Παρὰ τὴν πληθὺν τῶν διαφόρων μαθηματικῶν τύπων καὶ ἐξισώσεων, ἐλάχιστα παροράματα ἔχουν παρεισφρύσει εἰς τὸ κείμενον, διορθωθέντα ἄλλως τε ὑπὸ τοῦ συγγραφέως.

Ἡ ἔκδοσις, ἐπὶ ἀρίστου χάρτου, κοσμεῖται διὰ πληθύος σχημάτων.

Ὁ κ. Ξένος δὲν ἐφείσθη κόπων διὰ νὰ προβῇ εἰς τὴν σύνταξιν καὶ ἐκτύπωσιν τοῦ ἔργου. Τόσον μεθοδικὴ ἐργασία, ἐξαντλοῦσα τὸ πραγματευόμενον θέμα, νομίζω ὅτι τὸ πρῶτον δημοσιεύεται παρ' ἡμῖν. Ἀποβαίνει αὕτη λίαν χρήσιμον βοήθημα εἰς τοὺς ἀσχολουμένους περὶ τὰ προβλήματα ταῦτα, ἀλλὰ ἀποτελεῖ καὶ ἀξιέπαινον προσπάθειαν διὰ τὴν πρόοδον τῆς ἐπιστημονικῆς γνώσεως καὶ συμβάλλει, ὡς εἶπον, εἰς τὴν παγίωσιν τῆς ἀγροτικῆς ἰδιοκτησίας καὶ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς γεωργικῆς μας οἰκονομίας.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΕΛΟΥΣ

ΙΩ. ΤΡΙΚΑΛΛΙΝΟΥ.—*Περὶ τῆς σημασίας τῶν μεταλλοφόρων κοιτασμάτων τῆς Ἑλλάδος**.

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΗ ΜΕΛΟΥΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΙΣ.—**«Ἀναλλοίωτοι εἰς ὁμάδα μετασχηματισμῶν ἐπαφῆς»**, *ὑπὸ* ***Νείλου Σακελλαρίου.***

1. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὡς ἓν στοιχεῖον ἐπαφῆς εἰς τὸν Εὐκλείδειον χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων θεωρεῖται τὸ σύνολον ἑνὸς σημείου (τοῦ ἐν λόγῳ χώρου) καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, διερχομένου διὰ τοῦ σημείου τούτου. Ἓν τοιοῦτον στοιχεῖον ὁρίζεται διὰ τῶν πέντε συντεταγμένων του, ἤτοι διὰ τῶν τριῶν συντεταγμένων τοῦ σημείου καὶ τοῦ μοναδιαίου διανύσματος, καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον[1].

Εἰς τὴν παροῦσαν ἀνακοίνωσιν θεωροῦμεν μίαν οἰκογένειαν ἢ μίαν πολλαπλότητα ἐκ στοιχείων ἐπαφῆς, ἐξαρτωμένων ἐκ μιᾶς παραμέτρου. Ἓν τοιοῦτον στοιχεῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ διάνυσμα τοῦ σημείου του X, ἤτοι ἀπὸ τὸ $\mathbf{OX} = \mathbf{x}\ (x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}(x_i)$, $i = 1, 2, 3$ καὶ ἀπὸ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα $\mathbf{XT} = \mathbf{t}\ (t_1, t_2, t_3) = \mathbf{t}\ (t_i)$, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ στοιχείου, κεῖται δὲ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου διευθύνσεως (P) τοῦ στοιχείου, ἐνῷ $\mathbf{XB} = \mathbf{b}\ (b_1, b_2, b_3) = \mathbf{b}\ (b_i)$ εἶναι τὸ μοναδιαῖον κάθετον διάνυσμα ἐπὶ τὸ (P). Ὁ χῶρος ἀναφέρεται εἰς τρισορθογώνιον δεξιόστροφον σύστημα ἀξόνων $Ox_1\, x_2\, x_3$. Θεωροῦμεν τὰς εὐθείας τὰς ὁριζομένας ὑπὸ τοῦ δια-

---

* Ἡ ἀνωτέρω ἐργασία ἐδημοσιεύθη ἀλλαχοῦ.

