ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ANALYSE MATHÉMATIQUE.—Sur les équations qu'on intègre en les différentiant*. *Note de M.* ***Spyridion Sarantopoulos.*** Présentée par M. Georges Rémoundos.

1.—Il est déjà connu dépuis longtemps qu'on intègre une équation différentielle de la forme

$$(1) \qquad y = A(x, p), \qquad \langle p = \tfrac{dy}{dx} \rangle$$

en la différentiant, si l'on peut intégrer l'équation dérivée

$$(2) \qquad p = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial p}\frac{dp}{dx}.$$

Soit

$$(3) \qquad F(x, p, c) = 0$$

l'équation intégrale de cette dernière. Alors l'intégrale de l'équation (1) est le résultat de l'élimination de p entre l'équation (1) et (3). Par cette méthode on a pu intégrer l'équation dite de Lagrange dont un cas particulier est celle de Clairaut. On a ainsi pu intégrer, de plus, un petit nombre d'équations[1] qui ne sont que des formes très particulières de (1).

2.—Dans un mémoire qui doit être publié bientôt nous nous occupons d'une manière systématique de l'intégration de ces équations qu'on intègre en les différentiant. Nous avons obtenu des résultats nouveaux, assez interésants et généraux. Nous nous contentons d'en donner ici quelqus-uns sans demonstration.

3.—α') Considérons les équations différentielle

$$(4) \qquad y = px + f(p)x^{\nu}$$

$$(5) \qquad y = px + f(p)y^{\nu}$$

Elles sont de formes plus générales que l'équation de Clairaut; la deuxième peut se mettre aisement sous la forme (4). On obtient l'intégrale générale de (4) en éliminant p entre cette équation et la rélation

$$(6) \qquad x^{\nu-1} = f(p)^{-\frac{\nu-1}{\nu}}\left[c - \frac{\nu-1}{\nu}\int f(p)^{-\frac{1}{\nu}}dp\right], \qquad (c = \text{constante}).$$

* Σ. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΥ.—Περὶ τῶν ἐξισώσεων τῶν λυομένων διὰ διαφορίσεως.

[1] Voir Encyclopédie Allemande pag. 244; voir Bulletin de la Société Math. de France 1895, 25 p. 50: Sur certaines équations qu'on intègre en les différenciant, par M. L. RAFFY, et p. 88: Sur les équations différ. analogues à l'équation de Clairaut, par M. GOURÇAT.

β') En généralisant la forme (4) on trouve que l'intégrale générale de l'équation

$$(7) \qquad y=f(p)^{\frac{1}{\nu}}\left[\alpha+\int p\,df(p)^{-\frac{1}{\nu}}\right]x+f(p)x^{\nu} \qquad (\alpha=\text{const. donnée})$$

est

$$y=\alpha c+c^{\nu}+\int\sigma\left[\left(\frac{c}{x}\right)^{\nu}\right]dx \qquad (c=\text{const.}),$$

$\sigma\left[\left(\frac{c}{x}\right)^{\nu}\right]$ désignant la valeur de p qu'on tire de l'équation

$$(8) \qquad f(p)=\left(\frac{c}{x}\right)^{\nu}$$

On peut écrire l'équation (7) sous la forme

$$(9) \qquad y=\varphi(p)x+x^{\nu}e^{\nu\int\frac{d\varphi(p)}{\varphi(p)-p}}$$

pour avoir l'intégrale générale de (9) on doit lui joindre la relation

$$(10) \qquad x=c\,e^{-\int\frac{d\varphi(p)}{\varphi(p)-p}};$$

cela revient à éliminer p entre (10) et la relation

$$y=\varphi(p)x+c^{\nu}.$$

γ') Une forme plus générale que (7) est l'équation

$$(11) \qquad y=f(p)^{\frac{1}{\nu}}\left[\alpha+\int p\,df(p)^{-\frac{1}{\nu}}\right]x+\sum_{\mu=1}^{\varkappa}A_{\mu}f(p)^{\frac{\mu}{\nu}}x^{\mu}$$

dont l'intégrale générale est

$$y=\alpha c+\sum_{\mu=1}^{\varkappa}A_{\mu}c^{\mu}+\int\sigma\left[\left(\frac{c}{x}\right)^{\nu}\right]dx \qquad \left[\text{avec } p=\sigma\left[\left(\frac{c}{x}\right)^{\nu}\right] \text{ et } f(p)=\left(\frac{c}{x}\right)^{\nu}\right].$$

