ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 11ΗΣ ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 1969

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ ΜΕΛΟΥΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.— **Sur un cas spécial de déformation des surfaces reglées gauches,** *par Othon Pylarinos.* *

Une surface reglée gauche d'un espace euclidien à trois dimensions admet toujours un ensemble infini de surfaces reglées gauches dont chacune peut être représentée sur elle de manière que les génératrices (rectilignes) des deux surfaces ainsi que leurs lignes de striction se correspondent, les deux surfaces ayant en outre des normales coïncidentes en chaque couple de points homologues de leurs lignes de striction (**6**, p. 45 ; **5**, p. 158); dans cette représentation la distance des points homologues des lignes de striction des deux surfaces est constante et il en est de même de l'angle des sens choisis comme positifs sur les directions de leurs génératrices homologues. Cet ensemble, lorsque la surface reglée gauche est choisie au hasard, ne contient pas en général de surfaces pour lesquelles la représentation indiquée soit isométrique et, autant que je sache, les surfaces reglées gauches qui admettent de telles surfaces ne sont pas jusqu' ici étudiées.

La représentation isométrique des deux surfaces reglées gauches applicables l'une sur l'autre, qui fait correspondre leurs génératrices est appelée par E. KRUPPA *déformation de Minding* (**4**, p. 341). Cette représentation fait correspondre nécessairement les lignes de striction

* Ο. ΠΥΛΑΡΙΝΟΥ, **Περὶ μιᾶς εἰδικῆς περιπτώσεως ἰσομετρικῆς ἀπεικονίσεως εὐθειογενοῦς μὴ ἀναπτυκτῆς ἐπιφανείας ἐπὶ ἄλλης ἐπίσης εὐθειογενοῦς ἐπιφανείας.**

des deux surfaces (**1**, p. 199) et, dans ce qui suit, le cas spécial de la représentation de cette espèce, dans lequel les normales aux surfaces en chaque couple de points homologues de leurs lignes de striction coincident, est appelé, pour abréger, *déformation (n) de Minding.*

Dans la présente étude, dont l'objet est la recherche des surfaces reglées gauches réelles qui jouissent de la propriété indiquée, nous montrons d'abord que deux surfaces reglées gauches réelles applicables l'une sur l'autre, lorsque la représentation isométrique de l'une sur l'autre est une déformation (n) de Minding, dans laquelle leurs génératrices homologues ne sont pas parallèles, sont des surfaces à courbure conique constante ou — ce qui revient au même — des surfaces dont les génératrices sont respectivement parallèles aux tangentes à deux hélices cylindriques, dont en outre les normales communes le long de leurs lignes de striction sont les normales principales d'une courbe; tandis que en cas que les génératrices homologues des deux surfaces soient parallèles, elles sont nécessairement parallèles aux tangentes soit à une courbe plane soit à une courbe gauche à courbure totale constante. Dans ce dernier cas les lignes de striction des deux surfaces sont des lignes de courbure et la surface engendrée par les droites qui joignent les points homologues de ces courbes, est une surface conique par rapport au sommet de laquelle les deux surfaces sont symétriques. Nous donnons en outre des théorèmes qui établissent des conditions suffisantes afin qu' une surface reglée gauche réelle admette une autre applicable sur elle, la représentation isométrique des deux surfaces l'une sur l'autre étant une déformation (n) de Minding. Enfin nous montrons qu' à une hélice cylindrique ou à une courbe plane réelle et dépourvue de points singuliers on peut faire associer ∞^1 surfaces reglées gauches réelles, définies à un déplacement parallèle près, dont chacune admet une autre applicable sur elle, la représentation isométrique des deux surfaces l'une sur l'autre étant une déformation (n) de Minding; tandis qu'à une courbe gauche réelle à courbure totale constante, dépourvue de points singuliers, on ne peut faire associer qu'une seule surface reglée gauche réelle, définie à un déplacement parallèle près, admetant une autre applicable sur elle, la représentation isométrique des deux surfaces l'une sur l'autre étant une déformation de Minding de l'espèce indiquée.

1. Soit R une portion d' une surface reglée gauche réelle d' un

espace euclidien à trois dimensions, à paramètre de distribution $\neq 0$ sur toutes les génératrices, définie par rapport au système de coordonnées choisi dans l'espace par l'équation vectorielle

$$\bar{r} = \bar{\varrho}(u) + v\,\bar{e}(u), \tag{1,1}$$

où $\bar{e}(u)$ est le vecteur - unité qui détermine le sens positif sur la direction des génératrices de R, le paramètre u étant l'arc de la courbe directrice C de R, définie par l'équation (vectorielle)

$$\bar{\varrho} = \bar{\varrho}(u), \tag{1,2}$$

qui, par hypothèse, est *la ligne de striction* de cette surface.

Le produit mixte $(\dot{\bar{\varrho}} \wedge \bar{e}) \times \dot{\bar{e}}$,* d'après la supposition faite pour le paramètre de distribution de R, est $\neq 0$ pour toutes les valeurs de u qui correspondent aux points de la courbe C. Par conséquent il en est de même des deux vecteurs $\dot{\bar{\varrho}} \wedge \bar{e}$, $\dot{\bar{e}}$, dont le premier au point courant K(u) de C est parallèle à la normale à R en K et il détermine, par définition, le sens positif sur la direction de cette droite; par ailleurs la dérivée $\dot{\bar{e}}$ pour la valeur de u qui correspond à K, est parallèle aussi, comme on sait (**7**, p. 138), à la normale à R en ce même point, puisque K est *le point central* de la génératrice issue de ce point.

On peut donc écrire :

$$\dot{\bar{e}} = \varkappa\,\bar{n}, \tag{1,3}$$

où

$$\bar{n} = \frac{\dot{\bar{\varrho}} \wedge \bar{e}}{|\dot{\bar{\varrho}} \wedge \bar{e}|} \tag{1,4}$$

est le vecteur - unité qui détermine le sens positif sur la direction de la normale à R au point courant K de C,

$$\varkappa = \varepsilon\,|\dot{\bar{e}}| \tag{1,5}$$

* Les points désignent les dérivées par rapport à u. Les opérations de dérivation et d'intégration qui seront faites dans cet article sont par hypothèse légitimes dans les intervalles considérés.

et $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que $(\dot{\overline{\varrho}} \wedge \overline{e}) \times \dot{\overline{e}} >$ ou < 0 pour la valeur de u qui correspond à K.

Cela posé le produit vectoriel

$$\overline{z} = \overline{e} \wedge \overline{n} \tag{1, 6}$$

au point K(u) de C est un vecteur-unité parallèle à la tangente à R en K perpendiculaire à la génératrice issue de ce point. Cette tangente, appelée *tangente centrale de R en K* (**6**, p. 32), la génératrice issue de K et la normale à R en ce même point, lorsque les sens positifs sur les directions de ces droites sont déterminés respectivement par les vecteurs $\overline{z}$, $\overline{e}$, $\overline{n}$ forment un trièdre trirectangle orienté $[K;\ \overline{e}\ \overline{n}\ \overline{z}]$: *le trièdre central associé à la surface* sur sa génératrice issue de K (**6**, p. 32).

Les formules pour les dérivées des vecteurs $\overline{e}, \overline{n}, \overline{z}$ par rapport à l'arc u de la ligne de striction de R sont pareilles aux formules pour les dérivées des vecteurs-unités qui déterminent les sens positifs sur les directions des axes du trièdre de Frenet associé à une courbe par rapport à l'arc de la courbe. En effet on a pour la dérivée de $\overline{e}$ la formule (1, 3) et pour les dérivées des $\overline{n}$, $\overline{z}$ les formules (**5**, p. 145) :

$$\dot{\overline{n}} = -\varkappa\,\overline{e} + \sigma\,\overline{z}, \qquad \dot{\overline{z}} = -\sigma\,\overline{n} \tag{1, 7}$$

où

$$\sigma = \frac{(\overline{e} \wedge \dot{\overline{e}}) \times \ddot{\overline{e}}}{\dot{\overline{e}}^{2}} \tag{1, 8}$$

et $\varkappa$ est le coefficient qui figure dans la formule (1, 3); la valeur de $\varkappa$ en chaque point de C et, par conséquent, sur chaque génératrice de R, d'après la supposition faite pour le paramètre de distribution de R, est $\neq 0$ et le rapport

$$\frac{\sigma}{\varkappa} = \frac{(\overline{e} \wedge \dot{\overline{e}}) \wedge \ddot{\overline{e}}}{\varkappa^{3}} \equiv \varkappa_{1} \tag{1, 9}$$

au point courant K de C est, comme on sait (**3**, p. 63), égal à la *courbure conique de R sur sa génératrice issue de* K (**2**, p. 257).

