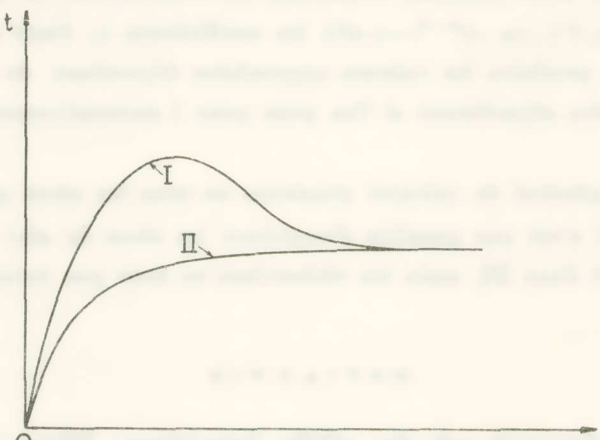
ΑΝΤΟΧΗ ΥΛΙΚΩΝ.—Ἡ ὀλίσθησις πλακῶν ἐκ προεντεταμένου σκυροδέματος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, *ὑπὸ* ***Περ. Σ. Θεοχάρη****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Κωνστ. Παπαϊωάννου.

Ἡ ὀλίσθησις πλακῶν ἐκ προεντεταμένου σκυροδέματος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, τυγχάνει μεγάλης σπουδαιότητος εἰς τὴν τεχνολογίαν κατασκευῆς ὁδῶν καὶ διαδρόμων ἀεροδρομίων. Ἡ ὀλίσθησις αὕτη ἐπιτρέπει τὴν μετάδοσιν τῆς δυνάμεως προεντάσεως ἐκ τῆς πλακὸς πρὸς τὸ ἔδαφος καὶ τὴν μεταβολὴν ταύτης, διότι ἀκόμη καὶ εἰς τὴν λύσιν τὴν οὕτως ἀποκαλουμένην ὡς σταθεροῦ τύπου πλακός, εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκτελῶνται ἐπανατάξεις φορτίσεως, αἱ ὁποῖαι παρέχουν εἰς τὸ σκυρόδεμα ἑκάστοτε τὴν ἀπολεσθεῖσαν τυχὸν προέντασιν εἴτε ἐξ ἑρπυσμοῦ εἴτε ἐκ συστολῆς.

Αἱ πλάκες ἐκ σκυροδέματος ἀποχύνονται ἐπὶ λεπτοῦ στρώματος ἄμμου. Οὕτω ἡ κατωτέρα διαχωριστικὴ ἐπιφάνεια σκυροδέματος - ἄμμου καθίσταται ἀρκούντως



Σχ. 1. Καμπύλαι διατμητικῶν δυνάμεων - σχετικῶν μετατοπίσεων διὰ πυκνὰς ἄμμους (καμπύλη I) καὶ χαλαρὰς ἄμμους (καμπύλη II) προκύπτουσαι ἐκ τῆς δοκιμῆς τῆς ἀπ' εὐθείας διατμήσεως.

ἀνώμαλος, δημιουργοῦσα σημαντικὴν τριβὴν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς ἄμμου. Ὅθεν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ παραδεκτόν, ὅτι ἡ ὀλίσθησις πλακὸς - ὑποβάσεως λαμβάνει χώραν μᾶλλον ἐντὸς τοῦ στρώματος τῆς ἄμμου καὶ ἑπομένως ὁ συντελεστὴς τριβῆς τῶν δύο σωμάτων πρέπει νὰ συνδέεται μὲ τὴν γωνίαν ἐσωτερικῆς τριβῆς τῆς ἄμμου.

* P. S. THEOCARIS, The Sliding of Prestressed Concrete Slabs on the Soil.