L'équation (10) peut se mettre sous la forme

$$(12) \qquad y=\varphi(p)x+\sum_{1}^{\varkappa}A_{\mu}x^{\mu}e^{\mu\int\frac{d\varphi(p)}{\varphi(p)-p}}.$$

Alors on obtient l'intégrale générale en joignant à (10) l'équation

$$y=\varphi(p)x+\sum_{\mu=1}^{\varkappa}A_{\mu}c^{\mu}$$

4.—Les formes (11) et (12) suggèrent le théorème général qui suit:

Théorème. *Soit l'équation générale*

$$(13) \qquad y=A(x,p)+B(x,p)$$

Si l'intégrale générale

(14) $$F(x, p, c) = 0 \qquad \text{(où c est une const. arbitraire)}$$

de l'équation décivée qu'on obtient en différentiant l'équation

$$y = A(x, p),$$

définit pour p *une fonction de* x, *et* c, *reduisant* B (x, p) *à une nombre constant (en général égal à une fonction de* c, Θ (c)*), l'équatiou intégrale de* (13) *est le résultat de l'élimination de* p *entre la relation* (14) *et l'équation*

$$y = A(x, p) + \Theta(c)$$

Ce théorème est très utile pour faire des généralisations importantes. Voici quelques applications

I. L'équation différentielle

$$y = px + f(p)x^{\nu} + \Theta\left[x^{\nu-1} f(p)^{\frac{\nu-1}{\nu}} + \frac{\nu-1}{\nu}\int f(p)^{-\frac{1}{\nu}}\, dp\right],$$

où $\Theta(u)$ désigne une fonction arbitraire de u, est une forme plus générale que (4). On obtient son intégrale générale en joignant à la relation

$$y = px + f(p)x^{\nu} + \Theta(c)$$

l'équation (6).

II. L'équation

(14) $$y = f(p)^{\frac{1}{\nu}}\left[\alpha + \int p\, d f(p)^{-\frac{1}{\nu}}\right]x + f(p)x^{\nu} + \Theta\left[x f(p)^{\frac{1}{\nu}}\right]$$

est une généralisation de (7). Son intégrale générale est

$$y = \alpha c + c^{\nu} + \Theta(c) + \int \sigma\left[\left(\frac{c}{x}\right)^{\nu}\right] dx$$

En généralisant (9) de la même façon on obtient l'équation

(15) $$y = \varphi(p)x + \Theta\left[x e^{\int \frac{d\varphi(p)}{\varphi(p) - p}}\right]$$

ayant comme intégrale générale le résultat de l'élimination de p entre (10) et la relation

$$y = \varphi(p)x + \Theta(c)$$

On remarque que (14) et (15) peuvent être aussi obtenues par la généralisation de l'équation $y = \varphi(p)x$ moyennant le théorème précédent.

III. L'équation de Clairaut n'est qu'une généralisation de l'équation simple $y = px$, qu'on fait à l'aide du théorème précédent.

IV. L'équation

$$(16) \qquad y = p\sigma(x) + \Theta\left[p\sigma(x)e^{-\int \frac{dx}{\sigma(x)}}\right]$$

étant une généralisation de l'équation $y = p\sigma(x)$ a pour intégrale générale l'équation

$$y = ce^{\int \frac{dx}{\sigma(x)}} + \Theta(c);$$

c'est-à-dire pour l'obtenir, il suffit de remplacer, dans l'équation (16), p par c et $\sigma(x)$ par $e^{\int \frac{dx}{\sigma(x)}}$. Si l'on a $\sigma(x) = x$ l'équation (16) se réduit à l'équation de Clairaut.

V. L'équation

$$y = p^{\nu}\sigma(x) + \Theta\left[p^{\nu-1}\sigma(x)^{\frac{\nu-1}{\nu}} - \frac{\nu-1}{\nu}\int \sigma(x)^{-\frac{1}{\nu}}\,dx\right] \quad (\text{avec } \nu \neq 0 \text{ et } \nu \neq 1),$$

a pour intégrale générale l'équation qu'on obtient en éliminant p entre les équations du système

$$y = p^{\nu}\sigma(x) + \Theta(c), \qquad p^{\nu-1} = \sigma(x)^{-\frac{\nu-1}{\nu}}\left[c + \frac{\nu-1}{\nu}\int \sigma(x)^{-\frac{1}{\nu}}\,dx\right]$$

VI. L'équation

$$y = a(x)p + b(x) + \Theta\left[a(x)pe^{-\int \frac{dx}{a(x)}} + \int e^{\int -\frac{dx}{a(x)}}\,db(x)\right]$$

est une généralisation de l'équation lineaire du premier ordre. Son intégrale générale est

$$y = e^{\int \frac{dx}{a(x)}}\left[c - \int e^{-\int \frac{dx}{a(x)}}\,db(x)\right] + b(x) + \Theta(c).$$

Si l'on a $b(x) = 0$ et $a(x) = \sigma(x)$ on rétombe à l'équation (16).

