ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.— **Περὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παρὰ τοῖς ἀρχαίοις,** ὑπὸ ***Εὐαγγ. Σταμάτη*** *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχαὴλ Στεφανίδου.

Εἰσαγωγή.

Εἰς τὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν ὑποστηρίζεται ἡ γνώμη ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον μὲν τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, δημιουργήσαντες τὴν θεωρίαν τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν, ἠγνόουν ὅμως τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους θεωροῦσι δημιούργημα τῶν νεωτέρων χρόνων. Ἀντίθετον γνώμην διατυποῖ ὁ ἡμέτερος ἀκαδημαϊκὸς κ. Μιχαὴλ Στεφανίδης γράφων ὅτι ἡ θεωρία «τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν» ὀφείλεται κυρίως εἰς τὸν Εὔδοξον [1]. Ἔρευναν τοῦ προβλήματος τούτου ἐπεχείρησαν πολλοὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων μνημονεύομεν τὸν Zeuthen [2], τὸν T. Heath, ὅστις ἡρμήνευσε τὸν 5ον ὁρισμὸν τοῦ V Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, τὸν ἀποδιδόμενον εἰς τὸν Εὔδοξον [3], καὶ τοὺς H. Hasse καὶ H. Scholz [4]. Οἱ τελευταῖοι καταλήγουσιν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι 1) Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν ἐδημιούργησαν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς, διότι δὲν ἠδύναντο νὰ δημιουργήσωσιν αὐτούς. 2) Δὲν ἠδύναντο νὰ δημιουργήσωσιν αὐτούς, διότι δὲν εἶχον εἰς τὰ μαθηματικά των τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς, καὶ 3) Δὲν εἶχον τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς, διότι δὲν ἤθελον νὰ ἔχωσιν αὐτοὺς (σ. 79 τῆς μεταφράσεως εἰς τὴν ἑλληνικήν).

Κατωτέρω ἀποδεικνύεται, κατὰ τὴν ἡμετέραν γνώμην, ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐδημιούργησαν τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς διὰ τῆς παραθέσεως χωρίων ἐκ τῶν πραγματειῶν τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους καὶ ἑρμηνείας τινῶν ἐξ αὐτῶν, ὡς καὶ διὰ τῆς ἑρμηνείας τοῦ 35ου θεωρήματος τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου.

1. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες εἶχον εἰς τὰ μαθηματικά των τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς. Ὁ Πλάτων εἰς τὴν Πολιτείαν γράφει «πάντα προσήγορα καὶ ρητὰ πρὸς ἄλληλα ἀπέφηναν» καὶ «ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ρητῶν πεμπάδος» Εἰς τοῦτο νοεῖται ἡ $\sqrt{2.5^2-1}=7$ ὡς ρητὸς ἀριθμὸς (546, C).

---

* E. STAMATIS, Über die Irrationalenzahlen bei den Alten.

1. Εἰσαγωγὴ εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν Φυσικῶν Ἐπιστημῶν, σ. 103, Ἀθῆναι, 1938.

2. Mathematische Annalen, σ. 222, 1896.

3. The thirteen books of Euclid's Elements καὶ *Ε. Σταμάτη,* Εὐκλείδου Γεωμετρία - θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχ. τόμ. II, σ. 20, Ἀθῆναι 1953. Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν βιβλίων.

4. Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik. Charlottenburg 1928. Μετάφρασις εἰς τὴν ἑλληνικὴν ὑπὸ τοῦ Φ. Βασιλείου καὶ Χ. Καπνουκάγια, 1934.

Ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς προκειμένου τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς $\sqrt{720}$ γράφει: «Ἐπεὶ οὖν αἱ ΨΚ (=720) ρητὴν τὴν πλευρὰν οὐκ ἔχουσι ληψόμεθα». Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 720 δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς θὰ λάβωμεν... κλπ. (Μετρικά, τόμ. III σ. 18—20, Schoene, Teubner, 1903).