Ἐν τούτοις ἔχει ἀποδειχθῆ διὰ πειραμάτων ἐπὶ πλακῶν ἐκ σκυροδέματος ἐν χρήσει, καθὼς ἐπίσης καὶ ἐπὶ δοκιμίων ὑπὸ κλίμακα, ὅτι τὸ φαινόμενον τῆς ὀλισθήσεως τῶν πλακῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εἶναι περισσότερον πολύπλοκον καὶ πρέπει νὰ συνδεθῆ μὲ ἀντίστοιχα φαινόμενα, παρατηρούμενα εἰς πειράματα ἐπὶ ἐδαφῶν κατὰ τὴν δοκιμὴν ἀπ' εὐθείας διατμήσεως. Ἡ καμπύλη τῆς διατμητικῆς δυνάμεως — σχετικῆς μετατοπίσεως ἡ λαμβανομένη κατὰ τὴν ὀλίσθησιν πλακῶν ἐκ σκυροδέματος ἐπὶ ὑποβάσεων ἐξ ἄμμου ἀποδεικνύεται ὅτι σχεδὸν ταὐτίζεται μὲ τὴν ἀντίστοιχον καμπύλην τὴν λαμβανομένην κατὰ τὴν δοκιμὴν ἀπ' εὐθείας διατμήσεως. Ἡ διατμητικὴ δύναμις ἢ διατμητικὴ τάσις t μετρουμένη εἰς ἓν τοιοῦτον πείραμα εἶναι συνάρτησις τῆς σχετικῆς μετατοπίσεως τῶν δύο διατεμνομένων μερῶν τῆς ἄμμου. Αἱ καμπύλαι $t=t(u)$, αἱ λαμβανόμεναι ἐκ διαφόρων τύπων ἄμμου κεῖνται μεταξὺ δύο ἀκραίων περιπτώσεων I, II, παρουσιαζομένων εἰς τὸ Σχ. 1. Ἡ καμπύλη I, παρουσιάζουσα κωδωνοειδῆ μορφήν, ἀντιστοιχεῖ εἰς πυκνὰς ἄμμους, ἰσχυρῶς συμπεπυκνωμένας, εὐρείας διαβαθμίσεως, ἢ περιεχούσας λεπτότατα ἢ καὶ ἀσβεστολιθικὰ σωματίδια. Τὸ ἕτερον ὅριον, χαρακτηριζόμενον ὑπὸ τῆς καμπύλης II, ἡ ὁποία εἶναι ὁμαλὴ καμπύλη, ἀντιστοιχεῖ εἰς χαλαρὰς ἄμμους, ἐλαφρῶς συμπεπυκνωμένας ἢ εἰς καθαρὰς πυριτικὰς ἄμμους, αἱ ὁποῖαι παρουσιάζουν στενὴν διαβάθμισιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ἡ ἐξ ἄμμου ὑπόβασις δὲν ἔχει εἰδικῶς ἐπιλεγῆ μὲ ὡρισμένην διαβάθμισιν, καὶ ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι μᾶλλον πυκνή, καθ' ὅσον ὑπέστη ἔντονον προκαταρκτικὴν δόνησιν, πρέπει ν' ἀναμένεται, ὅτι θὰ παρέχῃ καμπύλας τοῦ τύπου I. Ἐν τούτοις ὅμως, πρέπει ν' ἀναφερθῆ ὅτι ἡ συμπίεσις τῆς ὑποβάσεως ἄμμου, τῆς κειμένης ὑπὸ τὴν πλάκα ἐκ σκυροδέματος, εἶναι γενικῶς μικρὰ ἀκόμη καὶ κατὰ τὴν στιγμὴν διόδου βαρέων ὀχημάτων. Οὕτω τυχὸν ὑπάρχον φαινόμενον συναφείας εἰς τὴν ὑπόβασιν ἐξ ἄμμου, ἔστω καὶ ἂν τοῦτο εἶναι ἀσήμαντον, ἐπιδρᾷ σημαντικῶς ἐπὶ τοῦ μεγέθους σχετικῆς μετατοπίσεως τῆς πλακὸς πρὸς τὸ ἔδαφος. Διὰ τὴν ἀποφυγὴν ἀφ' ἑνὸς μὲν τῶν ἐνοχλητικῶν φαινομένων τῆς συναφείας, ἀφ' ἑτέρου δὲ τῆς ἐπιδράσεως τῆς ποιότητος τοῦ ἐδάφους τοῦ εὑρισκομένου κάτωθεν τῆς ὑποβάσεως ἄμμου, εἶναι ἀπαραίτητον νὰ χρησιμοποιῶνται εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ἄμμοι ἀποτελούμεναι ἀπὸ καθαρὰ σκληρὰ καὶ ἀνθεκτικὰ σωματίδια, κατὰ προτίμησιν πυριτικά, ἐλεύθερα ἀργιλικῶν προσμείξεων καὶ ἄλλων ἐπιβλαβῶν ξένων οὐσιῶν, καὶ παρουσιάζουσαι στενὴν διαβάθμισιν. Ἡ ποιότης αὕτη ἄμμου δίδει καμπύλην διατμητικῆς δυνάμεως-σχετικῆς μετατοπίσεως, τείνουσαν πρὸς τὴν καμπύλην II τοῦ Σχ. 1. Ἡ ποιότης αὕτη ἄμμου παρουσιάζει ἑπομένως καμπύλην ὁμοιομόρφως μεταβαλλομένης καμπυλότητος ἀπὸ τῆς ἀρχῆς μέχρι τῆς ἀστοχίας καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου παρουσιάζει αὕτη κωδωνοειδῆ μορφήν, τὸ μέγιστον τῆς καμπύλης ταύτης εἶναι μᾶλλον ἀσήμαντον.

