ΑΛΓΕΒΡΑ.— **Sur les zéros des polynômes***, *par* ***Chr. Foussianis***. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

1. Considérons le polynôme

$$\varphi(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0 ;$$

nous pourrons écrire

$$|\varphi(z)| \geq |\alpha_{m-k} z^{m-k}| - |\alpha_m z^m + \ldots + \alpha_{m-k+1} z^{m-k+1} + \alpha_{m-k-1} z^{m-k-1} + \ldots + \alpha_0|$$

ou encore, en posant $|z| = \varrho$

$$(1)\quad \varrho^{k-m} |\varphi(z)| \geq |\alpha_{m-k}| - \left(|\alpha_m| \varrho^k + \ldots + |\alpha_{m-k+1}| \varrho\right) - \left(|\alpha_{m-k-1}| \frac{1}{\varrho} + \ldots + |\alpha_0| \frac{1}{\varrho^{m-k}}\right)$$

Supposons $\varrho > 1$ et introduisons les notations

$$(2)\qquad A = |\alpha_m| + \ldots + |\alpha_{m-k+1}|, \qquad B = |\alpha_{m-k-1}| + \ldots + |\alpha_0| ;$$

l'inégalité (1) donnera alors lieu à la suivante:

$$(3)\qquad \varrho^{k-m} |\varphi(z)| \geq |\alpha_{m-k}| - A\varrho^k - B$$

Cette dernière inégalité permet de trouver dans certains cas, dans le plan complexe, des couronnes circulaires à l'intérieur desquelles $\varphi(z)$ ne s'annule pas. Si en effet,

$$|\alpha_{m-k}| > A + B ;$$

le second membre de (3) sera positif pour $\varrho = 1$ et l'on aura alors $|\varphi(z)| > 0$ pour toutes les valeurs de z qui se trouvent dans la couronne circulaire

$$(4)\qquad 1 < |z| < \sqrt[k]{\frac{|\alpha_{m-k}| - B}{A}}$$

On peut facilement remplacer l'anneau circulaire (4) par un autre plus grand. Prenons encore $\varrho > 1$ et introduisons une nouvelle constante Θ choisie dans l'intervalle

$$1 < \Theta < \varrho .$$

Dans ces conditions la relation (1) a pour conséquence la suivante:

$$\varrho^{k-m} |\varphi(z)| > |\alpha_{m-k}| - \varrho^k A - \frac{1}{\Theta} B$$

---

* ΧΡ. ΦΟΥΣΙΑΝΗ.— Περὶ τῶν ριζῶν τῶν πολυωνύμων.

* Ἀνεκοινώθη κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 7 Δεκεμβρίου 1933.

Pour que le second membre de cette dernière inégalité soit positif il faut avoir

$$\frac{1}{\Theta} B < |\alpha_{m-k}|$$

et en outre

$$\varrho < \sqrt[k]{\frac{|\alpha_{m-k}| - \frac{1}{\Theta} B}{A}}$$

Comme nous avons pris $\Theta < \varrho$, il faut donc que Θ satisfasse à la condition

$$\Theta < \sqrt[k]{\frac{|\alpha_{m-k}| - \frac{1}{\Theta} B}{A}}$$

qui est équivalente à

$$(5) \qquad |\alpha_{m-k}| > A\Theta^k + B\frac{1}{\Theta}$$

Réciproquement si Θ est un nombre quelconque plus grand de l'unité, satisfaisant à l'inégalité (5), la fonction $\varphi(z)$ sera différente de zéro dans la couronne

$$(6) \qquad \Theta < |z| < \sqrt[k]{\frac{|\alpha_{m-k}| - \frac{1}{\Theta} B}{A}}.$$

Supposons que, pour des valeurs données de A, B et $\Theta > 1$, la valeur absolue $|\alpha_{m-k}|$ du coefficient α_{m-k} soit assez grande pour que l'inégalité

$$(7) \qquad |\alpha_{m-k}| > A\Theta^k + B$$

qui entraîne (5), soit vérifiée. Alors les deux couronnes circulaires (4) et (6) auront des points communs et l'on sera sûr qu'il n'y a pas de racines de $\varphi(z)$ dans la couronne

$$(8) \qquad 1 < |z| < \sqrt[k]{\frac{|\alpha_{m-k}| - \frac{1}{\Theta} B}{A}}$$

Nous avons donc établi le théorème:

Théorème I. *Étant donné le polynôme*

$$\varphi(z) = \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

si pour un nombre entier k *compris entre zéro et* m *inclusivement, il existe un nombre* $\Theta > 1$ *pour lequel l'inégalité*

$$|\alpha_{m-k}| > A\Theta^k + B$$

est vérifiée, la fonction $\varphi(z)$ *n'aura pas de racines à l'intérieur de la couronne circulaire* (8).