II. Ὁ Πλάτων εἰς τὸν Θεαίτητον γράφει:

Θεαίτητος. Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος. ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. Ἡμῖν οὖν εἰσῆλθε τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

Σωκράτης. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;

Θεαίτητος. Ἔμοιγε δοκοῦμεν. σκόπει δὲ καὶ σύ.

Σωκράτης. Λέγε.

Θεαίτητος. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν. τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

Σωκράτης. Καὶ εὖ γε.

Θεαίτητος. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

Σωκράτης. Κάλλιστα. Ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;

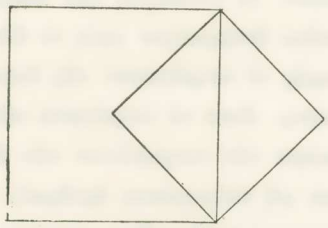
Θεαίτητος. Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύναται. Καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον (147 d — 148 b). Δηλαδή: Ὁ Θεόδωρος ἠσχολήθη μὲ τὰς τετραγωνικὰς ρίζας ἀριθμῶν, καὶ μὲ τὴν $\sqrt{3}$ καὶ μὲ τὴν $\sqrt{5}$ ἀποδείξας ὅτι ἡ $\sqrt{3}$ δὲν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὸν 3 καὶ ἡ $\sqrt{5}$ δὲν εἶναι σύμμετρος πρὸς τὸν 5, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀπέδειξε τὴν ἀσυμμετρίαν δι' ἑκάστην τῶν ριζῶν $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$... μέχρι τῆς $\sqrt{17}$. ἐνταῦθα δὲ ἐσταμάτησε. Δὲν ἔχει νόημα νὰ λέγεται ὅτι ὁ Θεόδωρος ἀπέδειξεν, ὅτι τὸ μέγεθος $\sqrt{3}$ δὲν εἶναι σύμμετρον πρὸς τὸ μέγεθος 3.

Εἰς δὲ τὴν Ἐπινομίδα:

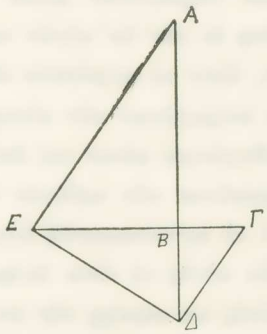
«Ταῦτα δὲ μαθόντι τούτοις ἐφεξῆς ἐστιν ὃ καλοῦσι μὲν σφόδρα γελοῖον ὄνομα γεωμετρίαν, τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φύσει ἀριθμῶν ὁμοίωσις πρὸς τὴν τῶν ἐπιπέδων μοῖραν γεγονυῖά ἐστι διαφανής. ὃ δὴ θαῦμα οὐκ ἀνθρώπινον ἀλλὰ γεγονὸς θεῖον φανερὸν ἂν γίγνοιτο τῷ δυναμένῳ ξυννοεῖν. μετὰ δὲ ταύτην

τοὺς τρὶς ηὐξημένους καὶ τῇ στερεᾷ φύσει ὁμοίους, τοὺς δὲ ἀνομοίους αὖ γεγονότας ἑτέρᾳ τέχνῃ ὁμοιοῖ[1], ταύτῃ ἣν δὴ στερεομετρίαν ἐκάλεσαν οἱ προστυχεῖς αὐτῇ γεγονότες» (990d — 991α).

Οἱ ἐκ φύσεως ὅμοιοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἶναι ἐκεῖνοι, οἵτινες ἔχουσι τὴν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως (καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Ἡ μοῖρα, ἡ τύχη, ἡ ἰδιότης τῶν ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἶναι ὅτι οὗτοι προκύπτουσιν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀριθμῶν. Ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{2}$ δὲν εἶναι ὅμοιος κατὰ τὴν φύσιν πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1 (ἢ ρ $\sqrt{2}$, ρ). Ἡ γεωμετρία ὅμως ἀποδεικνύει ὅτι, ὅπως δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν $1\times1=1$, οὕτω δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ (σχ. 1), ὥστε οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ $1\times1=1$ καὶ $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ νὰ εἶναι ἐκ φύσεως



Σχ. 1.