Ἡ ὀλίσθησις ἐπιμήκους πλακὸς ἐκ σκυροδέματος ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, ὠθουμένης κατὰ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς ὑπὸ δυνάμεως F_0 δύναται νὰ μελετηθῇ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς ἐλαστικῆς παραμορφώσεως τῆς πλακὸς ἐκ σκυροδέματος, ἥτις ὑπεισέρχεται τροποποιοῦσα τὸ μέγεθος μετατοπίσεως τῆς πλακὸς ἀπό τινος σημείου εἰς ἕτερον. Διὰ τὸν ταχύτερον ὑπολογισμὸν τῆς σχετικῆς μετατοπίσεως πλακὸς-ὑποβάσεως ἄμμου κρίνεται κατάλληλος ἡ ἁπλοποίησις τοῦ νόμου τῆς ἀντιστάσεως τῆς ἄμμου εἰς διάτμησιν. Τρεῖς εἶναι αἱ μέχρι σήμερον γνωσταὶ τοιαῦται ἁπλοποιήσεις ([1]). Ἡ πρώτη ἁπλοποίησις ἀντιστοιχεῖ εἰς ἁπλοῦν νόμον, κατὰ τὸν ὁποῖον ἡ τριβὴ τῆς ἄμμου λαμβάνεται σταθερά. Τὸ δεύτερον διάγραμμα ἐξομοιοῖ τὴν καμπύλην $t=t(u)$ μὲ δύο εὐθείας γραμμάς, ἐξ ὧν ἡ μία διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἐλαστικὸν τμῆμα τῆς καμπύλης καὶ ἡ ἑτέρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν u καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς ὀλίσθησιν ὑπὸ σταθερὰν τριβήν. Εἰς τὸ τρίτον διάγραμμα τὸ ἐλαστικὸν τμῆμα τῆς προηγουμένης καμπύλης, ὅπερ παρίστατο δι' εὐθείας γραμμῆς, ἀντικαθίσταται ὑπὸ τεταρτημορίου ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης, διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς καὶ συνεχιζομένης ὑπὸ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν u. Ἡ τελευταία αὕτη παραδοχὴ προσεγγίζει περισσότερον πρὸς τὴν καμπύλην τὴν λαμβανομένην ἐκ τῆς δοκιμῆς ἀπ' εὐθείας διατμήσεως. Ἐν τούτοις πᾶσαι αἱ ἀναφερθεῖσαι προσεγγίσεις τῆς καμπύλης $t=t(u)$ παρουσιάζουν περιωρισμένην προσαρμοστικότητα πρὸς τὰς διαφόρους πειραματικὰς καμπύλας, δεδομένου δὲ ὅτι ἀποτελοῦνται ἐκ διαφόρων τμημάτων, ἐκφραζομένων ὑπὸ διαφόρων ἀναλυτικῶν ἐξισώσεων, χρήζουν κεχωρισμένου ὑπολογισμοῦ τῶν συνιστωσῶν τῆς πλακὸς μετατοπίσεως τῶν ἀντιστοιχουσῶν εἰς τὰ διάφορα τμήματα τῆς καμπύλης.

Ἐν τῇ ἀνακοινώσει ταύτῃ δίδεται ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῆς καμπύλης $t=t(u)$, προσεγγίζουσα περισσότερον τὰ πειραματικὰ ἀποτελέσματα ἐκ τῆς δοκιμῆς τῆς ἀπ' εὐθείας διατμήσεως. Ἡ ἔκφρασις αὕτη τῆς καμπύλης $t=t(u)$ παρουσιάζει, ἔναντι τῶν προγενεστέρων λύσεων, τὰ πλεονεκτήματα τῆς διὰ μιᾶς ἐξισώσεως ἀναλυτικῆς ἐκφράσεως τῆς ὅλης καμπύλης $t=t(u)$ καὶ ἑπομένως τῆς συνεχοῦς καὶ ὁμαλῆς μεταβάσεως εἰς τὰ διάφορα τμήματα τῆς καμπύλης καὶ τῆς ἱκανοποιητικῆς προσαρμοστικότητος εἰς τὰς πειραματικὰς καμπύλας τὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ἀκραίων καταστάσεων I καὶ II τοῦ σχήμ. 1.