VII. L'équation

$$y = \varphi(p)x + f(p) + \Theta\left[xe^{\int \frac{d\varphi(p)}{\varphi(p)-p}} + \int e^{\int \frac{d\varphi(p)}{\varphi(p)-p}} \frac{df(p)}{\varphi(p)-p}\right]$$

est une généralisation de l'équation de Lagrange. On obtient l'intégrale générale en éliminant p entre les équations

$$y = \varphi(p)x + f(p) + \Theta(c) \quad \text{et } x = e^{-\int \frac{d\varphi(p)}{\varphi(p)-p}}\left[c + \int e^{\int \frac{d\varphi(p)}{\varphi(p)-p}} \frac{df(p)}{\varphi(p)-p}\right]$$

5.—Nous allons maintenant énoncer une proposition très générale:

Une équation différentielle quelconque $y = A(x, p)$ *peut se mettre sous la forme suivante*

$$(17) \qquad y = -p\frac{\partial K(p,\sigma)}{\partial p} + \sigma\frac{\partial K(p,\sigma)}{\partial \sigma} + K(p,\sigma) + \Phi(\sigma)$$

σ *étant une fonction de* x *et* p *satisfaisant à une relation de la forme*

$$(18) \qquad x + K'_p(p,\sigma) = \varphi(\sigma p)$$

Alors l'intégrale générale de (17) *est le résultat de l'élimination de* p *et* σ *entre* (17), (18), *et la rélation*

$$(19) \qquad \sigma^2\frac{\partial K(p,\sigma)}{\partial \sigma} - \int \sigma p d\varphi(\sigma p) + \int \sigma d\Phi(\sigma) = c$$

Désignons par $G(p, \sigma)$ le premier membre de (19). Alors on peut dire: On obtient l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(20) \quad y = -p\frac{\partial K(p,\sigma)}{\partial p} + \sigma\frac{\partial K(p,\sigma)}{\partial \sigma} + K(p,\sigma) + \Phi(\sigma) + \Theta(G)$$

en éliminant p et σ entre la relation

$$y = -\frac{\partial K}{\partial p} + \sigma\frac{\partial K}{\partial \sigma} + K + \Phi(\sigma) + \Theta(c)$$

et les (18) et (19).

Outre l'intégrale générale, l'équation (24) admet une solution singulière. On obtient cette solution en éliminant p et σ entre (18), (19) et la rélation

$$\sigma\frac{d\Theta(G)}{dG} = -1$$

A l'égard de cette solution singulière, on peut énoncer la proposition suivante:

La solution singulière de (20), *que l'on trouve comme ci-dessus, représente l'enveloppe de la famille des courbes représentées par l'intégrale générale de l'équation* (20).

Comformement à cette proposition, dans tous les exemples cités: I, II, ... VII, on peut trouver aisement, de plus, la solution singulière de l'équation corressondante. L'équation de Clairaut n'est donc, à ce point de vue, qu'un cas très particulier.

6.—On peut mettre l'équation (20) sous une autre forme plus commode, à un point de vue. Soit qu'on ait choisi la fonction σ d'avance. Posons $\sigma = g(x, p)$. Soit $r(\sigma, p)$ la fonction qu'on en tire en résolvant cette relation par rapport à x. Alors l'équation (20) se réduit à la forme

$$(21) \qquad y = px - \int r(\sigma,p)dp - \sigma\int\frac{\partial r(\sigma,p)}{\partial \sigma}dp + \Phi(\sigma) + \Theta(G(\sigma,p))$$

avec

$$(22) \qquad G \equiv -\sigma^2 \int \frac{\partial r(\sigma,p)}{\partial \sigma} dp + \int \sigma d\Phi(\sigma) = c$$

