et pour

$$u_o^2 \approx \frac{e^2}{K\mu^2} \approx 10^{-43}$$

il serait $\lambda = 1$. Cette valeur de u_o^2 est du même ordre de grandeur avec celle qui resulte de l'hypothèse de I, p. 529, sans qu'il puisse être attribué à cette coïncidence une signification physique déterminée.

Nous donnons aussi la valeur moyenne dans le temps de T^4_u pour le cas $u_o \gg 1$, dont on peut déduire la distribution du rayonnement dans l'espace:

$$\overline{T}^4_n = \frac{e^2}{8\pi r^2 R^2}\left[3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{-\frac{5}{2}} - \frac{5}{4u_o^2}(1-\beta^2\sin^2\theta)^{-\frac{7}{2}}\right]; \qquad (6)$$

r est le rayon de la sphère S et θ l'angle compris entre la direction de l' émission et la normale au plan de la trajectoire. La quantité $\overline{T}^4_n$ a un maximum très accentué pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. On voit donc que, dans le cas $u_o \gg 1$, le rayonnement électromagnétique est émis presqu' uniquement sur le plan de la trajectoire, tout comme le rayonnement gravifique.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Δίδονται τὰ ἀποτελέσματα τοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς ἀκτινοβολουμένης ἐνεργείας μὲ κυμάνσεις βαρύτητος δι' ὡρισμένας μορφὰς καὶ περιπτώσεις κινήσεως τοῦ μονο - διπολικοῦ σωματίου.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ.—**La loi des moments dans un système quelconque de coordonnées*** *par A. Papapetrou.*— Presenté par C. Maltézos.

§ 1. Dans la théorie de la relativité restreinte, nous connaissons deux lois de conservation. La première est celle de la conservation de la quantité de mouvement et d'énergie; elle est exprimée sous forme différentielle directement par les équations fondamentales, auxquelles satisfait le tenseur matériel T^{ia} dans la relativité restreinte:

$$\frac{\partial T^{ia}}{\partial x^i} = 0 \,. \qquad (1)$$

La seconde loi est celle de la conservation des moments. Son expression dif-

* Α. ΠΑΠΑΠΕΤΡΟΥ, Ὁ νόμος τῶν ῥοπῶν εἰς οἱονδήποτε σύστημα συντεταγμένων.

férentielle s'obtient de la façon suivante[1]. On choisit un point de repère O (ξ^a). A tout point P (x^a), correspond alors le vecteur:

$$l^a = x^a - \xi^a . \tag{2}$$

Avec le tenseur T^{ia} et le vecteur l^a on forme le tenseur antisymetrique:

$$F^{ia\beta} = T^{ia} l^\beta - T^{i\beta} l^a \tag{3}$$

L'expression différentielle de la loi des moments est alors:

$$\frac{\partial F^{ia\beta}}{\partial x^i} = O . \tag{4}$$

Les lois intégrales correspondantes se déduisent par l'intégration de (1) et de (4) dans tout l'espace, et s'expriment par les relations:

$$\int T^{4a} d\upsilon = G^a = \text{const}, \tag{1α}$$

$$\int F^{4a\beta} d\upsilon = M^{a\beta} = \text{const}, \tag{4α}$$

où G^a est le quadrivecteur de la quantité de mouvement et $M^{a\beta}$ le tenseur antisymetrique des moments du système matériel considéré.

Les relations précédentes sont valables seulement pour les systèmes de coordonnées cartésiennes, qui sont habituellement utilisées dans l'espace euclidien de la relativité restreinte. La généralisation pour un systéme général de coordonnées s'obtient immédiatement pour l'expression différentielle de la première loi. Il suffit de tenir compte de l'expression générale de la divergence d'un champ tensoriel[2]:

$$\text{Div. } T^{ia} = \frac{\partial T^{ia}}{\partial x^i} + T^{\kappa a}\Gamma^i_{\kappa i} + T^{i\kappa}\Gamma^a_{\kappa i} = O, \tag{5}$$

ou, comme on l'exprime habituellement:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, T^{ia}\right) + \sqrt{g}\, T^{i\kappa}\Gamma^a_{\kappa i} = O . \tag{5'}$$

Cette représentation n'est pas seulement valable pour l'espace euclidien de la relativité restreinte, mais aussi pour l'espace riemannien de la théorie de la gravitation, dont elle constitue d'ailleurs un des axiomes fondamentaux.