Par ailleurs la dérivée

$$\dot{\overline{\varrho}} \equiv \overline{t}(u)$$

au point K(u) de C est un vecteur-unité, puisque u est l'arc de C, qui, étant parallèle à la tangente à C en K, détermine, par définition, le sens positif sur la direction de cette droite. Ce vecteur est, par conséquent, parallèle au plan tangent à R en K.

On aura donc, en désignant par φ l'angle orienté:

$$\widehat{(\bar{e}, \bar{t})} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

la relation

$$\bar{t} \equiv \dot{\bar{\varrho}} = \bar{e} \cos\varphi + \bar{z} \sin\varphi \, ; \tag{1, 10}$$

ce qui permet d'écrire l'équation (1, 1) de R sous la forme

$$\bar{r} = \int (\bar{e} \cos\varphi + \bar{z} \sin\varphi) \, du + v \, \bar{e}(u). \tag{1, 11}$$

Les trois grandeurs $\varkappa$, σ, φ sont des fonctions de la variable u définies pour toutes les valeurs de u, qui correspondent aux points de la courbe C et, par conséquent, aux génératrices de R et leurs valeurs sur chaque génératrice sont appelées par E. KRUPPA *courbure, torsion et striction de la surface sur cette génératrice* respectivement (**3**, p. 63). Ces trois fonctions peuvent être considérées comme *les invariants fondamentaux de la surface par rapport à ses déplacements dans l'espace,* car une surface reglée est définie à un déplacement près, lorsque les expressions de sa courbure, de sa torsion et de sa striction sur ses génératrices en fonction de l'arc de sa ligne de striction sont connues (**6**, p. 34).

Par ailleurs la valeur absolue de la première de ces fonctions et la seconde sont respectivement égales à la courbure et à la torsion d'une courbe rapportée au paramètre u, dont les tangentes sont parallèles aux génératrices de la surface.

En effet, si l'on considère la courbe C* définie à un déplacement parallèle près par l'équation

$$\bar{\varrho}^* = \int \bar{e}(u) \, du, \tag{1, 12}$$

on reconnaît aussitôt, en tenant compte que l'on a

$$\dot{\bar{\varrho}}^{*2} = \bar{e}^2 = 1, \tag{1, 13}$$

que la correspondance entre cette courbe et la ligne de striction C de R, dans laquelle aux points homologues des deux courbes correspond la même valeur de u est une correspondance avec égalité des arcs homologues. Dans cette correspondance les axes du trièdre de Frenet associé à la courbe C* en son point K* homologue du point courant K de C, sont respectivement parallèles aux axes du trièdre central associé à R sur sa génératrice issue de K. On aura donc, en désignant par $\varkappa^*$, σ^* la courbure et la torsion de la courbe C* en K* et en tenant compte des (1,3), (1,1) et (1,13).

$$(1,14) \qquad \varkappa^* = \frac{|\dot{\bar{\varrho}}^* \wedge \ddot{\bar{\varrho}}^*|}{|\dot{\bar{\varrho}}^*|^3} = |\dot{\bar{e}}| = \varepsilon\varkappa, \quad \sigma^* = \frac{(\dot{\bar{\varrho}}^* \wedge \ddot{\bar{\varrho}}^*) \times \dddot{\bar{\varrho}}^*}{(\dot{\bar{\varrho}}^* \wedge \ddot{\bar{\varrho}}^*)^2} = \sigma,$$

où $\varkappa$, σ sont la courbure et la torsion de R sur sa génératrice issue du point K et $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que $\varkappa$ est $>$ ou < 0.

La surface développable qui admet la courbe C* comme arête de rebroussement et dont les génératrices sont parallèles aux génératrices de R est appelée par G. SANNIA *orientrice développable de la surface* R (**6**, p. 37).

2. Soit maintenant R_1 une seconde surface reglée gauche réelle définie par l'équation

$$(2,1) \qquad \bar{r}_1 = \bar{\varrho}_1(u_1) + v_1\,\bar{e}_1(u_1),$$

où $\bar{e}_1(u_1)$ est le vecteur-unité qui détermine le sens positif sur la direction des génératrices de cette surface, le paramètre u_1 étant l'arc de sa ligne de striction C_1 définie par l'équation

$$\bar{\varrho}_1 = \bar{\varrho}_1(u_1).$$

Une représentation de la surface R_1 sur la surface R définie par l'équation (1, 11), qui fait correspondre leurs génératrices ainsi que leurs lignes de striction, peut être établie par deux relations entre u_1, v_1 et u, v, qui sont nécessairement de la forme

$$(2,2) \qquad u_1 = u_1(u), \quad v_1 = v_1(v);$$

pour que dans cette représentation les normales aux surfaces en chaque couple de points homologues de leurs lignes de striction coïncident, il faut et il suffit, comme on sait (**6**, p. 45), que les vecteurs $\bar{\varrho}_1(u_1)$, $\bar{e}_1(u_1)$

qui figurent dans l'équation (2, 1), deviennent, à l'aide de la première relation (2,2), des fonctions de la variable u de la forme

$$\bar{\varrho}_1 = \bar{\varrho}(u) + \beta \bar{n}(u) = \int (\bar{e} \cos \varphi + \bar{z} \sin \varphi)\, du + \beta \bar{n}(u) \tag{2,3}$$

et

$$\bar{e}_1 = \bar{e} \cos \omega + \bar{z} \sin \omega, \tag{2,4}$$

dans lesquelles le coefficient β et l'angle ω sont des constantes:

$$\beta = \text{Cte}, \quad \omega = \text{Cte} \ (-\pi < \omega \leqslant \pi), \tag{2,5}$$

la fonction $v_1(v)$ de la seconde relation (2, 2) étant arbitraire.

Donc *si la surface R_1 rapportée aux paramètres u, v est définie par une équation de la forme*

$$\bar{r}_1 = \int (\bar{e} \cos \varphi + \bar{z} \sin \varphi)\, du + \beta \bar{n} + v\, (\bar{e} \cos \omega + \bar{z} \sin \omega), \tag{2,6}$$

où β, ω $(-\pi < \omega \leqslant \pi)$ *sont des constantes dont la première est* $\neq 0$ *si* $\omega = 0$ ou π, *les surfaces R, R_1 sont distinctes et la représentation de ces surfaces l'une sur l'autre, dans laquelle en leurs points homologues correspondent les mêmes valeurs des u, v, fait correspondre leurs génératrices ainsi que leurs lignes de striction de manière que les normales aux surfaces en chaque couple de points homologues de ces courbes coïncident.*

Il en résulte, compte tenu que R est une surface reglée gauche choisie au hasard, que toute surface reglée gauche admet un ensemble de ∞^2 surfaces reglées gauches dont chacune peut être representée sur elle de la manière indiquée.

Il est à noter que l'on peut toujours choisir le sens positif sur la direction des génératrices d'une surface R_1 appartenant à l'ensemble de surfaces (2, 6), de manière que les sens positifs sur la direction de la normale commune des surfaces R, R_1 en chaque couple de points homologues de leurs lignes de striction coïncident, la génératrice de R_1 homologue de la génératrice courante de R étant invariablement liée, d'après (2, 5), avec le trièdre central de R sur cette génératrice. On aura ainsi, en désignant par $\bar{n}_1$, $\bar{z}_1$ les vecteurs-unités qui déterminent les sens positifs sur les directions de la normale à R_1 au point central de sa génératrice homologue de la génératrice courante de R et de la tangente centrale de R_1 en ce même point et en tenant compte de (2, 4),

$$\bar{n}_1 = \bar{n}, \quad \bar{z}_1 = -\bar{e} \sin \omega + \bar{z} \cos \omega. \tag{2,7}$$

3. Si la représentation isométrique d'une surface R_1 applicable sur la surface R définie par l'équation (1, 11), est une déformation (n) de Minding, l'équation de cette surface rapportée aux paramètres u, v, comme il résulte de ce qui est exposé dans le paragraphe précédent, sera nécessairement de la forme (2, 6), puisque dans cette représentation, qui fait correspondre les génératrices et les lignes de striction de ces surfaces, les normales aux surfaces en chaque couple de points homologues de leurs lignes de striction coïncident.