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΟΛΙΣΘΗΣΕΩΣ

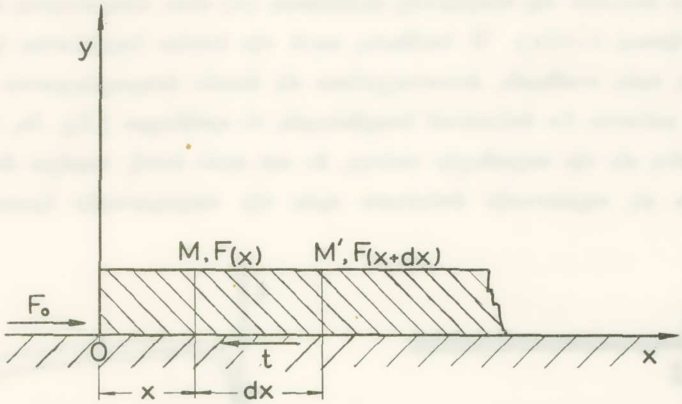
Θεωρήσωμεν ἡμιάπειρον πλάκα ἐκ προεντεταμένου σκυροδέματος πάχους e καὶ κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Τὸ ἓν ἄκρον τῆς πλακός, ὅπερ λαμβάνεται, συμπῖ-

1. R. Peltier, «Contribution à l'étude des routes en béton precontraint», Laboratoire des Ponts et Chaussées, Publication No 58-2, Ὀκτώβρ. 1958

πτον μὲ τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων (Σχ. 2), ὑποβάλλεται εἰς ὤθησιν F_o ἀνὰ μονάδα πλάτους πλακός. Ἐὰν ἡ πίεσις ἀνὰ μονάδα πλάτους ληφθῇ ἴση πρὸς f_o, τότε ἡ ὤθησις ἀνὰ μονάδα πλάτους ἐκφράζεται κατὰ τὰ γνωστὰ ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$F_o = f_o \, e$$

Θεωρήσωμεν τὴν ἰσορροπίαν τοῦ στοιχείου MM′ (Σχ. 2) τῆς πλακὸς ἀνὰ μονάδα πλάτους ἔχοντος μῆκος dx καὶ εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς ἀρχῆς. Τὸ στοιχεῖον τοῦτο ὑποβάλλεται εἰς ἀμφότερα τὰ ἄκρα του εἰς τὰς ὠθήσεις $F(x+dx)$



Σχ. 2. Τμῆμα πλακὸς ἐκ προεντεταμένου σκυροδέματος κειμένης ἐπὶ ὑποβάσεως ἐξ ἄμμου.

καὶ $F(x)$, προερχομένας ἐκ τῆς πλακός, καὶ εἰς τὴν δύναμιν S, ὀφειλομένην εἰς τὴν τριβὴν τῆς πλακὸς ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ ἡ ὁποία ἰσοῦται πρὸς $S = t\,dx$. Ἡ ἰσορροπία τοῦ στοιχείου τούτου κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τῶν x δίδει :

$$F(x+dx) - F(x) = -t\,dx \quad \text{ἢ} \quad t = -e\,\frac{df}{dx} \tag{1}$$

Ἐὰν ἐκφράσωμεν δι᾽ u τὴν σχετικὴν μετατόπισιν τῆς πλακὸς πρὸς τὸ ἔδαφος εἰς τὸ σημεῖον M, ἡ σύνθλιψις μεταξὺ τῶν σημείων M καὶ M′ τῆς πλακὸς συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Hooke θὰ ἰσοῦται :

$$u(x+dx) - u(x) = \frac{f\,dx}{E}$$

ἔνθα E τὸ μέτρον ἐλαστικότητος τοῦ σκυροδέματος.

Ὅθεν προκύπτει ὅτι :

$$f = -E\,\frac{du}{dx} \tag{2}$$

Αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) παρέχουν τὴν ἀκόλουθον διαφορικὴν ἐξίσωσιν

$$Ee\,\frac{d^2u}{dx^2} = t(u) \tag{3}$$

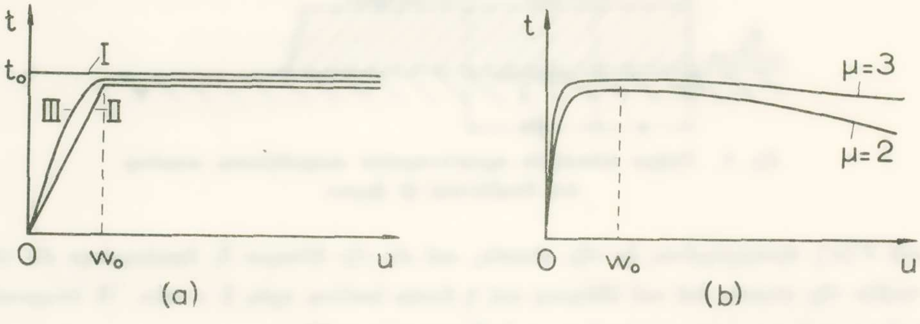
ἔνθα t(u) εἶναι γνωστὴ συνάρτησις τῆς μετατοπίσεως u. Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις (3) μετὰ τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν εἰς τὰ σύνορα τῆς πλακὸς ἐπιτρέπουν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Αἱ ἀρχικαὶ συνθῆκαι εἶναι αἱ κάτωθι :