Le présent travail a pour but la généralisation de l'expression de la loi des moments pour un système quelconque de coordonnées dans l'espace eu-

---

[1] *A. Papapétrou*, Praktika de l'Académie d'Athènes, **14** (1939), 540.

[2] Voir par exemple H. Weyl, Raum - Zeit - Materie, Springer 1923, § 16.

clidien, ainsi que la discussion sur la possibilité de généralisation de cette loi dans la théorie de la gravitation.

§ 2. La généralisation immédiate de la relation (3) n'est pas possible, car on ne donne que le point de repère O et non la fonction l^a, et, d'autre part, les relations (2) ne sont valables que pour les systèmes de coordonnées cartésiennes[1]. Pour la détermination de l^a dans un système quelconque de coordonnées, nous utiliserons le transport parallèle d'un vecteur suivant une ligne donnée, opération qui ne dépend pas du système de coordonnées utilisé: On joint O et P par une ligne quelconque et on transporte tous les éléments de cette ligne parallèlement à eux-mêmes, et suivant cette ligne au point P, où on les somme. Cette sommation, faite dans le système cartésien conduit à la fonction l^a donnée par la relation (2), et par conséquent conduit à l^a dans un système quelconque de coordonnées. Par cette méthode, étant donné le point O de repère, l^a résultera comme fonction de P. De même, puisque T^{ia} est fonction de P, il est possible de définir $F^{ia\beta}$ comme fonction de P par les équations (3). La généralisation de (4) pour un système quelconque de coordonnées résulte de l'expression générale de la divergence du tenseur $F^{ia\beta}$:

$$\text{Div. } F^{ia\beta} = \frac{\partial F^{ia\beta}}{\partial x^i} + F^{\kappa a\beta}\Gamma^i_{\kappa i} + F^{i\kappa\beta}\,\Gamma^a_{\kappa i} + F^{ia\kappa}\Gamma^\beta_{\kappa i} = O\,, \tag{6}$$

ou avec des densités tensorielles:

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\sqrt{g}\,F^{ia\beta}\right) + \sqrt{g}\,F^{i\kappa\beta}\Gamma^a_{\kappa i} + \sqrt{g}\,F^{ia\kappa}\Gamma^\beta_{\kappa i} = O\,. \tag{6'}$$

En ce qui concerne les lois intégrales (1α) et (4α), leur expression n' est valable que pour les systèmes de coordonnées cartésiennes. En effet, les grandeurs tensorielles ne peuvent être sommées par addition des coordonnées correspondantes que si elles sont rapportées au même point de l'espace. Si ces grandeurs tensorielles se rapportent à différents points de l'espace, il faut en premier lieu effectuer leur transport parallèle jusqu'à un même point donné. Le résultat de l'addition de leurs coordonnées se rapporte alors à l'orientation du système de coordonnées au point considéré. Seulement dans le cas des systèmes cartésiens, le transport parallèle ne modifie pas les co-

[1] La fonction l^a peut être exprimée d'abord dans un système cartésien et ensuite, par les formules de transformation, dans un système quelconque de coordonées. Mais la détermination directe par la méthode géometrique, que nous étudions ci-dessous, en est plus expressive.

ordonnées des grandeurs tensorielles, et leur addition peut alors s'effectuer immédiatement, sans s'inquiéter si les grandeurs tensorielles se trouvent rapportées en différents points de l'espace, comme c'est le cas des équations (1a) et (4a)[1].

