7. KRAUS G., *Abh. Naturf. Ges. Halle*, **16** (1885) 372.
8. MOLISCH H., Microchemie der Pflanzen, 1913; *Ber. Bot. Ges.* **29** (1911) 487.
9. NÄGELI C., *Beitr. Wiss. Bot.*, **2**, 187.
10. NIETHAMMER A., *Biochem. Zeitschr.*, 1930, CCXX, S. 356.
11. SANIO, *Bot. Ztg* (1857), p. 420.
12. SCHENK, *Ebenda*, (1857), p. 497.
13. TRÉCUL, *Bull. Soc. Bot.* (1858), p. 711.
14. TUNMANN-ROSENTHALER, Pflanzenmicrochemie. 1931.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.—Ἐπὶ τοῦ Εὐκλειδείου θεωρήματος ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων, *ὑπὸ* ***Εὐαγγ. Σταμάτη****.

Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Μιχαὴλ Στεφανίδου.

Α΄. Τὸ β΄ θεώρημα τοῦ XII βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων, ἦτο ἤδη γνωστὸν εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον (ἀκμάσαντα περὶ τὸ 430 π. Χ.), ὅστις τὸ χρησιμοποιεῖ διὰ τὸν τετραγωνισμὸν τῶν μηνίσκων[1]. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι τὸ πρῶτον θεώρημα ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, τὸ ἀπαντῶν εἰς τὴν ἱστορίαν τῶν μαθηματικῶν καὶ στηρίζεται εἰς τὸ X, 1 θεώρημα τῶν Στοιχείων, ὅπερ ἐξ ἄλλου στηρίζεται εἰς τὸν ὁρισμὸν V, 4 τῶν Στοιχείων. Τὸ X, 1 θεώρημα εἶναι τὸ ὑπὸ τῶν νεωτέρων ὀνομαζόμενον «εἰδικὸν κριτήριον συγκλίσεως ἀπολύτων μεγεθῶν $\left(\alpha_\nu \leqq \frac{1}{2}\, \alpha_{\nu-1}\right)$», ὁ δὲ ὁρισμὸς V, 4 «λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν», διατυποῦται ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους (τετραγωνισμὸς παραβολῆς), «τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχὰν ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου». Κατὰ τὸν Εὐκλείδην ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος ἔχει ὡς ἑξῆς: Ἔστωσαν δύο κύκλοι οἱ K_1, K_2 ἔχοντες ἀντιστοίχως διαμέτρους τὰς ΒΔ, ΖΘ. Λέγω ὅτι

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}\,. \tag{1}$$

---

* **EVANGELOS STAMATIS, Über den euklidischen Satz, Kreise verhalten sich zueinander, wie die Quadrate über den Durchmessern.**

[1] ΕΥΔΗΜΟΥ ΤΟΥ ΡΟΔΙΟΥ καὶ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥ ΤΟΥ ΑΦΡΟΔΙΣΙΕΩΣ μαρτυρίαι, ἀπαντώμεναι εἰς τὰ σχόλια τῶν Φυσικῶν Η΄ τοῦ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ ὑπὸ Σιμπλικίου. Ἔκδοσις τῆς *Πρωσσ. Ἀκαδημίας τῶν Ἐπιστημῶν τοῦ Βερολίνου* καὶ ἐν PAULY-WISSOWA, *Real-Enzyclopaedie der classischen Altertums-Wissenschaften* (VIII. B, XVI Halbband, Sp. 1787), unter Hippokrates von Chios.

Διότι, ἐὰν δὲν εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις (1), θὰ εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις

$$\frac{Β\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma} \tag{2}$$

ἔνθα Σ ἐπιφάνεια $\leqslant K_2$.