[1] E. VESSIOT, Leçons de la géométrie supérieure (1919, p p. 137, 293).

νύσματος $\mathbf{t}$ ὡς ἐφαπτομένας τοῦ λαιμοῦ τῆς ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται ἢ εἶναι περιγεγραμμένη εἰς τὴν περὶ οὗ ὁ λόγος πολλαπλότητα. Ἐὰν τὸ θεωρούμενον στοιχεῖον μεταφερθῇ (εὐθυγράμμως) πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν ὁρίζει τὸ $\mathbf{t}$ καὶ κατ' ἀπόστασιν c, εἶναι δὲ X^* ἡ νέα θέσις τοῦ X, τὸ $Ox_1^* x_2^* x_3^*$ (εἶναι) ἄλλο ὀρθογώνιον δεξιόστροφον σύστημα ἀξόνων, καὶ $\mathbf{OX}^* - \mathbf{x}^*$ (x_i^*) ἀναφέρεται εἰς τὸ σύστημα x_i^*, τότε λέγομεν ὅτι ὑποβάλλομεν τὴν θεωρουμένην πολλαπλότητα εἰς ὁμάδα μετασχηματισμῶν τῆς μορφῆς

$$(1.1)\quad \begin{cases} \mathbf{x}^* = \mathbf{a}_j x_j + c\mathbf{a}_j t_j, & j=1,2,3 \\ \mathbf{t}^* = \mathbf{a}_j t_j, \end{cases}$$

ὅπου $\mathbf{a}_j = \mathbf{OA}_j$ εἶναι μοναδιαῖα διανύσματα τῶν ἀξόνων x_i καὶ a_{ji} αἱ συντεταγμέναι των ὡς πρὸς τὸ σύστημα x_i^*, ἐνῷ τὰ c, a_{ji} παριστάνουν σταθερὰς (πραγματικὰς) ποσότητας. Τὰ a_{ji} εἶναι οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου μετασχηματισμοῦ μὲ ὁρίζουσαν τήν:

$$(1.2)\qquad |a_{ji}| = \delta = +1,$$

ἐπαληθεύουν δὲ τὰς σχέσεις:

$$(1.3)\qquad \left.\begin{matrix} \Sigma_i\, a_{ji}\, a_{ki} \\ \Sigma_i\, a_{ij}\, a_{ik} \end{matrix}\right\} = 0 \text{ ἢ } 1 \text{ καθ' ὅσον εἶναι } j \neq k, \text{ ἢ } j = k.$$

Ὁρίζομεν τὴν πολλαπλότητα ὡς παραμετρικὴν οἰκογένειαν, τῶν στοιχείων της ἐξαρτωμένων ἀπὸ μίαν (ἀναλλοίωτον) παράμετρον ω, ἡ ὁποία παριστάνει τὴν γωνίαν τοῦ $\mathbf{t}$ μὲ μίαν ὡρισμένην διεύθυνσιν.

Δίδομεν κατωτέρω ἀναλλοιώτους τῆς πολλαπλότητος, ὑποβαλλομένης εἰς τὸν μετασχηματισμὸν (ἐπαφῆς) (1.1), μερικὰς ἰδιότητας καὶ σχέσεις τινὰς μεταξὺ τοῦ λαιμοῦ τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς πολλαπλότητος, καὶ τῆς πολικῆς ἐπιφανείας της καὶ τῆς εὐθειοποιούσης ἐπιφανείας αὐτῆς, ὡς καὶ τοῦ τόπου τῶν στοιχείων τῆς πολλαπλότητος διὰ μερικὴν περίπτωσιν, αἱ ὁποῖαι ὀφείλονται εἰς τὸν μετασχηματισμὸν (1.1).