§ 3. La relation (6) est une conséquence immédiate de la relation (4), à cause du caractère tensoriel de son premier membre. Nous donnerons cependant une vérification directe de (6) qui nous sera utile par la suite. Pour cela nous devons calculer les derivées $\frac{dl^a}{dx^\beta}$. Ce calcul s'effectue au moyen de la construction géométrique précédente de l^a. Soit deux points voisins $P(x^a)$ et $P'(x^a + dx^a)$, et l^a et $l^a + dl^a$ les valeurs respectives de l^a. Vu le caractère linéaire du transport parallèle, l'addition des différents élements de OP' peut être effectuée comme suit: Transport des éléments compris entre O et P au point P et addition de ceux-ci, d'ou résulte l^a au point P; ensuite, transport de l^a et de l'élément restant PP' au point P', et addition de ceux-ci au point P'. Il résulte:

$$l^a + dl^a = l^a(P') + dx^a,$$

où $l^a(P')$ représente le vecteur qui résulte du transport parallèle de l^a du point P à P'. D'autre part on a la relation[2]:

$$l^a(P') = l^a - \Gamma^a_{iK}\, l^i\, dx^K.$$

Alors:

$$dl^a = dx^a - \Gamma^a_{iK}\, l^i\, dx^K, \tag{7α}$$

ou:

$$\frac{dl^a}{dx^\beta} = \delta^a_\beta - \Gamma^a_{i\beta}\, l^i. \tag{7}$$

Les relations (7) et (5) conduisent à la vérification immédiate de (6). En même temps, la relation (7) montre que cette généralisation de la loi des moments n'est valable que pour l'espace euclidien. En effet, l^a étant fonction de P, l'identité

---

[1] Un cas intéressant est celui qui est utilisé dans la théorie de la gravitation pour la généralisation de la loi (1a). Dans ce cas, le système de coordonnées est quelconque, mais loin du système matériel consideré il devient cartésien. Dans ce cas les éléments $T_4^a d\upsilon$ de (1a) doivent, avant leur addition, être transportés parallèlement à eux-mêmes, en des points où le système est déjà cartésien. Donc le pseudotenseur t^{iK} de la théorie de la gravitation ne peut pas être consideré simplement comme représentant la quantité de moment et d'énergie du champs, carau moyen de t^{iK} on doit également réaliser la réduction de différents éléments $T_4^a d\upsilon$ selon la direction des axes ce de système cartésien.

[2] Voir H. Weyl, l. c. § 15.

$$\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\left(\frac{\partial l^{a}}{\partial x^{i}}\right)-\frac{\partial}{\partial x^{i}}\left(\frac{\partial l^{a}}{\partial x^{\kappa}}\right)=O \tag{8}$$

doit être satisfaite. Le calcul du premier membre de cette identité, en tenant compte de (7) donne:

$$\left(\frac{\partial \Gamma^{a}_{i\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial \Gamma^{a}_{i\beta}}{\partial x^{\gamma}}+\Gamma^{a}_{\kappa\beta}\,\Gamma^{\kappa}_{i\gamma}-\Gamma^{a}_{\kappa\gamma}\,\Gamma^{\kappa}_{i\beta}\right)l^{i}=O\,.$$

L'expression entre parenthèses est le tenseur de courbure $K^{a}_{i\beta\gamma}$ de l'espace au point P. Pour que cette identité soit satisfaite pour un point de rapportquelconque O, l^a pouvant alors prendre des valeurs quelconques, on doit avoir:

$$K^{a}_{i\beta\gamma}=O\,, \tag{9}$$

c. à. d. l'espace doit être euclidien. Dans le cas contraire, il ne peut pas exister de fonctions l^a vérifiant les relations (7).

§ 4. La raison pour laquelle les relations (7) sont vérifiées seulement dans l'espace euclidien est que la construction précédente de l^a n'est valable que pour cet espace. Si dans un espace riemannien général nous joignons deux points O et P par des lignes différentes, et nous appliquons pour chacune de celle-ci la construction précédente, nous obtiendrons en P un vecteur l^a différent, suivant la ligne suivie pour y arriver. Cette construction ne définit donc une fonction vectorielle de P, que dans l'espace euclidien. Donc, contrairement à la relation (5) qui est valable également dans la théorie de la gravitation, la loi des moments, sous sa forme précédente, est valable seulement dans la théorie de la relativité restreinte.