Il s'ensuit que, pour que l'ensemble de surfaces reglées applicables sur la surface R contienne une dont la représentation isométrique sur R est une déformation (n) de Minding, il faut et il suffit qu'il y ait deux constantes β, ω $(-\pi < \omega \leqslant \pi)$ dont la première est $\neq 0$ si $\omega = 0$ ou π, telles que les coefficients des éléments linéaires de la surface R et de la surface R_1 de l'ensemble (2, 6), qui correspond à ces constantes, soient respectivement égaux où — ce qui revient au même (**4**, p. 342) — que les deux surfaces admettent sur leurs génératrices homologues des courbures et des strictions en valeur absolue égales, les arcs élémentaires homologues de leurs lignes de striction étant aussi égaux en valeur absolue.

Mais, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 1, si l'on désigne par $\varkappa_1$, σ_1, φ_1 la courbure, la torsion et la striction d'une surface R_1 de l'ensemble (2, 6) sur sa génératrice homologue de la génératrice courante de R et par du_1 l'arc élémentaire de sa ligne de striction C_1, on a

$$(3,1)\qquad \varkappa_1^2 = (\dot{\bar{e}}_1)^2 \left(\frac{du}{du_1}\right)^2, \quad \sigma_1^2 = (\dot{\bar{z}}_1)^2 \left(\frac{du}{du_1}\right)^2, \quad \cos^2\varphi_1 = (\bar{e}_1 \times \dot{\bar{\varrho}}_1)^2 \left(\frac{du}{du_1}\right)^2$$

et

$$(3,2)\qquad \left(\frac{du_1}{du}\right)^2 = \dot{\bar{\varrho}}_1^2 .$$

Par ailleurs la différentiation par rapport à u des relations (2, 3), (2, 4) et (2, 7), eu égard aux (1, 3), (1, 7) et (2, 5), donne

$$(3,3)\qquad \dot{\bar{\varrho}}_1 = \bar{e}\,(\cos\varphi - \beta\varkappa) + \bar{z}\,(\sin\varphi + \beta\sigma)$$

$$(3,4)\qquad \dot{\bar{e}}_1 = \bar{n}\,(\varkappa\cos\omega - \sigma\sin\omega), \quad \dot{\bar{z}}_1 = -\,\bar{n}\,(\varkappa\sin\omega + \sigma\cos\omega)$$

et les formules (3, 2) et (3, 1), grâce aux (2, 4), (3, 3) et (3, 4), deviennent

$$(3,5) \qquad \left(\frac{du_1}{du}\right)^2 = \dot{\varrho}_1^2 = (\cos\varphi - \beta\varkappa)^2 + (\sin\varphi + \beta\sigma)^2$$

$$(3,6) \qquad (\varkappa\cos\omega - \sigma\sin\omega)^2 = \varkappa_1^2\,[(\cos\varphi - \beta\varkappa)^2 + (\sin\varphi + \beta\sigma)^2],$$

$$(3,7) \qquad (\varkappa\sin\omega + \sigma\cos\omega)^2 = \sigma_1^2\,[(\cos\varphi - \beta\varkappa)^2 + (\sin\varphi + \beta\sigma)^2],$$

$$(3,6) \qquad [\cos\omega\,(\cos\varphi - \beta\varkappa) + \sin\omega\,(\sin\varphi + \beta\sigma)]^2 = \\ = \cos^2\varphi_1\,[(\cos\varphi - \beta\varkappa)^2 + (\sin\varphi + \beta\sigma)^2].$$

De ces relations on déduit aussitôt que, pour que les surfaces R, R_1 admettent sur leurs génératrices homologues des courbures et des strictions égales en valeur absolue, les arcs élémentaires homologues de leurs lignes de striction étant aussi égaux en valeur absolue, il faut et il suffit que les invariants $\varkappa$, σ, φ de R soient des fonctions de l'arc de sa ligne de striction vérifiant les relations

$$(3,9) \qquad \left\{\begin{array}{c} (\cos\varphi - \beta\varkappa)^2 + (\sin\varphi + \beta\sigma)^2 = 1 \\ (\varkappa\cos\omega - \sigma\sin\omega)^2 = \varkappa^2 \\ [\cos\omega\,(\cos\varphi - \beta\varkappa) + \sin\omega\,(\sin\varphi + \beta\sigma)]^2 = \cos^2\varphi, \end{array}\right.$$

où β, ω sont respectivement la distance constante des points homologues des lignes de striction des deux surfaces et l'angle constant des sens choisis comme positifs sur les directions de leurs génératrices homologues.

Les considérations précédentes permettent d'énoncer le

Théorème I. Afin que parmi les surfaces reglées applicables sur une surface reglée gauche réelle R il y en ait une dont la représentation isométrique sur R est une déformation (n) de Minding, il faut et il suffit que les invariants $\varkappa$, σ, φ de R soient des fonctions de l'arc de sa ligne de striction vérifiant trois relations de la forme (3, 9), le coefficient β et l'angle ω $(-\pi < \omega \leqslant \pi)$, qui y figurent étant des constantes dont la première est $\neq 0$ si $\omega = 0$ ou π.

On peut donc, grâce à ce théorème, procéder à la recherche des surfaces reglées gauches réelles qui jouissent de la propriété indiquée dans l'introduction, à l'aide du système des relations (3, 9). À cet effet, on peut distinguer deux cas suivant que l'angle constant ω, qui figure dans ces relations est $\neq$ ou $= 0$ ou π.

4. Supposons en premier lieu que les conditions (3, 9) soient vérifiées par les invariants $\varkappa$, σ, φ de la surface R définie par l'équation (1, 11) pour deux valeurs des constantes β, ω qui y figurent, dont celle de ω est $\neq 0$ ou π.

Alors les génératrices homologues de R et de la surface R_1 de l'ensemble (2, 6), qui correspond à ces valeurs des β, ω et qui est applicable sur R (la représentation isométrique des deux surfaces l'une sur l'autre étant une déformation (n) de Minding), ne sont pas parallèles et de la seconde relation (3, 9), compte tenu que, d'après l'hypothèse faite, on a

$$\cos^2 \omega \neq 1, \tag{4,1}$$

on déduit que l'on doit avoir

$$\frac{\sigma}{\varkappa} = \varkappa_1 = c \tag{4,2}$$

où $\varkappa_1$, d'après (1, 9), est la courbure conique de R et c est une constante ($\neq 0$) liée avec l'angle constant ω par la relation

$$(\cos \omega - c \sin \omega)^2 = 1. \tag{4,3}$$

On aura donc ou bien

$$\cos \omega = \frac{1 - c^2}{1 + c^2}, \quad \sin \omega = -\frac{2c}{1 + c^2} \tag{4,4}$$

ou

$$\cos \omega = -\frac{1 - c^2}{1 + c^2}, \quad \sin \omega = \frac{2c}{1 + c^2} \tag{4,5}$$

suivant que $\cos \omega - c \sin \omega = +1$ ou -1.

La relation (4, 2) exprime que R est nécessairement une surface reglée à courbure conique constante $\neq 0$, ou — ce qui revient au même, d'après (1, 14) — que l'arête de rebroussement de l'orientrice développable de R est une hélice cylindrique. En outre de cette même relation jointe aux (3, 5) et (3, 6) on déduit qu'il en est de même de la surface R_1.