2. Supposons que le polynôme $\varphi(z)$ possède au moins une racine qui ne se trouve pas à l'intérieur du cercle unité. Nous pourrons alors en nous servant d'une inégalité bien connue que M.M. Carathéodory et Féjer ont établie à propos du théorème de Jensen[1], limiter des anneaux circulaires qui contiennent au moins une racine de $\varphi(z)$.

Désignons par $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_m$ les modules des racines de $\varphi(z)$ rangées par ordre de grandeur et par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ $(n \leq m)$ celles de ces racines qui sont contenues dans un cercle $|z| < r$, de rayon r donné quelconque. D'après le résultat de M.M. Carathéodory et Féjer, il existe sur la périphérie de ce cercle des points ζ pour lesquels

$$|\varphi(\zeta)| > \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} |\varphi(o)|$$

Si donc le premier coefficient α_m de $\varphi(z)$ est égal à 1, on aura évidemment

$$(1) \qquad r^m + |\alpha_{m-1}| r^{m-1} + \ldots + |\alpha_1| r + |\alpha_o| > \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} r_1 r_2 \ldots r_m.$$

Supposons que pour une valeur de $r \geq 1$ on ait

$$k = m - n \geq 1;$$

alors en posant

$$(2) \qquad P = 1 + |\alpha_{m-1}| + \ldots + |\alpha_1| + |\alpha_o|$$

on tirera de (1)

$$r^k P > r_{n+1} \ldots r_m \geq r_{n+1}^k$$

Cette relation est équivalente à

$$r_{n+1} < r \sqrt[k]{P}$$

et nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème II. *Dans le cas où le polynôme* $\varphi(z)$ *possède* k *racines* $(k \geq 1)$ *qui ne se trouvent pas à l'intérieur d'uu cercle* $|z| = r$ *dont le rayon n'est pas inférieur à l'unité, une de ces racines au moins sera comprise dans le domaine*

$$(3) \qquad r \leq |z| < r \sqrt[k]{P}$$

le nombre P *étant défini par l'équation* (2)

3. En combinant ce dernier résultat avec notre premier théorème nous allons pouvoir démontrer le théorème suivant:

---

[1] *C. R. de l'Acad. des Sc.*, 1907.

Théorème III. *Si le coefficient* α_n $(n=1, 2, \ldots, m-1)$ *du polynôme*

$$\varphi(z)=z^m+\alpha_{m-1}z^{m-1}+\ldots+\alpha_1 z+\alpha_0$$

satisfait à la condition

$$(1)\quad \begin{cases} |\alpha_n|>A\,(2A+1)^{m-n}+B, \\ A=1+|\alpha_{m-1}|+\ldots+|\alpha_{n+1}|, \quad B=|\alpha_0|+|\alpha_1|+\ldots+|\alpha_{n-1}|, \end{cases}$$

au moins n *racines de ce polynôme seront situées à l'intérieur du cercle unité.*

En effet dans le cas contraire on aurait en posant $k=m-n$ au moins $(k+1)$ racines dans le domaine $|z|\geqq 1$ et, d'après le théorème II, l'une au moins de ces racines se trouverait dans la couronne circulaire

$$1\leqq|z|<\sqrt[k+1]{P}$$

D'autre part en posant $\Theta=2A+1$ toutes les conditions du théorème I sont vérifiées; il n'y a donc pas de racines de $\varphi(z)$ dans le domaine

$$1\leqq|z|<\sqrt[k]{\frac{|\alpha_n|-\frac{B}{\Theta}}{A}}$$

Il faudrait donc avoir

$$\sqrt[k+1]{P}>\sqrt[k]{\frac{|\alpha_n|-\frac{B}{\Theta}}{A}}$$

ce qui équivaut à

$$(2)\qquad P>\frac{|\alpha_n|-\frac{B}{\Theta}}{A}\sqrt[k]{\frac{|\alpha_n|-\frac{B}{\Theta}}{A}}$$

On a d'ailleurs par hypothèse $|\alpha_n|>A\Theta^k+B$ ce qui donne

$$\Theta<\sqrt[k]{\frac{|\alpha_n|-B}{A}}<\sqrt[k]{\frac{|\alpha_n|-\frac{B}{\Theta}}{A}}$$

et d'autre part par définition $P=A+B+|\alpha_n|$.