Σχ. 2.

ὅμοιοι, νὰ ὑπόκεινται δηλ. εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως. Ὁ Πλάτων δὲν ὁμιλεῖ περὶ «ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν» ὡς ἑρμηνεύεται ὑπό τινων[2].

Ὁ ἀριθμὸς $\sqrt[3]{2}$ δὲν εἶναι ἐκ φύσεως ὅμοιος πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1 (ἢ ρ $\sqrt[3]{2}$, ρ). Ἡ στερεομετρία ὅμως ἀποδεικνύει (δήλιον πρόβλημα, σχ. 2) ὅτι, ὅπως δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν $1\times1\times1=1$, οὕτω δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}$, ὥστε οἱ στερεοὶ ἀριθμοὶ $1\times1\times1=1$ καὶ $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{2}=2$ νὰ εἶναι ἐκ φύσεως ὅμοιοι, δηλ. νὰ ὑπόκεινται εἰς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως. Ὁ Πλάτων ὁμιλεῖ διὰ τοὺς ὁμοίους κατὰ τὴν στερεὰν φύσιν ἀριθμούς, τοὺς ὄντας γινόμενον τριῶν παραγόντων καὶ οὐχὶ διὰ τοὺς ὁμοίους στερεοὺς ἀριθμούς.

---

1. Ὁμοίᾳ.

2. Ε. *Des Places*, Le passage mathématique de l'Epinomis et la théorie des irrationelles. Revue des études grecques, σ. 546, 1935, καὶ *Paul - Henri Michel*, De Pythagore à Euclide, σ. 505, 1950, Paris.

III. Ὁ Ἀριστοτέλης εἰς τὰ Ἠθικὰ Νικομάχεια γράφει:

«Τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ» (Ε' III. 8).

Εἰς δὲ τὰ Μετὰ τὰ φυσικά λέγει:

«Τὸ δ' ὑπερέχον πρὸς τὸ ὑπερεχόμενον ὅλως ἀόριστον κατ' ἀριθμόν. ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ σύμμετρον δὲ ἀριθμὸν λέγεται» (1021α 4).

Δηλαδὴ ὁ Ἀριστοτέλης ὁμιλεῖ περὶ μὴ συμμέτρων ἀριθμῶν.

IV. Τὸ 35ον θεώρημα τοῦ X βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἔχει ὡς ἑξῆς:

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνῳ. Δηλαδή, νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν νὰ εἶναι μέσον, τὸ γινόμενον τῶν πλευρῶν νὰ εἶναι ὀρθογώνιον μέσον καὶ ἀκόμη νὰ εἶναι τοῦτο ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν (δηλ. πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης). Ἢ νὰ κατασκευασθῇ διτετράγωνος ἐξίσωσις, ὥστε τὰ τετράγωνα τῶν θετικῶν ριζῶν αὐτῆς νὰ εἶναι ἀσύμμετρα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν θετικῶν ριζῶν αὐτῆς νὰ περιέχῃ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ, καὶ τὸ γινόμενον τῶν θετικῶν ριζῶν νὰ περιέχῃ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ καὶ ἀκόμη νὰ εἶναι τοῦτο ἀσύμμετρον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν θετικῶν ριζῶν.

Προτάσσομεν ἑρμηνείαν ὅρων τινῶν.

1. Τυχοῦσα εὐθεῖα ρ λαμβανομένη ὡς μέτρον λέγεται ρητή.

2. Εὐθεῖαι μήκει σύμμετροι ἢ μήκει ἀσύμμετροι λέγονται αἱ ἔχουσαι ἢ μὴ κοινὸν μέτρον.

3. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι ἢ δυνάμει ἀσύμμετροι λέγονται, ἐκεῖναι τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα ἔχουσιν ἢ μὴ κοινὸν μέτρον.

4. Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον λέγεται μέσον, ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι τῆς μορφῆς ρ, ρ $\sqrt{\alpha}$ ἢ ρ $\sqrt{\alpha}$, ρ $\sqrt{\beta}$, ἔνθα ρ ρητὴ καὶ α, β οὐχὶ τετράγωνοι. Ὅταν δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου περιέχῃ τὴν δευτέραν ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ ἢ ὅταν ἐπίπεδος ἀριθμὸς περιέχῃ τὴν δευτέραν ρίζαν παράγοντος μὴ τετραγώνου ἀριθμοῦ.

5. Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ ἀνωτέρω ὀρθογώνιον περιέχει τὸν παράγοντα ρ $\sqrt[4]{\alpha}$ (ἢ ρ $\sqrt[4]{\alpha\beta}$) καὶ καλεῖται μέση. Εἶναι φανερὸν ὅτι

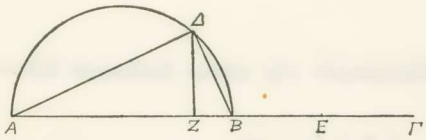
ἡ $\rho\sqrt[4]{\alpha}$ εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ρ, $\rho\sqrt{\alpha}$, ἐξ οὗ καὶ αἰτιολογεῖται ὁ ὅρος μέση καὶ μέσον.

6. Ἐὰν δοθῶσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ>ΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ παραβληθῇ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν ὡς ὀρθογώνιον, ἔχον πλευρὰς ἀσυμμέτρους, τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τῆς μικροτέρας, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα, τοῦτο σημαίνει: νά εὑρεθῶσιν αἱ ἀσύμμετροι ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

$$x^2 - AB\,x + \frac{B\Gamma^2}{4} = 0$$

$$\text{αἱ } x_1 = \frac{AB}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2} \text{ καὶ } x_2 = \frac{AB}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$$

Πρὸς ἀπόδειξιν λαμβάνει δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους τὰς ΑΒ> ΒΓ (σχ. 3), ὥστε ΑΒ×ΒΓ νὰ εἶναι μέσον καὶ $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$ ἀσύμμετρος πρὸς ΑΒ.



Σχ. 3.

Ἡ εὕρεσις τῶν δύο μέσων.

1. Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ γ, δ οὐχὶ τετράγωνοι καὶ εὐθεῖα ρητὴ ἡ Α=ρ Τῶν γ, δ, ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $\omega = \rho . \frac{\delta}{\gamma}$. Τῶν ρ, ω εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $B = \rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, (Χ. 6, πόρισμα). Αἱ εὐθεῖαι ρ, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ εἶναι ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι (Χ. 10).

2. Ἔστωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ α^2, β^2, ὥστε $\alpha^2+\beta^2=\lambda$ νὰ μὴ εἶναι τετράγωνος καὶ εὐθεῖα ρητὴ Α=ρ. Πρὸς εὕρεσιν τῶν δύο τούτων τετραγώγων ἀριθμῶν λαμβάνομεν δύο ὁμοίους ἐπιπέδους ἀριθμοὺς ἀρτίους ἢ περιττούς, τοὺς μ, ν, ὁπότε κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἶναι μ=κξ, ν=στ καὶ κ : ξ=σ : τ (κ, ξ, σ, τ ἀκέραιοι). Κατὰ τὸ δεύτερον λῆμμα τοῦ Χ. 28 εἶναι $\mu\nu + \left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 = \lambda$ ἢ $\kappa\xi\sigma\tau + \left(\frac{\kappa\xi-\sigma\tau}{2} - 1\right)^2 = \lambda$ οὐχὶ τετράγωνος [μν=