2. Ἔστω *(S)* ἡ ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια, ἐφαπτομένη τῆς πολλαπλότητος καὶ (γ) ὁ λαιμὸς ταύτης. Ἂν s παριστᾷ τὸ μῆκος τόξου τῆς (γ) καὶ ρ, τ τὰς ἀκτῖνας καμπυλότητος καὶ στρέψεως, $\mathbf{b}$, $\mathbf{t}$ τὰ μοναδιαῖα διανύσματα τῆς δικαθέτου καὶ ἐφαπτομένης τῆς (γ), ἀναφερομένης εἰς τὸ σύστημα x_i, ἂν $\mathbf{n}$ (n_i) εἶναι τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τῆς πρώτης καθέτου τῆς (γ), θὰ ἔχωμεν[1]:

[1] N. Sakellariou, Contribution à la théorie des surfaces, *Bull. de la Soc. Math. de Grèce*, t. I, 1, p. 126.

$$(2.1) \qquad (d\omega)^2 = \sqrt{(d\mathbf{t})^2}$$

$$(2.2) \qquad \frac{ds}{\sqrt{(d\mathbf{t})^2}} = \frac{ds}{d\omega} = \varrho, \ \frac{d\mathbf{t}}{d\omega} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\omega} = \frac{\mathbf{n}}{\varrho} \cdot \varrho, \ldots$$

Ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους τοῦ Frenet εὑρίσκομεν

$$(2.3) \qquad \frac{d\mathbf{t}}{d\omega} = \mathbf{n}, \ \frac{d\mathbf{n}}{d\omega} = - \ \mathbf{t} + \frac{\varrho}{\tau} \ \mathbf{b}, \ \frac{d\mathbf{b}}{d\omega} = - \frac{\varrho}{\tau} \ \mathbf{n},$$

ἀκολούθως δὲ

$$\frac{\tau}{\varrho} \left| \ \mathbf{t} \ \frac{d\mathbf{t}}{d\omega} \ \frac{d\mathbf{n}}{d\omega} \right| = 1$$

ἢ

$$\frac{\tau}{\varrho} \left| \ \mathbf{t} \ \frac{d\mathbf{t}}{d\omega} \ \frac{d^2\mathbf{t}}{(d\omega)^2} \right| = - 1$$

καὶ

$$(2.4) \qquad \frac{\varrho}{\tau} = - \left| \ \mathbf{t} \ \frac{d\mathbf{t}}{d\omega} \ \frac{d^2\mathbf{t}}{(d\omega)^2} \right| .$$

Ἐὰν ρ^*, τ^*, $\mathbf{t}^*$, $\mathbf{n}^*$, $\mathbf{b}^*$ εἶναι τὰ ἀντίστοιχα τῶν ρ, τ, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ ὡς πρὸς τὸ σύστημα x_i^*, εὑρίσκομεν :

$$(2.5) \qquad (d\mathbf{t}^*)^2 = (d\mathbf{t})^2,$$

$$\left| \ \mathbf{t}^* \ \frac{d\mathbf{t}^*}{d\omega} \ \frac{d^2\mathbf{t}^*}{(d\omega)^2} \right| = \left| \ \mathbf{t} \ \frac{d\mathbf{t}}{d\omega} \ \frac{d^2\mathbf{t}}{(d\omega)^2} \right|$$

$$(2.6) \qquad \rho^*/\tau^* = \rho/\tau$$

$$(2.7) \qquad \sqrt{(d\mathbf{b}^*)^2} = \sqrt{(d\mathbf{b})^2} .$$

Οὕτω τὰ ρ/τ, $\sqrt{(d\mathbf{t})^2}$, $\sqrt{(d\mathbf{b})^2}$ τῆς (γ) εἶναι ἀναλλοίωτοι διὰ τὸν μετασχηματισμὸν (1.1).