On pourrait, pour éviter cette difficulté, utiliser un chemin déterminé entre O et P. Mais un tel chemin ne peut être qu'une ligne géodésique entre O et P, et dans ce cas il y a une autre difficulté: Entre O et P on peut en général avoir plusieurs lignes géodésiques [1]. Et puisque l'application de

[1] Un exemple de plusieurs lignes géodésiques entre deux points se presénte dans le cas du champs de gravitation de symétrie sphérique autour d'un point matériel M. Ce champs est donné par la solution de Schwarzschild, laquelle détermine également le mouvement d'un corpuscule quelconque dans ce champs. Soit A le point de départ du corpuscule dans le champs consideré. Son mouvement est plan, de sort qu'après un certain temps, le corpuscule arrivera à un second point A' de AM (pour autant que la vitesse à l'origine soit telle qu'il en résulte une trajectoire «elliptique»). Si alors le plan de la trajectoire est modifié autour de AM, la trajectoire passe à nouveau par A', et le temps employé pour le passage de A à A' a toujours la même valeur. Aussi dans l'espace quadridimensionnel ces mouvements correspondent à des lignes géodésiques entre les mêmes points A et A'.

cette construction donne en P un vecteur l^a tangent à la ligne géodésique utilisée (la mesure de ce vecteur étant égal à la longueur de l'arc OP), il en résulte que cette méthode ne peut également donner une fonction vectorielle univalente l^a de P. Il serait éventuellement possible de definir par cette construction un champs l^a uniforme pour une portion limitée de l'espace. Mais cela n'est pas suffisant pour la loi des moments: Le passage de la relation différentielle (4) à celle intégrale (4a) n'est possible que dans le cas où (4) est valable pour l'espace entier. (En dehors de cela l^a, défini de cette manière, devrait vérifier encore la relation (6), ce qui ne semble pas probable).

§ 5. Un deuxième essai devrait se baser non pas sur la définition de l^a par une méthode géométrique, mais sur une généralisation analytique de (7)[1]. Cette généralisation aurait la forme suivante:

$$\frac{\partial l^a}{\partial x^\beta} = \delta^a_\beta - \Gamma^a_{i\beta} l^i + X^a_\beta , \tag{10}$$

où le tenseur $X^{a\beta}$ serait différent de zéro seulement dans le cas où l'espace n'est pas euclidien. Ce tenseur doit, en premier lieu, satisfaire l'identité (8), de laquelle on tire la condition suivante:

$$K^a_{i\beta\gamma} l^i + \frac{\partial X^a{}_\beta}{\partial X^\gamma} - \frac{\partial X^a{}_\gamma}{\partial X^\beta} - \Gamma^a_{i\beta} X^i{}_\gamma + \Gamma^a_{i\gamma} X^i{}_\beta = O . \tag{11}$$

Il doit également satisfaire l'identité (6), qui donne:

$$T^i{}_a X_{\beta i} - T^i{}_\beta X_{ai} = O . \tag{12}$$

Des solutions $X^{a\beta}$ satisfaisant la relation (11) sont possibles, au moins pour des portions limitées de l'espace, ainsi que le montre la construction précédante de l^a à l'aide de lignes géodésiques. Mais il n'est pas possible que (11) soit verifié par un tenseur $X^{a\beta}$, qui serait simplement fonction de $g_{a\beta}$ et de leurs derivées au point P: Car si cela était, étant donné que l^a peut prendre des valeurs quelconques, tout point de l'espace pouvant servir de point de repère O, le premier terme de (11) devrait s'annuler seul, et l'espace serait encore euclidien. Le tenseur $X^{a\beta}$, qui résulterait d'une intégration de (11), devrait encore satisfaire à (12), de sorte que—si cela était possible—il en résulterait une expression excessivement compliquée de la loi des moments. Il

---

[1] Nous devons partir de (7), car les équations de la théorie de la gravitation doivent conduire aux éqnations de la relativité restreinte, lorsque la constante d'attraction universelle K est supposée tendre vers zéro.

y a encore un autre point à satisfaire, qui, suivant ce qui précéde, constitue une nouvelle difficulté: Ces l^a, qui résulteront finalement de l'intégration de (10), doivent être definis de façon uniforme dans tout l'espace.