$= \alpha^2$ κατὰ τὸ IX. 1, καὶ $\left(\frac{\mu-\nu}{2} - 1\right)^2 = \beta^2$]. Μὲ διάμετρον τὴν εὐθεῖαν ρ γράφομεν ἡμικύκλιον. Τῶν λ, α^2, ρ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $\varphi = \frac{\rho\alpha^2}{\lambda}$, καὶ τῶν ρ, φ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $\Gamma = \frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$. Αἱ εὐθεῖαι ρ, $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ εἶναι ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ ρ, $\sqrt{\rho^2 - \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}}$ εἶναι μήκει ἀσύμμετροι (X. 30), (ρ πάντοτε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$). Ἡ ρ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθεται πλευραὶ εἶναι $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$, $\sqrt{\rho^2 - \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}}$.

3. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων 1 καὶ 2 εὑρέθησαν τρεῖς ρηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ ρ, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$, $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ καὶ $\sqrt{\rho^2 - \frac{\rho^2\alpha^2}{\lambda}}$ μήκει ἀσύμμετρος πρὸς ρ.

Τῶν ρ, $\rho\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}$ εὑρίσκομεν τὴν μέσην ἀνάλογον $AB = \rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Τῶν $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\rho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{\rho\alpha}{\sqrt{\lambda}}$ εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον $B\Gamma =$

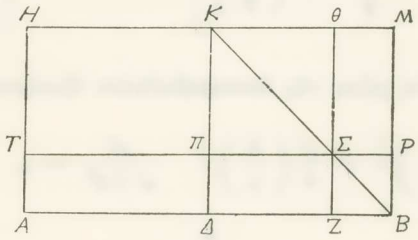
$$= \frac{\rho\alpha\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\rho\alpha\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Αἱ $AB > B\Gamma$ εἶναι μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ὀρθογώνιον αὐτῶν $AB \times B\Gamma$ εἶναι μέσον καὶ $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$, AB μήκει ἀσύμμετροι (X. 32, δεύτερον μέρος).

Ἐπὶ τῆς AB γράφει ἡμικύκλιον (σχ. 3) καὶ παρὰ τὴν AB παραβάλλει ὡς ὀρθογώνιον τὸ $\frac{B\Gamma^2}{4}$, ὥστε νὰ ἐλλείπῃ τετράγωνον σχῆμα. Τοῦτο σημαίνει τὴν εὕρεσιν τῶν πραγματικῶν καὶ ἀνίσων ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $X^2 - ABX + \frac{B\Gamma^2}{4} = 0$.

Ἡ ὕπαρξις τῶν ριζῶν τούτων εἶναι ἐξησφαλισμένη ἐκ τῶν 27 καὶ 28 τοῦ VI τῶν Στοιχείων. Αἱ ρίζαι αὗται εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ παραβαλλομένου ὀρθογωνίου αἱ AZ, ZB (X. 16 λῆμμα). Αὗται εἶναι μήκει ἀσύμμετροι ἐπειδὴ $\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$, AB εἶναι μήκει ἀσύμμετροι. (X. 18). [Ἡ εὕρεσις τῶν AZ, ZB γίνεται ὡς ἑξῆς· ἐκ τοῦ μέ-

σου Δ τῆς ΑΒ (σχ. 4) ὑψοῦμεν κάθετον τὴν $\Delta K = \frac{AB}{2}$ καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΜΗ φέροντες καὶ τὴν διαγώνιον ΚΒ.



(Σχ. 4)

Τὴν διαφορὰν $\frac{AB^2}{4} - \frac{B\Gamma^2}{4}$ μετασχηματιζόμενον εἰς τετράγωνον πλευρᾶς $\frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - BA^2} = K\Pi$, καὶ τὸ τετράγωνον ΚΠΣΘ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ΚΔΒΜ. Ὁ ἀπομένων γνώμων $\Pi\Delta BM\Theta\Sigma = AZ \times Z\Sigma = AZ \times ZB = \frac{B\Gamma^2}{4}$ καὶ ἐλλείπει τὸ τετράγωνον σχῆμα ΖΒΡΣ διὰ νὰ εἶναι πλῆρες τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΡΤ][1].