3. Αἱ ἀποστάσεις τοῦ σημείου X τῆς (γ) ἀπὸ τὴν τομὴν τῶν καθέτων ἐπιπέδων εἰς τὰ X καὶ X′ ($\mathbf{x} + d\mathbf{x}$), τῶν εὐθειοποιούντων ἐπιπέδων καὶ τῶν ἐγγυτάτων ἐπιπέδων εἰς τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι κατὰ σειρὰν[1]

$$p_t = - \frac{\mathbf{t}d\mathbf{x}}{d\omega}, \ p_n = - \mathbf{n}d\mathbf{x} : d\omega \sqrt{1+\varrho^2/\tau^2}, \ p_b = - \tau\mathbf{b}d\mathbf{x} : pd\omega .$$

Ἂν p_t^*, p_n^*, p_b^* εἶναι τὰ ἀντίστοιχα τῶν p_t, p_n, p_b διὰ τὸ σύστημα x_i^*, εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$p_t^* = p_t, \ p_b^* = p_b, \ p_n^* = p_n + c : \sqrt{1 + \varrho^2/\tau^2} .$$

Ἂν τεθῇ $\qquad - p_t = T, \ - \frac{\varrho}{\tau} p_b = B, \ - p_n \cdot \sqrt{1 + \varrho^2/\tau^2} = N,$

[1] Ν. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ, Μαθήματα διανυσματικοῦ λογισμοῦ. 1947, σ. 167 - 168.

εὑρίσκομεν, ἐὰν T^*, B^*, N^* εἶναι τὰ ἀντίστοιχα τῶν T, B, N διὰ τὸ σύστημα x_i^*:

$$T^* = T, \quad B^* = B, \quad N^* = N + c,$$

ἤτοι τὰ T, B εἶναι ἀναλλοίωτοι διὰ τὸν μετασχηματισμὸν (1.1), καθὼς καὶ τὰ

$$\frac{dT}{d\omega}, \quad \frac{dN}{d\omega}, \quad \frac{dB}{d\omega}, \quad (\text{ὄχι ὅμως τὸ } N).$$

4. Ἐζητήσαμεν νὰ εὕρωμεν πῶς μετασχηματίζεται ὁ λαιμὸς τῆς πολικῆς ἐπιφανείας τῆς (γ), κατελήξαμεν δὲ εἰς τὸν τύπον [1]

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{X} + \frac{c\sqrt{\varrho^2+\tau^2}}{\varrho} \cdot \frac{\varrho\mathbf{t}+\tau\mathbf{b}}{\sqrt{\varrho^2+\tau^2}},$$

προκειμένου διὰ τὸν μετασχηματισμὸν $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + c\mathbf{t}$,

ὅπου $\dfrac{\varrho\mathbf{t}+\tau\mathbf{b}}{\sqrt{\varrho^2+\tau^2}}$ παριστάνει τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τῆς εὐθειοποιούσης εὐθείας τῆς (γ). Οὕτω ἔχομεν ὅτι «*τὸ σημεῖον* X *τοῦ τόπου τῶν κέντρων τῶν ἐγγυτάτων σφαιρῶν τῆς* (γ) *μεταφέρεται κατὰ μῆκος τῆς εὐθειοποιούσης εὐθείας κατὰ*

$$\frac{c\sqrt{\varrho^2+\tau^2}}{\varrho}\text{»}.$$

Διὰ τὸν λαιμὸν τῆς (S) καὶ διὰ τὸν μετασχηματισμὸν $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + c\mathbf{t}$ εὑρίσκομεν [2] $X^* = X$, διὰ δὲ τὸν (1.1) εἶναι

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{x}^* + \left[\frac{d\left(B\frac{\tau}{\varrho}\right)}{d\omega} - (N+c)\right]\mathbf{t} - \frac{\tau}{\varrho}B\,\mathbf{n}.$$

Ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν τὸν μετασχηματισμὸν $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + c\mathbf{b}$ καὶ θεωρήσωμεν ὡς ἀναλλοίωτον παράμετρον τὴν γωνίαν τοῦ $\mathbf{b}$ μὲ σταθερὰν διεύθυνσιν, εὑρίσκομεν τὰ συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα ἔδωκαν ἀφορμὴν διὰ τὴν ἐργασίαν ταύτην, τοῦ κ. A. Haimovici [3]. Τέλος διὰ τὸν λαιμὸν τῆς εὐθειοποιούσης ἐπιφανείας τῆς (γ) εὑρίσκομεν

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + \left[\frac{B\frac{\tau}{\varrho} - T + \frac{dN}{d\omega}}{\frac{d}{d\omega}\,\varrho/\tau}\right]\left(\frac{\varrho}{\tau}\,\mathbf{t}+\mathbf{b}\right) - N\mathbf{t}$$

διὰ δὲ τὸν μετασχηματισμὸν $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + c\mathbf{t}$, ὅτι εἶναι $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}$.