Par ailleurs, dans le cas envisagé, le coefficient β qui figure dans la première et la troisième condition (3, 9), n'est pas nécessairement $\neq 0$, puisque les génératrices homologues des surfaces R, R_1 ne sont pas, par hypothèse, parallèles. On a donc à examiner deux cas suivant que β est $=$ ou $\neq 0$.

a. Soit

$$\beta = 0. \tag{4,6}$$

Dans ce cas les points homologues des lignes de striction des surfaces R, R_1 coïncident et, par conséquent, on a

$$\frac{du_1}{du} = 1. \tag{4,7}$$

Cela étant la troisième condition (3, 9), grâce à (4, 6), affecte la forme

$$\cos\varphi\,(\cos\omega - 1) + \sin\varphi \sin\omega = 0, \tag{4,8}$$

tandis que la première, en vertu de (4, 6) est identiquement vérifiée.

De la relation (4, 8) on déduit, si l'on y remplace $\cos\omega$, $\sin\omega$ par leurs valeurs (4, 4) ou (4, 5), que la striction φ de R doit vérifier ou bien la relation

$$c \,.\, \cos\varphi + \sin\varphi = 0 \tag{4,9}$$

ou la relation

$$\cos\varphi - c \,.\, \sin\varphi = 0 \tag{4,10}$$

suivant que $\cos\omega - c \,.\, \sin\omega = +1$ ou -1.

Il en résulte que *R et, par conséquent, R_1 sont nécessairement des surfaces gauches à striction constante* ($< \frac{\pi}{2}$ *en valeur absolue*), ou — ce qui revient au même — que *la ligne de striction commune C des deux surfaces est une trajectoire isogonale — non orthogonale — de leurs génératrices.* Donc C, d'après un théorème connu (**7**, p. 143), est une géodésique des deux surfaces et, par conséquent, *leurs normales communes le long de C sont les normales principales de cette courbe.*

En outre les deux relations (4, 9) et (4, 10), à l' une desquelles doit satisfaire la striction constante φ de R jointes respectivement aux (4, 4) et (4, 5) montrent que *la tangente à C en chaque point de cette courbe est la bissectrice de l'angle des sens choisis comme positifs sur les directions des génératrices des surfaces R, R_1 issues de ce point.*

Par ailleurs, des deux relations (4, 9) et (4, 10), si l'on tient compte de (4, 2) et du fait que, d'après des formules connues (**3**, p. 73), la courbure normale $\varkappa_n$ et la torsion géodésique σ_g de la courbe C tracée sur la surface R, sont liées avec les invariants $\varkappa$, σ, φ de cette surface par les relations

$$\varkappa_n = \varkappa\cos\varphi - \sigma\sin\varphi, \qquad \sigma_g = \varkappa\sin\varphi + \sigma\cos\varphi, \tag{4,11}$$

on déduit que l'on doit avoir $\sigma_g = 0$ ou $\varkappa_n = 0$ suivant que la striction φ de R vérifie la première ou la seconde de ces relations.

Donc la ligne de striction C de R, qui est une géodésique de cette surface, doit être en même temps une ligne de courbure et, par conséquent, une courbe plane, ou une ligne asymptotique et, par conséquent une droite, suivant que φ vérifie la première ou la seconde des relations (4, 9) et (4, 10).

D'autre part, si R est une surface gauche à courbure conique constante $c \neq 0$ et que sa ligne de striction C soit une ligne de courbure ou une ligne asymptotique, la striction φ de R, d'après (4, 11) doit vérifier respectivement la relation (4, 9) ou (4, 10); ce qui prouve que, dans ce cas, R est nécessairement une surface gauche à striction constante: $\alpha\left(0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2}\right)$ liée avec c par la relation

$$c \, . \cos\alpha + \sin\alpha = 0 \tag{4, 12}$$

ou par la relation

$$\cos\alpha - c \, . \sin\alpha = 0 \tag{4, 13}$$

respectivement. Donc C est une géodésique de R et, par conséquent, une courbe plane dans le premier cas et dans le second cas une droite. En outre les conditions (3, 9) sont vérifiées par les invariants $\varkappa$, σ, φ de R comme on le reconnaît facilement en tenant compte que la striction $\varphi = \alpha$ de R est liée avec c par la relation (4, 12) ou (4, 13) respectivement, si l'on y pose $\beta = 0$ et que l'on remplace $\cos\omega$, $\sin\omega$ par les fonctions (4, 4) ou (4, 5) de la courbure conique constante c de la surface.

On peut donc en ayant égard au théorème I, énoncer le

Théorème II. *Afin que l'ensemble de surfaces reglées applicables sur une surfaee reglée gauche réelle R contienne une surface dont la représentation isométrique sur R est une déformation (n) de Minding, dans laquelle les points homologues de leurs lignes de striction coïncident, il faut et il suffit que R soit une surface gauche à courbure conique constante $\neq 0$, dont la ligne de striction est une droite ou une ligne de courbure.*

b. Soit

$$\beta \neq 0. \tag{4, 14}$$

Dans ce cas la première condition (3, 9), si l'on y porte la valeur (4, 2) de σ affecte la forme

$$(4,15) \qquad \frac{\beta(1+c^2)}{2}\varkappa = \cos\varphi - c \, . \sin\varphi .$$

Cette relation, si l'on pose

$$(4,16) \qquad \cos\varphi = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \quad -\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$$

et que l'on tienne compte de (4, 2), peut s'écrire

$$(4,17) \qquad \varkappa \sin\alpha + \sigma \, . \cos\alpha = \frac{2\sin(\alpha-\varphi)}{\beta}$$

et sous cette forme elle exprime que *les normales à la surface le long de sa ligne de striction C sont les normales principales d'une courbe* (**5**, p. 161).

La troisième condition (3, 9), si l'on y substitue σ par sa valeur (4, 2) et que l'on tienne compte de la relation (4, 3) à laquelle, grâce à (4, 2), se ramène la seconde condition (3, 9), devient

$$(4,18) \qquad (\cos\omega \, . \cos\varphi + \sin\omega \, . \sin\varphi - \varepsilon\beta\varkappa)^2 = \cos^2\varphi,$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que $\cos\omega - c \, . \sin\omega = +1$ ou -1.

On aura donc, en remplaçant dans (4, 18) $\varkappa$ par sa valeur tirée de (4, 15),

$$\left(\cos\omega \, . \cos\varphi + \sin\omega \, . \sin\varphi - 2\varepsilon\frac{\cos\varphi - c \, . \sin\varphi}{1+c^2}\right)^2 = \cos^2\varphi \, .$$

Cette relation est identiquement vérifiée, comme on le voit facilement en y remplaçant $\cos\omega$, $\sin\omega$ par les fonctions (4, 4) ou (4, 5) de c et ε par $+1$ ou -1 suivant que $\cos\omega - c\sin\omega = +1$ ou -1. Donc les conditions (3, 9), dans le cas envisagé, sont équivalentes aux (4, 2), (4, 3) et (4, 15), dont la première exprime que R doit être une surface gauche à courbure conique constante $\neq 0$ et la troisième ramenée, à l'aide de la première, sous la forme (4, 17), exprime que les normales à R le long de sa ligne de striction C sont les normales principales d'une courbe gauche.

Par ailleurs, d'après (2, 4), (2, 7), (3, 3) et (3, 9), on a

$$(4,19) \qquad \dot{\bar\varrho}_1 = \bar e(\cos\varphi - \beta\varkappa) + \bar z(\sin\varphi + \beta\sigma) = \bar e\cos(\omega + \varphi_1) + \bar z\sin(\omega+\varphi_1),$$

où φ_1 est la striction de la surface R_1 sur sa génératrice homologue de la génératrice courante de R.

Or en égalant les coefficients de $\bar{e}$ et de $\bar{z}$ dans les deux membres de (4, 18) il vient

$$\cos(\omega+\varphi_1)+\beta\varkappa=\cos\varphi, \quad \sin(\omega+\varphi_1)-\beta\sigma=\sin\varphi$$

et l'élimination des $\varkappa$, σ entre ces deux relations et la relation (4, 2) donne

$$(4,20) \qquad \sin(\omega+\varphi_1)+c\,.\cos(\omega+\varphi_1)=\sin\varphi+c\,.\cos\varphi$$

où $\varphi_1=+\varphi$ ou $-\varphi$ suivant que les strictions des surfaces R, R_1 sur leurs génératrices homologues sont égales ou opposées.