On peut donc mettre à la place de (2)

$$A+B+|\alpha_n|>\frac{|\alpha_n|-\frac{B}{\Theta}}{A}\Theta=\frac{|\alpha_n|(2A+1)-B}{A}$$

d'où l'on tire

$$|\alpha_n|<\frac{A^2}{A+1}+B$$

On aurait donc à cause de (1)

$$(A+1)(2A+1)^k < A,$$

ce qui est absurde.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Όταν τὸ μέτρον συντελεστοῦ τινος ἑνὸς πολυωνύμου $\varphi(z)$ ὑπερέχῃ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέτρων ὅλων τῶν λοιπῶν συντελεστῶν, τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τόπους τοῦ ἐπιπέδου $\alpha < |z| < \beta$, $\alpha \geq 1$, ἐντὸς τῶν ὁποίων τὸ $\varphi(z)$ νὰ μὴ μηδενίζεται· ἐπὶ πλέον δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τότε καὶ τὸ πλῆθος τῶν ριζῶν τοῦ $\varphi(z)$, αἵτινες κατ' ἐλάχιστον θὰ ὑπάρχουν ἐντὸς τοῦ κύκλου ἀκτῖνος ἴσης μὲ τὴν μονάδα. Τὸ τελευταῖον τοῦτο ἐπιτυγχάνομεν διὰ καταλλήλου συνδυασμοῦ τοῦ προηγουμένου μὲ τὴν γνωστὴν ἀνισότητα, τὴν ὁποίαν οἱ κκ. Καραθεοδωρῆς καὶ Féjer ἀπέδειξαν ἐπὶ τοῦ θεωρήματος τοῦ Jensen διὰ τὸ μέγιστον μέτρον μιᾶς συναρτήσεως ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου αὕτη εἶναι ὁμαλή.

ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ.—Μελέτη ἐπὶ τῆς ὑδρογονώσεως τοῦ ἐλαιολάδου*, *ὑπὸ* ***Τ. Χρηστοπούλου καὶ Ἀν. Κώνστα.*** Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Βέη.

Σκοπὸς τῆς παρούσης ἐργασίας ὑπῆρξεν ἡ μελέτη τῶν μεταβολῶν, τὰς ὁποίας ὑφίσταται τὸ ἐλαιόλαδον κατὰ τὴν βιομηχανικὴν ὑδρογόνωσιν.

Τὸ ἐλαιόλαδον δὲν συγκαταλέγεται μεταξὺ τῶν εἰς ὑδρογόνωσιν ὑποβαλλομένων ἐλαίων, διότι, λόγῳ τῆς μεγάλης του τιμῆς, δὲν συμφέρει ἡ ὑδρογόνωσις τούτου. Ἕνεκα τούτου ἦτο σπανιωτάτη εὐκαιρία, ὅταν ἐξετελέσθησαν εἰς βιομηχανικὴν κλίμακα ὑδρογονώσεις μεγάλων ποσοτήτων ἐλαιολάδου, εἰς τὸ Ἐργοστάσιον Ὑδρογονώσεως τοῦ Πειραιῶς[1], κατὰ τὸ θέρος τοῦ 1932, καὶ τῆς εὐκαιρίας αὐτῆς ἐπωφελήθημεν, διὰ νὰ λάβωμεν τὰ δείγματα, τὰ ὁποῖα μᾶς ἐχρησίμευσαν διὰ τὴν παροῦσαν μελέτην. Ἡ εὐκαιρία ἦτο τοσούτῳ μᾶλλον μοναδικὴ καὶ κατάλληλος, καθόσον εἰς τὰς ἐκτελουμένας ὑδρογονώσεις ἐπεδιώκετο ἡ ἀπόκτησις λίπους ἔχοντος ὅσον τὸ δυνατὸν ὑψηλότερον σημεῖον τήξεως, καὶ εἰς τὴν μελετηθεῖσαν περίπτωσιν ἐπετεύχθη λίπος μὲ σημεῖον τήξεως 61°.5 καὶ ἀριθμὸν ἰωδίου 2.9.

Ἡ Ὑδρογόνωσις. Κατὰ τὴν μελετηθεῖσαν περίπτωσιν ἡ ὑδρογόνωσις ἐγένετο ἐπὶ ἐξουδετερωμένου ἐλαιολάδου, εἰς θερμοκρασίαν 200° περίπου καὶ ὑπὸ πίεσιν 5 ἀτμ., διήρκεσε δὲ περὶ τὰς 6 ὥρας. Ὡς καταλύτης ἐχρησίμευσε 3 % νικελιοῦχος γῆ διατόμων μὲ 18 % Ni.

Ἐκ τῆς κατεργασίας ταύτης ἐλήφθησαν ἐν ὅλῳ 5 δείγματα χαρακτηριζόμενα ὡς ἑξῆς:

---

* **T. CHRISTOPOULOS ET AN. KONSTA.—Sur l'hydrogénation de l'huile d'olive.**

Ἀνεκοινώθη κατὰ τὴν συνεδρίαν τῆς 14 Δεκεμβρίου 1933.

[1] Τὴν τεχνικὴν διεύθυνσιν τοῦ Ἐργοστασίου τούτου εἶχε τότε ὁ ἐξ ἡμῶν κ. Α. Κώνστας.