---

[1] N. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ, Μαθήματα διανυσματικοῦ λογισμοῦ, 1947, σ. 166.

[2] N. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ, Μαθήματα διανυσματικοῦ λογισμοῦ, 1947, σ. 169.

[3] A. HAIMOVICI, Sur la géométrie d'un group de contact, *Annales Sc. de l'Acad. de Jasey*, t. XXIX, fasc. 1 - 2, p. 123.

5. Ὑπολογίζομεν τὸ $\frac{d\mathbf{x}}{d\omega}$ διὰ τῶν $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ καὶ εὑρίσκομεν

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\omega}\ \mathrm{T}\mathbf{t}+\mathrm{N}\mathbf{n}+\mathrm{B}\mathbf{b}.$$

Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι εἶναι

$$\mathrm{T}=\mathbf{t}\ \frac{d\mathbf{x}}{d\omega}=0.$$

Διὰ τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἐὰν (γ_*) παριστᾷ τὸν τόπον τῶν στοιχείων X τῆς θεωρουμένης πολλαπλότητος, ἡ ἐφαπτομένη τούτου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ $\mathbf{t}$ τοῦ λαιμοῦ τῆς (S), ἐὰν δ' ἐπὶ πλέον ὑποτεθῇ $\mathrm{B}=\mathbf{b}\ \frac{d\mathbf{x}}{d\omega}=0$, θὰ ἔχωμεν $\frac{d\mathbf{x}}{d\omega}=\mathrm{N}\mathbf{n}$.

Ἂν s_* παριστᾷ τὸ μῆκος τόξου τῆς (γ_*), εὑρίσκομεν

$$(d\mathbf{x})^2=\mathrm{N}^2(d\omega)^2,\qquad ds_*=\mathrm{N}d\omega.$$

Ἂν $\mathbf{t}_*$, $\mathbf{n}_*$, $\mathbf{b}_*$ παριστοῦν τὰ μοναδιαῖα διανύσματα τῆς ἐφαπτομένης, τῆς πρώτης καθέτου καὶ δικαθέτου τῆς (γ_*), εὑρίσκομεν:

$$\mathbf{t}_*=\frac{d\mathbf{x}}{ds_*}=\mathbf{n},$$

$$\frac{d\mathbf{t}_*}{ds_*}=\frac{d\mathbf{n}}{\mathrm{N}d\omega}=\frac{\mathbf{n}_*}{\varrho_*},$$ ϱ_* εἶναι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς (γ_*) καὶ τέλος

$$\varrho_*=\frac{\mathrm{N}}{\sqrt{1+\varrho^2/\tau^2}}$$

$$\frac{1}{\tau_*}=\frac{d\,(\varrho/\tau)}{\mathrm{N}\,(1+\varrho^2/\tau^2)\,d\omega},$$ τ_* ἡ ἀκτὶς στρέψεως τῆς (γ_*)

καὶ

$$\frac{\varrho_*}{\tau_*}=\frac{d\left(\frac{\varrho}{\tau}\right)}{\left(1+\frac{\varrho^2}{\tau^2}\right)^{3/2}d\omega}$$

ἤτοι, «*τὸ* $\frac{\varrho_*}{\tau_*}$ *εἶναι ἀναλλοίωτος διὰ τὸν μετασχηματισμὸν* (1.1)». Ἐὰν εἶναι τὸ ϱ/τ σταθερόν, θὰ ἔχωμεν $\frac{\varrho_*}{\tau_*}=0$, ἤτοι, *ἂν ὁ λαιμὸς τῆς (S) εἶναι καμπύλη σταθερᾶς κλίσεως, π. χ. κυλινδρικὴ καμπύλη, τότε αἱ ὀρθογώνιοι τροχιαὶ τῶν ἐφαπτομένων της εἶναι ἐπίπεδοι γραμμαί*».