On aura donc, d'après (4, 20),

$$(4,21) \qquad \cos\varphi(\sin\omega+c\,.\cos\omega-c)+\sin\varphi(\cos\omega-c\,.\sin\omega-1)=0$$

ou

$$(4,22) \qquad \cos\varphi(\sin\omega+c\cos\omega-c)+\sin\varphi(-\cos\omega+c\,.\sin\omega-1)=0$$

suivant que $\varphi_1=+\varphi$ ou $-\varphi$.

Les coefficients des $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ dans les relations (4, 21), (4, 22), eu égard au fait que, d'après (4, 3), $\cos\omega$, $\sin\omega$ sont nécessairement les fonctions (4, 4) ou (4, 5) de la courbure conique constante c de R sont des fonctions de c, qui ne s'annulent simultanement que dans la seconde de ces relations pour les valeurs (4, 5) des $\cos\omega$, $\sin\omega$; ce qui prouve que les surfaces R, R_1 n'admettent des strictions égales, sur leurs génératrices homologues que dans le cas où elles sont des surfaces à striction constante.

Les considérations précédentes permettent d'énoncer le

Théorème III. Si la représentation isométrique des deux surfaces reglées gauches réelles applicables l'une sur l'autre est une déformation (n) de Minding dans laquelle les points homologues de leurs lignes de striction sont distincts et leurs génératrices homologues ne sont pas parallèles, les deux surfaces sont nécessairement des surfaces gauches à courbure conique constante, dont les normales communes le long de leurs lignes de striction sont les normales principales d'une courbe gauche. Les strictions des deux surfaces sont en général opposées ; elles ne sont égales que dans le cas où elles sont constantes :

D' après ce théorème, en cas que l'ensemble de surfaces reglées applicables sur une surface reglée gauche réelle R contienne une surface dont la représentation isométrique sur elle est une déformation (n) de Minding de l'espèce indiquée dans ce même théorème, les invariants $\varkappa$, σ, φ de R vérifient deux relations de la forme (4, 2) et (4, 17) dont la seconde, grâce à la première, prend la forme (4, 15); ils vérifient donc deux relations de la forme

$$(4,23) \qquad \sigma = c\varkappa\,, \qquad \varkappa = A\cos\varphi + B\sin\varphi\,,$$

les coefficients c, A, B qui y figurent, étant des constantes $\neq 0$ liées par la relation

$$(4,24) \qquad B + cA = 0.$$

D'autre part, si les invariants d'une surface reglée gauche réelle R vérifient deux relations de la forme (4, 23), les coefficients qui y figurent étant des constantes $\neq 0$, liées par la relation (4, 24), ces invariants vérifient aussi, comme on le constate facilement, les conditions (3, 9), si l'on y remplace c par la constante qui figure dans la première relation (4, 23), β par la constante $\dfrac{2}{A(1+c^2)} \neq 0$ et $\cos\omega$, $\sin\omega$ par les fonctions (4, 4) ou (4, 5) de c.

On peut donc, en ayant égard au théorème I, énoncer le

Théorème IV. Une surface reglée gauche réelle dont les invariants $\varkappa$, σ, φ sont des fonctions de l'arc de sa ligne de striction vérifiant deux relations de la forme (4, 23), les coefficients c, A, B qui y figurent, étant des constantes $\neq 0$, liées par la relation (4, 24), admet toujours une autre applicable sur elle, la représentation isométrique des deux surfaces l'une sur l'autre étant une déformation (n) de Minding, dans laquelle les points homologues de leurs lignes de striction sont distincts et leurs génératrices homologues ne sont pas parallèles.

5. Supposons en second lieu que les conditions (3, 9) soient vérifiées par les invariants $\varkappa$, σ, φ de la surface considérée R pour deux valeurs des constantes β, ω qui y figurent, dont celle de la seconde est 0 ou π, tandis que celle de la première est $\neq 0$.

Dans ce cas la seconde condition (3, 9) est identiquement vérifiée, les génératrices homologues de R et de la surface R_1 de l'ensemble (2, 6), qui correspond à ces valeurs des β, ω étant parallèles, tandis que de la première et de la troisième condition (3, 9) on déduit que l'on doit avoir

$$(5,1) \qquad 2\cos\varphi = \beta\varkappa\,, \qquad 2\sigma\,.\,\sin\varphi = -\beta\sigma^2.$$

Par ailleurs, d'après (2, 4), (2, 7) et (3, 3), on a

$$(5,2) \qquad \dot{\varrho}_1 = \overline{e}(\cos\varphi - \beta\varkappa) + \overline{z}(\sin\varphi + \beta\sigma) = \varepsilon(\overline{e}\cos\varphi_1 + \overline{z}\sin\varphi_1),$$

où φ_1 est la striction de la surface R_1 sur sa génératrice homologue de la génératrice courante de R et $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que $\omega = 0$ ou π.

On aura donc

$$(5,3) \qquad \cos\varphi - \beta\varkappa = \varepsilon \cos\varphi_1, \quad \sin\varphi + \beta\sigma = \varepsilon \sin\varphi_1,$$

où $\varphi_1 = +\varphi$ ou $-\varphi$ suivant que les strictions des surfaces R, R_1 sur leurs génératrices homologues sont égales ou opposées.

De la première relation (5, 3) qui, si l'on y substitue φ_1 par $\pm\varphi$, n'est vérifiée que si $\varepsilon = -1$, puisque, par hypothèse, β est $\neq 0$, on déduit que l'on doit avoir

$$(5,4) \qquad \varepsilon = -1, \qquad \omega = \pi.$$

Cela étant, pour que la seconde relation (5, 3) soit vérifiée, il faut que l'on ait ou bien $\sigma = 0$, $\varphi_1 = -\varphi$, ou, si $\sigma \neq 0$, $\varphi_1 = \varphi$.

Il s'ensuit que, dans le cas envisagé, les invariants $\varkappa, \sigma, \varphi$ de R doivent vérifier ou bien les relations

$$(5,5) \qquad \sigma = 0, \qquad 2\cos\varphi = \beta\varkappa,$$

ou, si $\sigma \neq 0$, les relations

$$(5,6) \qquad 2\cos\varphi = \beta\varkappa, \qquad 2\sin\varphi = -\beta\sigma.$$

Donc R doit être ou bien une surface gauche à courbure conique constante $= 0$ et, dans ce cas, l'arête de rebroussement de son orientrice développable est une courbe plane, ou une surface à courbure conique $\neq 0$, dont les invariants $\varkappa, \sigma$ sont liés par la relation

$$(5,7) \qquad \beta^2(\varkappa^2 + \sigma^2) = 4$$

et dont, par conséquent, l'orientrice développable admet comme arête de rebroussement une courbe gauche à courbure totale constante.

Dans ce dernier cas, de la seconde formule (4, 11), si l'on y substitue $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ par leurs valeurs tirées des (5, 6), on déduit que l'on a

$$\sigma_g = \varkappa \sin\varphi + \sigma \cos\varphi = 0$$

où σ_g est la torsion géodésique de la ligne de striction de R.

Donc la ligne de striction de R est une ligne de courbure de cette surface et il en est de même — comme on le reconnaît facilement — de la ligne de striction de la surface R_1.

Par ailleurs, dans ce cas, les relations (5, 2) et (2, 4), grâce aux (5, 4) et au fait que l'on a $\varphi_1 = \varphi$, affectent la forme

$$\dot{\bar{\varrho}}_1 = -\bar{e}\cos\varphi - \bar{z}\sin\varphi, \quad \bar{e}_1 = -\bar{e}.$$

Il s'ensuit que l'équation de la surface R_1, rapportée aux paramètres u, v, est nécessairement de la forme

$$\bar{r}_1 = -\bar{\varrho}(u) - v\bar{e}(u) + \bar{a}$$

où $\bar{a}$ est un vecteur indépendant des u, v ; ce qui montre que la représentation de R_1 sur R, dans laquelle aux points homologues des deux surfaces correspondent les mêmes valeurs des u, v et qui, d'après le théorème I, est une déformation (n) de Minding, est une symétrie par rapport à un centre. Par conséquent, la surface engendrée par les normales communes des deux surfaces le long de leurs lignes de striction, qui sont évidemment les droites qui joignent les points homologues de ces courbes, est une surface conique dont le sommet est nécessairement le centre de symétrie des deux surfaces.