α) Διὰ $x=0$, $\quad f = -E \dfrac{du}{dx} = fo$

β) Διὰ $x=l$, ἔνθα $u=0$ δέον ὅπως $\dfrac{du}{dx} = 0$ ἤτοι $f=o$

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (3) εἶναι ἀπαραίτητος ὁ καθορισμὸς τῆς συναρτήσεως $t=t(u)$. Ἡ ὑπόθεσις, κατὰ τὴν ὁποίαν λαμβάνεται ἡ συνάρτησις $t=t(u)$ ἴση πρὸς σταθεράν, ἀντιστοιχοῦσαν εἰς ὑλικὸν ἀπαραμόρφωτον - ἀπολύτως πλαστικόν, φαίνεται ὅτι ἁπλοποιεῖ ὑπερβολικῶς τὸ πρόβλημα (Σχ. 3α, I). Ἡ λύσις ἡ στηριζομένη εἰς τὴν παραδοχὴν ταύτην, ἂν καὶ πολὺ ἁπλῆ, παρέχει ἀποτελέσματα εὑρισκόμενα εἰς σημαντικὴν ἀπόκλισιν πρὸς τὴν πειραματικὴν ἐμπειρίαν.



Σχ. 3. Διαγράμματα καμπύλων διατμητικῶν δυνάμεων - σχετικῶν μετατοπίσεων ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς τέσσαρας περιπτώσεις. Τὰ σχήματα α (I - III) παριστοῦν ἀντιστοίχως συνεκτικὴν - πλαστικήν, ἐλαστικὴν - πλαστικὴν καὶ ἡμιτονοειδῆ - πλαστικὴν καμπύλην τ τ(υ). Τὸ σχῆμα β παριστᾷ δύο περιπτώσεις τῆς προτεινομένης λύσεως διὰ μ=2 καὶ 3 ἀντιστοίχως).

Ἡ παραδοχὴ ὑλικοῦ ἐλαστικοῦ - ἀπολύτως πλαστικοῦ (Σχ. 3α, II) φαίνεται παρέχουσα μεγαλυτέραν προσέγγισιν, ἀλλὰ μειονεκτεῖ ὡς πρὸς τὰς δυνατότητας προσαρμογῆς της εἰς τὰ πειραματικὰ δεδομένα καὶ ὡς πρὸς τὴν ἀνάγκην ἀναφορᾶς εἰς διαφόρους ἀναλυτικὰς συναρτήσεις, ἀναλόγως τοῦ μεγέθους τῆς ὁλικῆς μετατοπίσεως τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς πλακός. Ἑτέρα προσεγγιστικὴ λύσις προετάθη, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἐλαστικὸν τμῆμα τῆς προηγουμένης παραδοχῆς ἀντικαθίσταται διὰ τοῦ τετάρτου μήκους κύματος ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης, τοῦ ἑτέρου τμήματος παραμένοντος παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν u (Σχ. 3α, III). Ἡ παραδοχὴ αὕτη δύναται νὰ παράσχῃ μεγαλυτέραν προσέγγισιν, εὑρισκομένην ἐγγύτερον πρὸς τὰ πειραματικὰ δεδομένα, ἀλλὰ καὶ ἡ λύσις αὕτη ἔχει τὰ αὐτὰ μειονεκτήματα, ὡς καὶ ἡ προηγουμένη.

Ὡς καταλληλοτέρα ἀναλυτικὴ προσέγγισις τῆς καμπύλης $t=t(u)$ εἰσάγεται ἡ ἀκόλουθος συνάρτησις :

$$t(u) = to \left[(\mu+1) \left(\frac{u}{wo} \right)^{\frac{1}{1+\mu}} - \mu \left(\frac{u}{wo} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right] \tag{5}$$

ἔνθα to, wo καὶ μ εἶναι παράμετροι καθοριζόμεναι ἐκ τῶν εἰδικῶν συνθηκῶν ἑκάστης περιπτώσεως. Τὸ σχῆμα 3β δίδει τὴν οἰκογένειαν τῶν καμπύλων $t=t(u)$ τὴν προκύπτουσαν ἐκ τῆς σχέσεως (5) διὰ διαφόρους τιμὰς τοῦ μ, λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ τιμαὶ wo καὶ to συμπίπτουν μὲ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν καμπύλων τοῦ σχήματος 3α.