1. Ἔστω πρῶτον

$$\frac{Β\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$$

ἔνθα $\Sigma < K_2$, καὶ ἔστω $K_2 = \Sigma + \varepsilon$, ὅπου ε ἀπείρως μικρόν. Εἰς τὸν κύκλον K_2 ἐγγράφομεν τετράγωνον, ἔπειτα ὀκτάγωνον, κατόπιν δεκαεξάγωνον,... καὶ συνεχίζομεν τὴν τοιαύτην ἐγγραφὴν μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν κυκλικῶν τμημάτων τῶν μεταξὺ πολυγώνου τινὸς καὶ τοῦ κύκλου νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ε. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ X, 1 τῶν Στοιχείων. [Ἀκολουθεῖ ἡ ἀπόδειξις τούτου]˙ Ἔστω ὅτι τὸ πολύγωνον, μετὰ τὴν ἐγγραφὴν τοῦ ὁποίου τ' ἀπομένοντα κυκλικὰ τμήματα εἶναι μικρότερα τοῦ ε, εἶναι τὸ Π_2.

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma + \varepsilon \tag{3}$$

καὶ ἄθροισμα κυκλικῶν τμημάτων $< \varepsilon$. (4)

Δι' ἀφαιρέσεως τῆς (4) ἀπὸ τῆς (3) κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$\Pi_2 > \Sigma . \tag{5}$$

Εἰς τὸν κύκλον K_1 ἐγγράφομεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ Π_2, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Π_1. Κατὰ τὸ XII, 1 τῶν Στοιχείων θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{Β\Delta^2}{Z\Theta^2} \tag{6}$$

Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\frac{Β\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma < K_2$. Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Ἐπειδὴ $\Pi_1 < K_1$, εἶναι ἄρα καὶ $\Pi_2 < \Sigma$, (V, 14). Ὅπερ ἀδύνατον˙ διότι εἰς τὴν (5) ἐδείχθη $\Pi_2 > \Sigma$ Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{Β\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma < K_2$. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{Β\Delta^2} = \frac{K_2}{M}$, (α), ἔνθα M ἐπιφάνεια $< K_1$.

2. Ἔστω δεύτερον

$$\frac{Β\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma} \tag{7}$$

ἔνθα $\Sigma > K_2$. Ἐκ τῆς (7) ἀνάπαλιν εἶναι

$$\frac{Z\Theta^2}{Β\Delta^2} = \frac{\Sigma}{K_1} \tag{8}$$

Τῶν Σ, K_1, K_2 λαμβάνει τὴν τετάρτην ἀνάλογον, ἔστω T,

$$\frac{\Sigma}{K_1} = \frac{K_2}{T} . \tag{9}$$

Ἐπειδὴ καθ' ὑπόθεσιν $\Sigma > K_2$ εἶναι ἄρα καὶ $K_1 > T$, (V, 14). Ἐκ τῶν (8) καὶ (9) λαμβάνομεν $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{T}$. Ὅπερ ἄτοπον. Διότι εἰς τὴν (α) ἐδείχθη ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $Z\Theta^2 : B\Delta^2 = K_2$: ἐπιφάνεια μικροτέρα τοῦ K_1. Ὅθεν ἀποκλείεται νὰ εἶναι $\Sigma \lessgtr K_2$. Εἶναι ἄρα $\Sigma = K_2$ καὶ συνεπῶς $\frac{K_1}{K_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$.

Β′ Ἡ ἀπόδειξις τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ θεωρήματος εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ ἀκριβῶς, ὅπως καὶ τοῦ πρώτου, διὰ συνεχοῦς περιγραφῆς εἰς τὸν κύκλον πολυγώνων ὡς ἑξῆς:

Ὑπετέθη $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα Σ ἐπιφάνεια $> K_2$, ὥστε $K_2 = \Sigma - \varepsilon$, ὅπου ε ἀπείρως μικρόν. Εἰς τὸν κύκλον K_2 περιγράφομεν τετράγωνον, ἔπειτα ὀκτάγωνον, κατόπιν δεκαεξάγωνον καὶ συνεχίζομεν τὴν τοιαύτην περιγραφὴν μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν, ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ κύκλου K_2 ἀπὸ περιγραφέντος πολυγώνου τινὸς νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ε. [Τοῦτο εἶναι δυνατὸν κατὰ τὸ X, 1 τῶν Στοιχείων καὶ τὸ ἀνευρίσκομεν ἐφαρμοζόμενον ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους εἰς τὸ α΄ θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Κύκλου μέτρησις» ἔνθα ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶς κύκλος ἰσοῦται πρὸς ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία μὲν κάθετος πλευρὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ἡ ἄλλη δὲ πρὸς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ].

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς σχέσεις

$$K_2 = \Sigma - \varepsilon, \qquad (1)$$

καὶ διαφορὰ κύκλου K_2 ἀπὸ περιγραφέντος πολυγώνου $< \varepsilon$. (2)

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\Pi_2 < \Sigma, \qquad (3)$$

ἂν καλέσωμεν Π_2 τὸ τελευταῖον πολύγωνον τὸ περιγραφὲν εἰς τὸν κύκλον K_2.

Εἰς τὸν κύκλον K_1 περιγράφομεν ὅμοιον πρὸς τὸ Π_2 πολύγωνον, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Π_1. Κατὰ τὸ XII, 1 τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου θὰ εἶναι $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{\Theta Z^2}$. Καὶ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$. Εἶναι ἄρα $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. Ἐπειδὴ $\Pi_1 > K_1$, εἶναι ἄρα καὶ $\Pi_2 > \Sigma$, (V, 14). Ὅπερ ἀδύνατον. Διότι εἰς τὴν (3) ἐδείχθη $\Pi_2 < \Sigma$. Ὥστε δὲν εἶναι $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_2$. Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ὅτι δὲν εἶναι $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{\Sigma}$, ἔνθα $\Sigma > K_1$.

ZUSAMMENFASSUNG

Der euklidische Beweis, Kreise verhalten sich zueinander, wie die Quadrate über den Durchmessern, lautet wie folgt: Gegeben zwei Kreise K_1, K_2, mit den Durchmessern BΔ bzw. ZΘ. Ich behaupte $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{K_2}$, (1).

Wenn die Beziehung (1) nicht gilt, so muss $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, wobei Σ eine Fläche $\lesseqgtr K_2$ ist.

I. Es sei erstens $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, (2), $\Sigma < K_2$, und $K_2 = \Sigma + \varepsilon$, wobei ε unendlich klein ist. Im Kreise K_2 schreiben wir ein Viereck, ein Achteck.... ein n eck ein, bis der Unterschied zwischen einem Vieleck und dem Kreise K_2 kleiner als ε wird, (X, 1). Es sei dies das Vieleck Π_2. Wir haben also die Beziehungen $K = \Sigma + \varepsilon$, (3)

Summe der Kreisabschnitte zwischen dem Kreis K_2 und Vieleck $\Pi_2 < \varepsilon$, (4)

Ziehen wir (4) von (3) ab, so bekommen wir

$$\Pi_2 > \Sigma. \tag{5}$$

Im Kreise K_1 schreiben wir dem Vieleck Π_2 ein ähnliches Vieleck Π_1 ein. Nach Euklid XII, 1 ist $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$. (6)

Aus (2) und (6) haben wir $\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{K_1}{\Sigma}$. (7)

Weil $\Pi_1 < K_1$, so ist auch $\Pi_2 < \Sigma$, (V, 14). Das ist aber wegen (5), unmöglich. Also es gilt nicht $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, wobei $\Sigma < K_1$ ist. Derselbe Beweis, dass $Z\Theta^2 : B\Delta^2 = K_2$: eine Fläche kleiner als K_1 nicht gilt. (8)

II. Es sei zweitens $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, (9), wobei $\Sigma > K_2$ ist.

Aus (9) ist $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{\Sigma}{K_1}$. (10)

Zwischen Σ, K_1, K_2 finden wir die vierte Proportionale, es sei T,

$$\frac{\Sigma}{K_1} = \frac{K_2}{T}. \tag{11}$$

Weil $\Sigma > K_2$, so ist auch $K_1 > T$, (V, 14). Aus (10) und (11) haben wir $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2} = \frac{K_2}{T}$, $T < K_1$. Das aber ist, wegen (8) unmöglich. Weil die Beziehung $\Sigma \lesseqgtr K_2$ nicht gilt, so ist $\Sigma = K_2$, und die Behauptung bewiesen.