On peut donc formuler le

Théorème V. Si la représentation isométrique des deux surfaces reglées gauches réelles applicables l'une sur l'autre est une déformation (n) de Minding, dans laquelle leurs génératrices homologues sont parallèles, les génératrices de ces surfaces sont nécessairement parallèles aux tangentes soit à une courbe plane soit à une courbe gauche à courbure totale constante, suivant que les strictions des deux surfaces sur leurs génératrices homologues sont opposées ou égales. Dans le dernier cas les lignes de striction des deux surfaces sont des lignes de courbure et la surface engendrée par leurs normales communes le long de ces courbes est une surface conique par rapport au sommet de laquelle les deux surfaces sont symétriques.

Il est à noter que, dans le cas envisagé, les invariants $\varkappa$, σ, φ de R sont liés par deux relations de la forme (5,5) ou (5,6), le coefficient β qui y figure étant une constante $\neq 0$.

D'autre part, si les invariants $\varkappa$, σ, φ d'une surface reglée gauche réelle R vérifient deux relations de la forme (5,5) ou (5,6), les conditions (3,9), grâce à ces relations, sont aussi vérifiées par $\varkappa$, σ, φ, si l'on y pose $\omega = \pi$ et que l'on remplace β par la constante qui figure dans ces relations.

On peut donc, en ayant égard au théorème I, énoncer le

Théorème VI. Une surface reglée gauche réelle dont les invariants $\varkappa$, σ, φ sont liés par deux relations de la forme (5, 5) ou (5, 6), le coefficient β qui y figure étant une constante $\neq 0$, admet toujours une autre applicable sur *elle, la représentation isométrique des deux surfaces l'une sur l'autre étant une déformation (n) de Minding, dans laquelle leurs génératrices homologues sont parallèles.*

6. Considérons maintenant une courbe réelle C′ dépourvue de points singuliers et définie par l'équation (vectorielle)

$$\bar{\varrho}' = \bar{\varrho}'(u), \tag{6,1}$$

le paramètre u étant l'arc de cette courbe et désignons par $\varkappa'(u)$, $\sigma'(u)$ la courbure et la torsion de C′ et par $\bar{t}'(u)$, $\bar{n}'(u)$, $\bar{b}'(u)$ les vecteurs - unités qui déterminent les sens positifs sur les directions des axes du trièdre de Frenet associé à C′ en son point courant P′(u).

Si $\varkappa'$, σ' sont liées par une relation de la forme

$$\sigma' = c\varkappa', \tag{6,2}$$

où c est une constante, on reconnaît facilement à l'aide des formules connues pour les dérivées des vecteurs $\bar{t}'$, $\bar{n}'$, $\bar{b}'$ par rapport à l'arc u de C′, que, dans le cas où la constante c qui figure dans la relation (6, 2), est $\neq 0$, c.à.d. dans le cas où C′ est une hélice cylindrique, les deux surfaces reglées définies à un déplacement parallèle près par les équations

$$\bar{r} = \int \frac{c\bar{t}' + \bar{b}'}{\sqrt{1+c^2}}\, du + v\bar{t}' \tag{6,3}$$

et

$$\bar{r}^* = \int \frac{\bar{t}' - c\bar{b}'}{\varepsilon\sqrt{1+c^2}}\, du + v^*\bar{t}, \tag{6,4}$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que $c <$ ou > 0, sont gauches et en outre que a) Les courbes $v = 0$, $v^* = 0$ tracées respectivement sur ces surfaces sont leurs lignes de striction, le paramètre u étant l'arc de chacune d'elle, b) la première de ces courbes est une droite qui coupe les génératrices de la première surface sous un angle constant — non droit — tandis que la seconde est une ligne de courbure plane de la seconde surface, qui est aussi une trajectoire isogonale — non orthogonale — des génératrices de la surface, c) l'hélice C′ est l'arête de rebroussement de l'orientrice développable commune des deux surfaces, d) le vecteur - unité $\bar{n}'$ qui détermine le sens positif sur la direction de la normale principale de C′ en son point courant P′ détermine aussi le sens positif sur la direction commune des normales aux deux surfaces aux points de leurs lignes de striction homologues de P′ et e) les invariants $\varkappa, \sigma, \varphi$; $\varkappa^*, \sigma^*, \varphi^*$ des ces surfaces vérifient les conditions (3, 9), si l'on y pose $\beta = 0$ et que l'on remplace $\cos\omega$, $\sin\omega$ par les fonctions (4, 5) et (4, 4) de la constante c qui figure dans la relation (6, 2) respectivement.

Les considérations précédentes jointes au théorème I permettent de formuler le

Théorème VII. *'A toute portion dépourvue de points singuliers d'une hélice cylindrique réelle on peut faire associer deux surfaces reglées gauches réelles, définies à un déplacement parallèle près, dont chacune admet une autre applicable sur elle, la représentation isométrique des deux surfaces l'une sur l'autre étant une déformation (n) de Minding, dans laquelle les points homologues de leurs lignes de striction coïncident. Ces deux surfaces sont des surfaces gauches à striction constante* ($< \frac{\pi}{2}$ *en valeur absolue) et à courbure conique constante* $\neq 0$, *dont les lignes de striction sont une droite sur l'une d'elles et une ligne de courbure plane sur l'autre.*

Par ailleurs si l'on considère l'équation

$$\cos\varphi - c\,.\sin\varphi = \frac{\beta(1+c^2)}{2}\,\varkappa'(u) \tag{6, 5}$$

qu'on obtient de la relation (4, 15) en y remplaçant $\varkappa$ par la courbure $\varkappa'(u)$ de la courbe C′ et c par la constante $=$ ou $\neq 0$, qui figure dans la relation (6, 2), le coefficient β qui y figure étant une constante $\neq 0$, on peut choisir cette constante de manière que les fonctions $\varphi(u)$ qui la vérifient soient réelles dans l'intervalle des valeurs de la variable u, qui correspondent aux points de C′.

En effet l'équation (6, 5) n'est vérifiée, comme on le reconnaît aussitôt, que si l'on a ou bien

$$\cos\varphi = \frac{c\sqrt{1-\beta_1^2\varkappa'^2}+\beta_1\varkappa'}{\varepsilon\sqrt{1+c^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{1-\beta_1^2\varkappa'^2}-c\beta_1\varkappa'}{\varepsilon\sqrt{1+c^2}}, \tag{6, 6}$$

où $\beta_1 = \frac{\varepsilon\beta\sqrt{1+c^2}}{2}$ et $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que $\sqrt{1-\beta_1^2\varkappa'^2} - c\beta_1\varkappa' >$ ou < 0,

ou

$$\cos\varphi = \frac{-c\sqrt{1-\beta_1^2\varkappa'^2}+\beta_1\varkappa'}{\varepsilon^*\sqrt{1+c^2}}, \quad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{1-\beta_1^2\varkappa'^2}+c\beta_1\varkappa'}{\varepsilon^*\sqrt{1+c^2}}, \tag{6, 7}$$

où $\beta_1 = \dfrac{\varepsilon^* \beta \sqrt{1+c^2}}{2}$ et $\varepsilon^* = +1$ ou -1 suivant que $\sqrt{1-\beta_1^2 \varkappa'^2} + c\beta_1 \varkappa' <$ ou > 0.

En outre $\varkappa'(u)$ est une fonction de u supérieurement bornée dans l'intervalle des valeurs de u correspondant aux points de C', puisque, par hypothèse, C' est dépourvue de points singuliers.

Or, si M est la borne supérieure de $\varkappa'(u)$ dans cet intervalle et que l'on choisisse β de manière que l'on ait

$$(6,8) \qquad 0 < |\beta| \frac{\sqrt{1+c^2}}{2} \equiv |\beta_1| \leqslant \frac{1}{M}$$

on aura $1 - \beta_1^2 \varkappa'^2 \geqslant 0$ pour toutes les valeurs de u correspondant aux points de C'. Donc pour toute constante β vérifiant les inégalités (6, 8) les expressions (6, 6) et (6, 7) de $\varkappa'$ sont des fonctions de la variable u réelles dans l'intervalle considéré.