Voici une application: Soit $\sigma = \frac{n(p)}{x^\mu}$. L'équation (21) et la relation (22) deviennent

$$y = px - \frac{\mu-1}{\mu} \cdot \frac{x}{\sqrt[\mu]{n(p)}} \int \sqrt[\mu]{n(p)}\, dp + \Phi\left(\frac{n(p)}{x^\mu}\right) + \Theta(G)$$

$$G \equiv \frac{1}{\mu}\left[\frac{n(p)}{x^\mu}\right]^{\frac{\mu-1}{\mu}} \int \sqrt[\mu]{n(p)}\, dp + \int \frac{n(p)}{x^\mu} d\Phi\left(\frac{n(p)}{x^\mu}\right) = c$$

Pour $\mu = 1$ on trouve comme cas particulier l'équation[1]

$$(23) \qquad y = px + \Phi\left(\frac{n(p)}{x}\right) + \Theta(G)$$

avec

$$G \equiv \int n(p)\, dp + \int \frac{n(p)}{x} d\Phi\left(\frac{n(p)}{x}\right) = c$$

Pour $\mu = 1$ et $\Phi\left(\frac{n(p)}{x}\right) = x^\nu\, n(p)^{-\nu} \equiv f(p) x^\nu$ on retrouve l'équation du paragraphe I.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

1.—Μία μέθοδος πρὸς ὁλοκλήρωσιν τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξεως λελυμένων ὡς πρὸς τὴν συνάρτησιν y εἶναι καὶ ἡ λεγομένη μέθοδος διὰ διαφορίσεως. Ἡ μέθοδος αὕτη προϋποθέτει ὅτι ἡ διὰ διαφορίσεως τῆς δοθείσης προκύπτουσα ἐξίσωσις δύναται νὰ ὁλοκληρωθῇ κατά τινα τρόπον. Ὀλίγαι τινὲς ὅμως ἐξισώσεις ἔχουσιν ὁλοκληρωθῆ μέχρι τοῦδε διὰ τῆς μεθόδου ταύτης, οἷον ἡ λεγομένη ἐξίσωσις τοῦ LAGRANGE, ἡ τοῦ CLAIRAUT ἥτις εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς πρώτης καί τινες ἄλλαι περὶ τῶν ὁποίων ἠσχολήθη ὁ κ. RAFFY εἰς τὸ περιοδικὸν τῆς Γαλλικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας — Τόμ. 23, 1895.

Ὁ κ. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ ἀσχολούμενος κατὰ τρόπον συστηματικὸν περὶ τῶν ἐξισώσεων τῆς ἀνωτέρω κατηγορίας εἰς μίαν του νεωτέραν διατριβὴν μέλλουσαν νὰ δημοσιευθῇ προσεχῶς, ἀνακοινοῖ ἐνταῦθα μερικὰ ἀπὸ τὰ ἐνδιαφέροντα ἀποτελέσματα τῶν ἐρευνῶν του, παρέχων τὰς λύσεις διαφόρων γενικῶν μορφῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, τινῶν τῶν ὁποίων ὡς μερικαὶ περιπτώσεις δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν αἱ μέχρι τοῦδε λυθεῖσαι. Παρέχει ἐπίσης τὸ μέσον κατασκευῆς ὅσων θέλωμεν διαφορικῶν ἐξισώσεων γενικῆς μορφῆς καὶ τὸν τρόπον τῆς λύσεως αὐτῶν. Οὕτως ἀποδεικνύει ὅτι, ἂν $\sigma = g(x, p)$ καὶ $r(\sigma, p)$ παριστᾷ τὴν συνάρτησιν x ἣν ὁρίζει ἡ σχέσις αὕτη, ἡ γενικὴ λύσις τῆς (21) εἶναι τὸ ἐξαγόμενον ἀπαλοιφῆς τῶν σ καὶ p μεταξὺ τῶν (21), (22) καὶ τῆς σχέσεως $\sigma = g(x,p)$. Ἐκτὸς τῆς γενικῆς ταύτης λύσεως ὑποδεικνύει τρόπον εὑρέσεως καὶ τῆς λεγομένης ἰδιαζούσης λύσεως ἥτις παριστᾷ γεωμετρικῶς τὴν περιβάλλουσαν τῶν καμπύλων τῆς γενικῆς λύσεως.

---

[1] En posant dans (23) $\Phi\left(\frac{n(p)}{x}\right) = \frac{x}{P'(p)} \tau'\left(\frac{x}{P'(p)}\right) - \tau\left(\frac{x}{P'(p)}\right)$ avec $P'(p) = n(p)$ on est devant l'équation donnée par M. RAFFY.