωσιν τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος τῶν συνόλων ἤτοι ἐπὶ τοῦ τόσου ἐνδιαφέροντος καὶ δυσκόλου ζητήματος, οὗτινος ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. BOREL ὑποδεικνύων τὴν σπουδαιότητα εἰς τὸ βιβλίον του ἐπιθυμεῖ τὴν λύσιν.

Ἐν τῇ ἀνακοινώσει ταύτῃ ἐξηγεῖ πῶς θὰ ἔπρεπε νὰ τεθῇ τὸ ζήτημα τοῦτο ὥστε ἡ λύσις του νὰ καταστῇ προσιτὴ καὶ δίδει διαφόρους λύσεις αὐτοῦ.

Οὕτω δεικνύει ὅτι τὰ σύνολα τῆς τετάρτης περιπτώσεως δέον νὰ χωρισθῶσιν εἰς δύο κατηγορίας: εἰς σύνολα συγκρίσιμα καὶ εἰς μὴ συγκρίσιμα.

Δεικνύει ὅτι ἡ ἀνωτέρω μνημονευθεῖσα ἀνακοίνωσίς του λύει τὸ ζήτημα διὰ σύνολα συγκρίσιμα καὶ ὅτι σύνολα μὴ συγκρίσιμα δὲν ὑπάρχουσι.

HISTOIRE. — Un Napoléonide mort pour la Grèce — Paul-Marie Bonaparte (1809-1827)*, *par M.* ***Spyridion Pappas.*** Présenté par M. Démètre Gr. Cambouroglou.

Seul, parmi les Napoléonides, Paul Bonaparte, grand-oncle de la Princesse Marie, mort pour la Grèce, n'a pas tenté feu Frédéric Masson et, sauf un excellent article de M. René Puaux, paru dans le TEMPS du 7 Avril 1921 et puisé à trois sources essentielles[1], il n'existe aucune étude d'ensemble sur ce jeune neveu de l'Empereur. Cette carence partielle de l'éminent auteur de «*Napoléon et sa Famille*» et des autres historiographes de l'Empire doit être attribuée à l'absence de renseignements suffisants sur un personnage décédé à l'âge de 18 ans des suites d'un malencontreux accident car, pas

* **ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ ΠΑΠΠΑ.—Εἷς Ναπολεοντίδης ἀποθανὼν ὑπὲρ τῆς Ἑλλάδος—Παῦλος-Μάριος Βοναπάρτης (1809-1827).**

[1] *Souvenirs, Traditions et Révélations* du Prince Pierre-Napoléon Bonaparte (Bruxelles 1876). G. Cochrane *Wanderings in Greece* (Londres 1837 et *Lettres du Genevois Louis-André Gosse à sa Mère pendant son séjour en Grèce (1826-1830)* publiées par M. Emile Rothpletz (Genève 1920).