Si l'on considère maintenant les surfaces reglées définies à un déplacement parallèle près par les équations

$$(6,9) \quad \bar{r} = \int \left[\left(c\sqrt{1-\beta_1^2 \varkappa'^2} + \beta_1 \varkappa' \right) \bar{t}' + \left(\sqrt{1-\beta_1^2 \varkappa'^2} - c\beta_1 \varkappa' \right) \bar{b}' \right] \frac{du}{\varepsilon \sqrt{1+c^2}} + v\bar{t}'$$

et

$$(6,10) \quad \bar{r}^* = \int \left[\left(-c\sqrt{1-\beta_1^2 \varkappa'^2} + \beta_1 \varkappa' \right) \bar{t}' - \left(\sqrt{1-\beta_1^2 \varkappa'^2} + c\beta_1 \varkappa' \right) \bar{b}' \right] \frac{du}{\varepsilon^* \sqrt{1+c^2}} + v^* \bar{t}'$$

dont les génératrices correspondent aux points de la courbe C', on reconnaît facilement, lorsque β_1 est une constante qui vérifie les inégalités (6, 8), que a) ces deux surfaces sont gauches et réelles, b) les courbes $v = 0$, $v^* = 0$ tracées sur elles respectivement sont leurs lignes de striction et la correspondance entre chacune de ces courbes et la courbe C', dans laquelle aux points homologues des deux courbes correspond la même valeur de u, est une correspondance avec égalité des arcs homologues, c) la courbe C' est l'arête de rebroussement de l'orientrice développable commune des deux surfaces qui, par conséquent, sont des surfaces à courbure conique constante $=$ ou $\neq 0$ suivant que la constante c qui figure dans (6, 2) est $=$ ou $\neq 0$, d) le vecteur-unité $\bar{n}'$ qui détermine le sens positif sur la direction de la normale principale de la courbe C' en son point courant P' détermine aussi le sens positif sur la direction commune des normales à ces deux surfaces aux points de leurs lignes de striction homologues de P et e) les invariants $\varkappa$, σ, φ ; $\varkappa^*$, σ^*, φ^* de ces surfaces vérifient les conditions (3, 9) si l'on y remplace β par la constante $\dfrac{2\beta_1}{\varepsilon\sqrt{1+c^2}}$ ou $\dfrac{2\beta_1}{\varepsilon^*\sqrt{1+c^2}}$ et $\cos\omega$, $\sin\omega$ par les fonctions (4, 4) ou (4, 5) de la constante c respectivement.

On peut donc, en tenant compte du théorème I et du fait que la courbe considérée est une hélice cylindrique ou une courbe plane suivant que la constante c qui figure dans la relation (6, 2) est $\neq$ ou $=0$, formuler le

Théorème VIII. 'A toute portion C' dépourvue de points singuliers d'une courbe plane réelle ou d'une hélice cylindrique réelle on peut faire associer un ensemble de ∞^1 surfaces reglées gauches réelles, définies à un déplacement parallèle près, dont chacune admet une autre applicable sur elle, la représentation isométrique des deux surfaces l'une sur l'autre étant une déformation (n) de Minding, dans laquelle les points homologues de leurs lignes de striction sont distincts et leurs génératrices homologues ne sont pas parallèles. Les surfaces de cet ensemble admettent toutes la même orientrice développable dont l'arête de rebroussement est la courbe C' et elles sont toutes des surfaces à courbure conique constante = ou $\neq$ 0, suivant que C' est une courbe plane ou une hélice cylindrique.

7. Supposons enfin que la courbe C' définie par l'équation (6, 1) soit une courbe gauche réelle dépourvue de points singuliers, dont la courbure $\varkappa'$ et la torsion σ' sont liées par la relation

$$\varkappa'^2 + \sigma'^2 = 4c^2 \tag{7,1}$$

où c est une constante ($\neq 0$).

Dans ce cas on peut poser

$$\cos\varphi = \frac{\varkappa'}{\varepsilon c}, \qquad \sin\varphi = -\frac{\sigma'}{2\varepsilon c}, \tag{7,2}$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 suivant que $\dfrac{\sigma'}{c} <$ ou > 0.

Cela posé, si l'on considère la surface reglée R définie à un déplacement parallèle près par l'équation

$$\bar{r} = \int \frac{\varkappa'\bar{t}' - \sigma'\bar{b}}{2\varepsilon c}\, du + v\bar{t}', \tag{7,3}$$

on reconnaît facilement à l'aide de (7, 1) et des formules pour les dérivées des vecteurs $\bar{t}'$, $\bar{n}'$, $\bar{b}'$ par rapport à l'arc u de C', que a) la courbe

$v = 0$ tracée sur R est la ligne de striction et en outre une ligne de courbure de R, le paramètre u étant l'arc de cette courbe, b) le vecteur $\bar{n}'$ qui détermine le sens positif sur la direction de la normale principale de C′ en son point courant P′, détermine aussi le sens positif sur la direction de la normale à R au point de sa ligne de striction homologue de P′, c) la surface engendrée par les normales à R le long de la courbe $v = 0$ est une surface conique et d) les conditions (3, 9) sont vérifiées par les invariants $\varkappa$, σ, φ de R, si l'on y remplace β par $\frac{1}{\varepsilon c}$ et $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ par leurs valeurs (7, 2) et que l'on y pose $\omega = \pi$. De cette dernière constatation, eu égard au théorème I, on déduit que la surface R admet une autre R_1 applicable sur elle, la représentation isométrique des deux surfaces l'une sur l'autre étant une déformation (n) de Minding, dans laquelle leurs génératrices homologues sont parallèles.

La surface R_1 rapportée aux paramètres u, v, d'après ce qui est exposé dans le paragraphe 3, est définie par l'équation

$$\bar{r}_1 = \int \frac{\varkappa'\bar{t}' - \sigma'\bar{b}'}{2\varepsilon c}\, du + \frac{\bar{n}'}{\varepsilon c} - v\bar{t}',$$

dont la différentiation par rapport à u et à v donne

$$\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial u} = -\frac{\varkappa'\bar{t}' - \sigma'\bar{b}'}{2\varepsilon c} - v\varkappa'\bar{n}' = -\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial v} = -\bar{t}' = -\frac{\partial \bar{r}}{\partial v};$$

ce qui montre que la représentation (isométrique) des surfaces R, R_1 l'une sur l'autre, dans laquelle aux points homologues des deux surfaces correspondent les mêmes valeurs des u, v est une symétrie par rapport à un centre; ce point est nécessairement le sommet de la surface conique engendrée par les normales communes des deux surfaces le long de leurs lignes de striction.

On peut donc énoncer le

Théorème IX. A toute portion dépourvue de points singuliers d'une courbe gauche réelle à courbure totale constante on peut faire associer une seule surface reglée gauche réelle, définie à un déplacement parallèle près, qui admet une autre applicable sur elle, la représentation isométrique des deux surfaces l'une sur l'autre étant une déformation (n) de Minding. Les lignes de striction des deux surfaces sont des lignes de courbure et la surface engendrée par leurs *normales communes le long de ces courbes est une surface conique par rapport au sommet de laquelle les deux surfaces sont symétriques.*

Il est à noter que comme il résulte de l'étude précédente, *l'ensemble de surfaces reglées applicables sur une surface reglée gauche réelle ne contient qu'une seule surface au plus dont la représentation isométrique sur cette surface est une déformation (n) de Minding.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, I (Springer) (1924).
2. Brauner, H.: Die windschiefen Flächen konstanter konischer Krümmung, Math. Annalen, 152 (1963), p. p. 257 - 270.
3. Kruppa, E.: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie, (Springer) (1957).
4. Kruppa, E.: Natürliche Geometrie der Mindingschen Verbiegungen der Strahlflächen, Mh. für Math. 55 (1951), p. p. 340 - 345.
5. Kruppa, E.: Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven Stzber. Öst. Akad. d. Wiss. Wien, math. nat. Kl. 157 (1949), p. p. 143 - 176.
6. Sannia, G.: Una rappresentazione intrinseca delle rigate, Giorn. di Mat. 63 (1925), p. p. 31 - 47.
7. Weatherburn, G. E.: Differential geometry, I (Cambr. Un. Press) (1960).