Ἡ σχέσις (5) παρουσιάζει τὰ κάτωθι χαρακτηριστικά :

α) Διὰ $x=0$, $t(0)=0$ ἐνῷ $t'(0)=\infty$

Αἱ συνθῆκαι αὗται εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς πλακὸς ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πραγματικὴν μορφὴν τῶν πειραματικῶν καμπύλων $t=t(u)$ διαφόρων τύπων ἄμμου.

β) Διὰ $0<u<w$ ἡ συνάρτησις $t=t(u)$ εἶναι αὔξουσα, παρουσιάζουσα μικρὰν καμπυλότητα.

γ) Διὰ $u=wo$ παρουσιάζει αὕτη μέγιστον $tmax=t(wo)=to$

δ) Διὰ $u>wo$ ἡ καμπύλη καθίσταται βραδέως φθίνουσα, μηδενιζομένη εἰς τὸ σημεῖον $u\mu = wo \left(\frac{\mu+1}{\mu} \right)^{\mu(\mu+1)}$

Δι' αὐξούσας τιμὰς τοῦ μ τὸ σημεῖον μηδενισμοῦ τῆς συναρτήσεως $t(u)$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν u ἀπομακρύνεται ταχέως ἐκ τῆς ἀρχῆς καὶ ὁ κλάδος τῆς καμπύλης $t=t(u)$ διὰ $u>wo$ τείνει νὰ γίνῃ εὐθεῖα γραμμή, παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν u.

ε) Διὰ $0<u<wo \left(\frac{\mu^2}{\mu^2-1} \right)^{\mu(\mu+1)}$ ἡ καμπύλη $t=t(u)$ στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω.

Διὰ $u=wo \left(\frac{\mu^2}{\mu^2-1} \right)^{\mu(\mu+1)}$ ἡ καμπύλη παρουσιάζει σημεῖον καμπῆς, ἐνῷ διὰ $u>wo \left(\frac{\mu^2}{\mu^2-1} \right)^{\mu(\mu+1)}$ ἡ καμπύλη στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ ἄνω.

Πειράματα γενόμενα εἰς τὴν μηχανὴν ἀπ' εὐθείας διατμήσεως ἐπὶ σειρᾶς ὅλης διαφόρων τύπων πυριτικῶν ἄμμων ἔδωσαν καμπύλας παρουσιαζούσας τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς ἀναλυτικῆς καμπύλης $t=t(u)$ εἰς περιοχὴν διατμητικῶν μετατοπίσεων μεταξὺ 0 καὶ 100 mm. Ἡ περιοχὴ αὕτη ὑπερβαίνει κατὰ πολὺ τὴν περιοχὴν τὴν χρησιμοποιουμένην κατὰ τὰς ἐφαρμογάς, ὅπου αἱ συνολικαὶ μετατοπίσεις δὲν ὑπερβαίνουν τὰ 10 ἕως 20 mm. Περαιτέρω εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἐνταῦθα ἡ παρατήρησις, ὅτι ἡ στατιστικὴ μέση καμπύλη $t=t(u)$, ἥτις δέον ὅπως εἰσαχθῇ εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς τῆς σχετικῆς διατμητικῆς μετατοπίσεως ὁδῶν καὶ διαδρόμων ἀεροδρομίων, δὲν συμπίπτει ἀπολύτως μὲ τὴν καμπύλην τὴν λαμβανομένην εἰς τὴν δοκιμὴν ἀπ' εὐθείας διατμήσεως, ἕνεκα τῆς διασπορᾶς τῶν τιμῶν to καὶ wo καὶ τοῦ μεγάλου μήκους τῶν κατασκευαζομένων διαδρόμων ἀεροδρομίων καὶ ὁδῶν. Συνεπῶς, λογικὸν εἶναι νὰ ἀναμένεται ὁμαλωτέρα καμπύλη, καλύτερον προσαρμοζομένη πρὸς τὴν προτεινομένην ἀναλυτικὴν λύσιν.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἐκλογὴν τοῦ συντελεστοῦ μ παρατηρεῖται, ὅτι ὁ συντελεστὴς οὗτος δέον ὅπως εἶναι ἀκέραιος, ἵνα τὰ ὁλοκληρώματα τὰ περιεχόμενα εἰς τὴν λύσιν τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (3) δύνανται νὰ ὑπολογίζωνται διὰ στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Μικραὶ τιμαὶ τοῦ συντελεστοῦ μ, τῆς τάξεως 2 ἢ 3, παρέχουν καμπύλας ὁμοιαζούσας πρὸς τὰς πειραματικὰς πυκνῶν ἄμμων. Ὑψηλότεραι τιμαὶ τοῦ συντελεστοῦ μ, τῆς τάξεως 5 ἢ 6, παρέχουν καμπύλας ὁμοιαζούσας πρὸς τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς χαλαρὰς ἄμμους.

Λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι διὰ $u=0$ ἰσχύει ἐπίσης ἡ σχέσις $du/dx=0$ καὶ $du/dx<0$ διὰ πᾶν σημεῖον τῆς πλακός, ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις (3) λαμβάνει τὴν ἑξῆς μορφὴν μετὰ πρώτην ὁλοκλήρωσιν:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{f}{E} = -\sqrt{\frac{2}{Ee}}\sqrt{\int_o^u t(u)du}$$

$$\text{ἢ } \frac{du}{dx} = -\sqrt{\frac{2wo\,to}{eE}}\left(\frac{u}{wo}\right)^{\frac{(\mu+2)}{2(\mu+1)}}\left[\frac{(\mu+1)^2}{(\mu+2)} - \frac{\mu^2}{(\mu+1)}\left(\frac{u}{wo}\right)^{\frac{1}{\mu(\mu+1)}}\right]^{1/2} \qquad (6)$$

Εἰσάγοντες εἰς τὴν σχέσιν (6) τὴν ἀκόλουθον παράμετρον

$$\sin^2\varphi = \frac{\mu^2(\mu+2)}{(\mu+1)^3}\left(\frac{u}{wo}\right)^{\frac{1}{\mu(\mu+1)}} \qquad (7)$$

καὶ θέτοντες

$$A = \sqrt{\frac{2woEe}{to}} \qquad (8)$$

μετασχηματίζομεν τὴν σχέσιν (6) εἰς τὴν ἀκόλουθον :

$$\frac{dx}{d\varphi} = -A\,\frac{(\mu+1)^{\frac{3\mu^2}{2}}}{\mu^{\mu^2-1}\,(\mu+2)^{\frac{\mu^2-1}{2}}}\,(\sin\varphi)^{\mu^2-1} \qquad (9)$$

Θέτοντες ὅτι ἡ μετατόπισις u μηδενίζεται εἰς ἀπόστασιν $x=l$, τότε ἐκ τῆς σχέσεως (7) ἔχομεν ἐπίσης $\varphi=0$. Ὁλοκληροῦντες ἅπαξ ἔτι τὴν σχέσιν (9) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$(l-x) = A \frac{(\mu+1)^{\frac{3\mu^2}{2}}}{\mu^{\mu^2-1}\,(\mu+2)^{\frac{\mu^2-1}{2}}} \int_o^{\varphi} (\sin\varphi)^{\mu^2-1}\, d\varphi \qquad (10)$$

Τὸ ὁλοκλήρωμα τὸ περιεχόμενον εἰς τὴν σχέσιν (10) δύναται εὐκόλως νὰ ὑπολογισθῇ, ἀρκεῖ ἡ παράμετρος μ νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐν συνεχείᾳ ἡ ἀπόστασις l ὑπολογίζεται ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{du}{dx} = -\frac{fo}{E}$ διὰ $x=0$. Κατάλληλος τιμὴ τῆς παραμέτρου μ εὑρέθη ὅτι εἶναι ἡ τιμὴ $\mu=3$. Διὰ $\mu=3$ τὸ $\sin\varphi$ λαμβάνει τὴν τιμὴν

$$\sin^2\varphi = \frac{45}{64}\left(\frac{u}{wo}\right)^{\frac{1}{12}}$$

καὶ ἡ σχέσις (10) γράφεται :

$$(l-x) = \frac{2^{27}}{3^8.5^4} A \int_o^{\varphi} \sin^8\varphi\, du \qquad (11)$$

ἢ

$$(l-x) = 4{,}07A\left[\frac{105}{48}\varphi - \cos\varphi\sin\varphi\left(\sin^6\varphi + \frac{7}{6}\sin^4\varphi + \frac{35}{24}\sin^2\varphi + \frac{105}{48}\right)\right] \qquad (12)$$

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις (12) δύναται νὰ παρασταθῇ εἰς τὸ διάστημα $0 \leqq u \leqq 5wo$ μὲ ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν διὰ τοῦ ἑξῆς πολυωνύμου :

$$\frac{u}{wo} = 0{,}90\left(\frac{l-x}{A}\right)^3 - 0{,}24\left(\frac{l-x}{A}\right)^4 \qquad (13)$$

ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγεται ἡ ἀκόλουθος σχέσις ἐκφράζουσα τὴν τάσιν f

$$f = \frac{Ewo}{A}\left[2{,}70\left(\frac{l-x}{A}\right)^2 - 0{,}96\left(\frac{l-x}{A}\right)^3\right] \qquad (14)$$