Ces difficultés laissent présumer que la loi des moments n'est probablement pas susceptible d'être étendue pour le cas de la relativité généralisée. Pourtant, vu l'importance de cette conclusion, les remarques précédentes ne sont pas considérées suffisantes et il faut attendre qu'une démonstration complète en soit donnée.

ΠΕΡΙΛΗΨΙΣ

Εἰς τὴν εἰδικὴν σχετικότητα ἰσχύουν δύο νόμοι διατηρήσεως. Ὁ πρῶτος εἶναι ὁ νόμος τῆς ποσότητος κινήσεως καὶ ἐνεργείας, καὶ ὁ δεύτερος ὁ νόμος τῶν ροπῶν. Ὁ πρῶτος ἀπὸ τοὺς νόμους αὐτοὺς ἰσχύει καὶ εἰς τὴν θεωρίαν τῆς βαρύτητος.

Ὁ νόμος τῶν ροπῶν διετυπώθη ἀρχικῶς διὰ τὴν εἰδικὴν σχετικότητα. Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν διερευνᾶται ἡ δυνατότης τῆς γενικεύσεως τοῦ νόμου αὐτοῦ καὶ διὰ τὴν θεωρίαν τῆς βαρύτητος. Ἡ διερεύνησις στηρίζεται εἰς τὴν διατύπωσιν τοῦ νόμου διὰ τυχὸν σύστημα συντεταγμένων εἰς τὸν εὐκλείδιον χῶρον τῆς εἰδικῆς σχετικότητος. Προκύπτουν διάφοροι οὐσιώδεις δυσχέρειαι διὰ τὴν γενίκευσίν του εἰς τὴν θεωρίαν τῆς βαρύτητος, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν πιθανὸν ὅτι ὁ νόμος τῶν ροπῶν δὲν ἰσχύει εἰς τὴν γενικὴν θεωρίαν τῆς σχετικότητος.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΧΗΜΕΙΑ. — Τὸ ἀσκορβινικὸν ὀξὺ (βιταμίνη C) ὡς ἀντιδραστήριον εἰς τὴν Ἀναλυτικὴν Χημείαν. III. Προσδιορισμὸς σεληνίου σταθμικῶς, *ὑπὸ **Ἐλευθερίου Κ. Στάθη****. — Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Κ. Ζέγγελη.

Παρετηρήθη ὅτι κατὰ τὴν ἐπίδρασιν ἀσκορβινικοῦ ὀξέος ἐπὶ διαλύματος σεληνιώδους ὀξέος, τὸ σεληνιῶδες ὀξὺ ἀνάγεται πρὸς ἐρυθρὸν μεταλλικὸν σελήνιον.

Ἡ ἀντίδρασις αὕτη τοῦ σεληνίου μετὰ τοῦ ἀσκορβινικοῦ ὀξέος ἐχρησιμοποιήθη ἐπιτυχῶς πρὸς ἀνίχνευσιν τοῦ σεληνίου, τὰ ἀποτελέσματα δὲ τῆς μελέτης ταύτης ἀνεκοινώθησαν εἰς τὴν Ἀκαδημίαν Ἀθηνῶν.

Στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς ἀντιδράσεως ταύτης προτείνομεν νέαν μέθοδον προσδιορισμοῦ τοῦ σεληνίου σταθμικῶς.

---

* **E. C. STATHIS, Ascorbic acid (vitamin C) as analytical reagent. III Gravimetric determination of selenium.**