Αἱ ΑΖ, ΖΒ (σχ. 3) ἐκφραζόμεναι συναρτήσει τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι

$$AZ = \frac{AB}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$$

$$ZB = \frac{AB}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - B\Gamma^2}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς ΑΒ, ΒΓ διὰ τῶν τιμῶν των θὰ ἔχωμεν

$$AZ = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}\right] = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\kappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\kappa\xi - \sigma\tau}{2} - 1\right)^2}}}\right]$$

1. Μερικὴ περίπτωσις τοῦ 28 τοῦ VI τῶν στοιχείων περὶ ἧς ἡμετέρα ἀνακοίνωσις ἐν τῇ Ἀκαδημίᾳ Ἀθηνῶν γενομένη διὰ τοῦ ἀκαδημαϊκοῦ κ. Μιχαὴλ Στεφανίδου κατὰ τὴν συνεδρίαν αὐτῆς τῆς 10-12-1953. Ἰδὲ καὶ *Ε. Σταμάτη* «Εὐκλείδου Γεωμετρία—Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχ. τόμ. II σ. 300. Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Σχολικῶν Βιβλίων, 1953, Ἀθῆναι.

$$ZB = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}\right] = \frac{\varrho}{2}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\kappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\kappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}\right]$$

δηλαδὴ τὰς ἀσυμμέτρους ρίζας τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$X^2 - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{\varrho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = 0.$$

ἢ

$$X^2 - \varrho\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} + \frac{\varrho^2}{4}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\kappa\xi\sigma\tau}{\kappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\kappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2} = 0.$$

Ἐκ τοῦ Z (σχ. 3) ὑψοῖ τὴν κάθετον ZΔ καὶ φέρει τὰς AΔ, ΔB. Τὸ θεώρημα ἀποδεικνύει ὅτι αἱ AΔ, ΔB εἶναι αἱ ζητούμεναι κάθετοι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουσαι τὰς αἰτουμένας ἰδιότητας. Αἱ $A\Delta = \sqrt{AB \cdot AZ}$, $\Delta B = \sqrt{AB \cdot ZB}$ ἐκφραζόμεναι συναρτήσει τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τῶν AB, AZ, ZB θὰ εἶναι

$$A\Delta = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}} = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\kappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\kappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}}$$

$$\Delta B = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}}} = \frac{\varrho}{\sqrt{2}}\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\kappa\xi\sigma\tau}{\left(\frac{\kappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2}}}}$$

ἤτοι αἱ θετικαὶ ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως

$$X^4 - \varrho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho^4}{4} \cdot \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} = 0, \quad \text{ἢ}$$

$$X^4 - \varrho^2\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho^4}{4} \cdot \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\kappa\xi\sigma\tau}{\kappa\xi\sigma\tau+\left(\frac{\kappa\xi\text{-}\sigma\tau}{2}-1\right)^2} = 0.$$

Ἡ ἀσυμμετρία τῶν τετραγώνων τῶν θετικῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως ταύτης καὶ ἡ ἀσυμμετρία τοῦ γινομένου τῶν ριζῶν τούτων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετρα-

γώνων τῶν ριζῶν ἐκφράζονται διὰ πράξεων ἐπὶ ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐν ᾧ ἡ ἀπόδειξις γίνεται γεωμετρικῶς.

ZUSAMMENFASSUNG

Auf Grund der Interpretation einiger Stellen aus Platon und Aristoteles, so wie der genaueren Interpetation des 35. Satzes des X. Buches der Elemente Euklids, teilte E. Stamatis mit, dass die Alten Griechen nicht nur die Irrationalgrössen, sondern auch die Irrationalzahlen kannten.