Ἡ ἀπόστασις l εὑρίσκεται ἐκ τῆς συνθήκης, κατὰ τὴν ὁποίαν διὰ $x=0$ ἡ τάσις $f=fo$ ἢ

$$0{,}96\left(\frac{l}{A}\right)^3 - 2{,}70\left(\frac{l}{A}\right)^2 + \frac{Afo}{Ewo} = 0 \qquad (15)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη δύναται εὐκόλως νὰ λυθῇ καὶ παρέχει τὴν τιμὴν τῆς τάσεως fo. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὑπάρξεως συστολῆς τοῦ σκυροδέματος λόγῳ θερμικῶν ἢ ὑγροσκοπικῶν μεταβολῶν, ἡ συστολὴ αὕτη δύναται νὰ ἐκφρασθῇ διὰ τοῦ ὁλικοῦ συντελεστοῦ m, ὁπότε ἔχομεν τὴν μεταβολὴν τῆς σχετικῆς μετατοπίσεως

$$\frac{du}{dx} = -\frac{f}{E} - m \qquad (16)$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις (3), καθὼς ἐπίσης καὶ ἀρχικαὶ συνθῆκαί της δὲν μεταβάλλονται, ἡ σχετικὴ μετατόπισις u δύναται καὶ πάλιν νὰ ἐκφρασθῇ ὑπὸ τῆς σχέσεως (13). Ἡ τάσις f ἐκφράζεται ὑπὸ τῆς ἀκολούθου σχέσεως :

$$f = -mE + \frac{Ewo}{A}\left[2{,}70\left(\frac{l-x}{A}\right)^2 - 0{,}96\left(\frac{l-x}{A}\right)^3\right] \qquad (17)$$

καὶ ἡ ἀπόστασις l λαμβάνεται ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἀκολούθου ἐξισώσεως :

$$0{,}96\left(\frac{l}{A}\right)^3 - 2{,}70\left(\frac{l}{A}\right)^2 + \frac{A}{wo}\left(\frac{fo}{E} + m\right) = 0 \tag{18}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (13) δύναται νὰ συναχθῇ τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ σχετικὴ μετατόπισις u καθίσταται μεγίστη εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τῆς πλακός. Αὕτη ἐλαττοῦται συνεχῶς δι' αὔξουσαν τιμὴν τῆς συντεταγμένης x, ἀκολουθοῦσα παραβολὴν τετάρτης τάξεως καὶ μηδενίζεται εἰς τὴν ἀπόστασιν $x = l$.

Ἐπίσης ἡ δύναμις ἢ τάσις προεντάσεως καθίσταται μεγίστη εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τῆς πλακός. Αὕτη ὁμοίως ἐλαττοῦται δι' αὐξούσας τιμὰς τοῦ x ἀκολουθοῦσα κυβικὴν παραβολὴν καὶ μηδενίζεται εἰς τὴν ἀπόστασιν $x = l$.

Τέλος ἐκ τῆς σχέσεως (17) συνάγεται, ὅτι, εἰς τὴν περίπτωσιν ὑπάρξεως συστολῆς λόγῳ θερμικῆς ἢ καὶ ὑγροσκοπικῆς μεταβολῆς, ἡ δύναμις ἢ τάσις προεντάσεως καθίσταται μεγίστη πάλιν εἰς τὸ ἐλεύθερον ἄκρον τῆς πλακός. Αὕτη βαίνει ἐλαττουμένη προοδευτικῶς μέχρι τοῦ σημείου $x=l$, ὅπου ἀλλάσσει σημεῖον καὶ καθίσταται τάσις ἐφελκυσμοῦ καὶ ἴση πρὸς -mE. Διὰ τιμὰς $x \rangle l$ αὕτη παραμένει σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς -mE.

SUMMARY

In this paper the sliding of a prestressed concrete slab on the soil is studied assuming that the slab is semi-infinite, it is constructed rapidly and it is subjected to a constant prestressing thrust Fo at its origin. Moreover, the friction of the slab on the sand subgrade follows a law similar to that derived from the direct shear test. The shear force or shear stress t is expressed as a function of the relative displacement u of the slab in every point and this curve is shown experimentally to be in good agreement with similar curves derived from the direct shear test.

Previous attempts were made to assimilate the curve t=t(u) with standard curves formed from various segments with simple analytic expressions. These curves present a restricted adaptability to experimental data and they necessitate to recur to different analytic functions, depending upon which amount of displacement corresponds to each particular point of the slab. In this paper a more convenient analytic approximation to the curve t=t(u) is introduced which corresponds closely to the actual shape of the experimental curves and which presents the advantages of greater adaptability and the possibility of using one analytic expression of the function t=t(u) for the whole range of displacements of the slab. Moreover, hygroscopic and thermal shrinkage of the concrete was taken into account in the developed formulas and stresses and relative displacements are calculated allover the length of the slab.

The abovementioned conditions considered in this paper seem to be the more general ones which may be taken into account actually.