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς ἑκάστην εὐθειογενῆ μὴ ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ συνήθους τριδιαστάτου χώρου ἀντιστοιχεῖ, ὡς εἶναι γνωστόν, σύνολον εὐθειογενῶν μὴ ἀναπτυκτῶν ἐπίσης ἐπιφανειῶν πλήθους μὴ πεπερασμένου, ἐφ' ἑκάστης τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὸν αὕτη νὰ ἀπεικονισθῇ κατὰ τρόπον τοιοῦτον, ὥστε εἰς τὰς (εὐθυγράμμους) γενετείρας καὶ τὴν γραμμὴν συσφίξεως τῆς μιᾶς ἐπιφανείας ἀντιστοιχοῦν αἱ γενέτειραι καὶ ἡ γραμμὴ συσφίξεως τῆς ἄλλης, τῶν δύο ἐπιφανειῶν ἐχουσῶν ἐπὶ πλέον καθέτους συμπιπτούσας εἰς ἕκαστον ζεῦγος ἀντιστοίχων σημείων τῶν γραμμῶν συσφίγξεως αὐτῶν. Κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν ταύτην ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις τῶν ἀντιστοίχων σημείων τῶν γραμμῶν συσφίγξεως τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἶναι σταθερά, ὅπως ἐπίσης σταθερὰ εἶναι καὶ ἡ γωνία τῶν θετικῶν κατευθύνσεων τῶν ἀντιστοίχων γενετειρῶν αὐτῶν. Εἰς τὸ σύνολον τοῦτο, ὅταν ἡ εὐθειογενὴς ἐπιφάνεια εἶναι τυχοῦσα, δὲν ἀνήκουν πάντοτε ἐπιφάνειαι, δι᾽ ἑκάστην τῶν ὁποίων ἡ ἐν λόγῳ ἀπεικόνισις εἶναι ἰσομετρική, ἐπιφάνειαι ἑπομένως ἐφαρμόσιμοι ἐπὶ τῆς θεωρουμένης ἐπιφανείας, αἱ δὲ εὐθειογενεῖς μὴ ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι, εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν τοιαῦται ἐπιφάνειαι, δὲν ἔχουν μελετηθῆ. Σημειωτέον ὅτι, ἐὰν κατὰ τὴν ἰσομετρικὴν ἀπεικόνισιν δύο μὴ ἀναπτυκτῶν εὐθειογενῶν ἐπιφανειῶν ἐφαρμοσίμων τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης αἱ εὐθύγραμμοι γενέτειραι αὐτῶν εἶναι ἀντίστοιχοι, κατ᾽ ἀνάγκην, ὡς εἶναι γνωστόν, καὶ αἱ γραμμαὶ συσφίγξεως αὐτῶν θὰ εἶναι ἀντίστοιχοι, ἡ δὲ ἀπεικόνισις εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην καλεῖται ἀπεικόνισις ἰσομετρικὴ κατὰ Minding τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης, εἰς δὲ τὴν εἰδικωτέραν περίπτωσιν, καθ᾽ ἣν κατὰ τὴν ἀπεικόνισιν ταύτην αἱ κάθετοι τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν γραμμῶν συσφίγξεως αὐτῶν συμπίπτουν, ἡ ἀπεικόνισις εἰς τὰ ἑπόμενα, συντομίας χάριν, καλεῖται ἀπεικόνισις (n) κατὰ Minding.

Εἰς τὴν ἐργασίαν ταύτην, εἰς τὴν ὁποίαν μελετῶνται αἱ πραγματικαὶ εὐθειογενεῖς μὴ ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι αἱ ἔχουσαι τὴν προαναφερομένην ἰδιότητα, ἀποδεικνύεται ἐν πρώτοις ὅτι δύο πραγματικαὶ εὐθειογενεῖς μὴ ἀναπτυκταὶ ἐπιφάνειαι ἐφαρμόσιμοι ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὅταν ἡ ἰσομετρικὴ ἀπεικόνισις τῆς μιᾶς ἐπὶ τῆς ἄλλης εἶναι ἀπεικόνισις (n) κατὰ Minding, καθ᾽ ἣν αἱ ἀντίστοιχοι γενέτειραί των δὲν εἶναι παράλληλοι, εἶναι κατ᾽ ἀνάγκην ἐπιφάνειαι σταθερᾶς κωνικῆς καμπυλότητος $\neq 0$ καὶ συνεπῶς αἱ εὐθύγραμμοι γενέτειραι αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας δύο κυλινδρικῶν ἑλίκων, αἱ δὲ κοιναὶ κάθετοι τῶν ἐπιφανειῶν τούτων εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν γραμμῶν συσφίγξεως αὐτῶν εἶναι αἱ πρῶται κάθετοι μιᾶς καμπύλης. Ἐνῷ, ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι γενέτειραι τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἶναι παράλληλοι, θὰ εἶναι αὗται κατ᾽ ἀνάγκην παράλληλοι πρὸς τὰς ἐφαπτομένας εἴτε μιᾶς ἐπιπέδου καμπύλης εἴτε μιᾶς μὴ ἐπιπέδου καμπύλης σταθερᾶς ὅμως ὁλικῆς καμπυλότητος· εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν αἱ γραμμαὶ συσφίγξεως τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἶναι καὶ γραμμαὶ καμπυλότητος αὐτῶν καὶ ἡ ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ κοιναὶ κάθετοι τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἰς τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τῶν γραμμῶν συσφίγξεως αὐτῶν εἶναι κωνική, ὡς πρὸς τὴν κορυφὴν δὲ τῆς ἐπιφανείας ταύτης αἱ δύο ἐπιφάνειαι εἶναι συμμετρικαί. Ἀποδεικνύονται πρὸς τούτοις θεωρήματα ἐκφράζοντα συνθήκας ἱκανάς, ἵνα εἰς πραγματικὴν εὐθειογενῆ μὴ ἀναπτυκτὴν ἐπιφάνειαν ἀντιστοιχῇ ἄλλη ἐφαρμόσιμος ἐπ᾽ αὐτῆς, τῆς ἰσομετρικῆς ἀπεικονίσεως τῆς μιᾶς τῶν ἐπιφανειῶν τούτων ἐπὶ τῆς ἄλλης οὔσης ἀπεικονίσεως (n) κατὰ Minding. Ἐν τέλει ἀποδεικνύεται ὅτι εἰς ἑκάστην πραγματικὴν κυλινδρικὴν ἕλικα, ὅπως καὶ εἰς ἑκάστην ἐπίπεδον πραγματικὴν καμπύλην, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχηθῇ σύνολον εὐθειογενῶν πραγματικῶν μὴ ἀναπτυκτῶν ἐπιφανειῶν, καθοριζομένων κατὰ προσέγγισιν παραλλήλου μετατοπίσεως, εἰς ἑκάστην τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ ἄλλη ἐφαρμόσιμος ἐπ' αὐτῆς, τῆς ἰσομετρικῆς ἀπεικονίσεως τῆς μιᾶς τῶν ἐπιφανειῶν τούτων ἐπὶ τῆς ἄλλης οὔσης ἀπεικονίσεως (n) κατὰ Minding. Ἐνῷ εἰς ἑκάστην πραγματικὴν μὴ ἐπίπεδον καμπύλην σταθερᾶς ὁλικῆς καμπυλότητος ἀντιστοιχεῖ μία μοναδικὴ πραγματικὴ εὐθειογενὴς μὴ ἀναπτυκτὴ ἐπιφάνεια, καθοριζομένη κατὰ προσέγγισιν παραλλήλου μετατοπίσεως, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἄλλη ἀπεικονιζομένη ἰσομετρικῶς ἐπ' αὐτῆς, τῆς ἀπεικονίσεως ταύτης οὔσης ἀπεικονίσεως (n) κατὰ Minding.