E. Stamatis, gestützt auf das von Archimedes in seiner Kreismessung 1 angewandte Verfahren, teilt folgenden Beweis für den 2. Teil des euklidischen Satzes mit:

Es ist angenommen $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2} = \frac{K_1}{\Sigma}$, (1), $\Sigma > K_2$, $K_2 = \Sigma - \varepsilon$, wobei ε unendlich klein ist.

Im Kreise K_2 beschreiben wir stets Vielecke bis der Unterschsied zwischen einem Vieleck und dem Kreise K_2 kleiner als ε wird, (X, 1 und Kreismessung von Archimedes 1). Es sei dies das Vieleck Π_2. Wir haben also die Beziehungen

$$K_2 = \Sigma - \varepsilon \tag{2}$$

Summe der Abschnitte zwischen dem Vieleck Π_2 und dem Kreise $K_2 < \varepsilon$, (3)

Durch Addition von (3) und (2) bekommen wir $\Pi_2 < \Sigma$. (4)

Dem Kreise K_1 umschreiben wir ein dem Vieleck Π_2 ähnliches Vieleck, es sei Π_1. Nach Euklid XII, 1 ist $\frac{\Pi_1}{\Pi_2}=\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$. (5)

Aus (1) und (5) haben wir $\frac{\Pi_1}{\Pi_2}=\frac{K_1}{\Sigma}$, wobei $\Sigma > K_2$ ist.

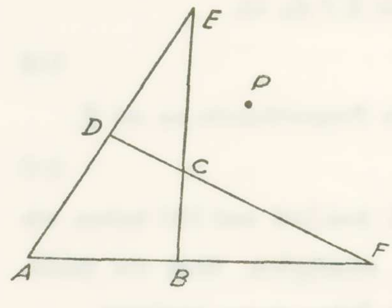
Weil nun $\Pi_1 > K_1$, so ist auch $\Pi_2 > \Sigma$, (V, 14). Dies ist aber wegen (4) unmöglich. Derselbe Beweis, dass $\frac{Z\Theta^2}{B\Delta^2}=\frac{K_2}{\Sigma}$, wobei $\Sigma > K_1$, nicht gilt. Es bleibt also $\Sigma = K_2$.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.—Περὶ ἑνὸς θεωρήματος τῆς Γεωμετρίας τοῦ Morley-Lebesque, *ὑπὸ* ***Θ. Βαροπούλου****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

Αἱ ἐσωτερικαὶ τριχοτόμοι τῶν γωνιῶν A,B,C τριγώνου τυχόντος ABC, τεμνόμεναι καθορίζουν ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Ἕπεται γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως στηριζομένη εἰς τὰ ἑξῆς γνωστά.

1. *Ἔστω ἓν πλῆρες τετράπλευρον* ABCDEF. *Τὰ τρία ζεύγη εὐθειῶν* PA, PC; PB, PD; PE, PF *ἑνουσῶν τυχὸν σημεῖον* P *μὲ τὰς ἔναντι κορυφὰς εἶναι ἐν ἐνελείξει, δηλαδὴ εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς δύο σταθερὰς εὐθείας* Px, Py.



Πράγματι αἱ ἐκ τοῦ P ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὰς κωνικάς, αἵτινες ἐφάπτονται τῶν τεσσάρων εὐθειῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, ἀποτελοῦν ἐνέλειξιν.

Μεταξὺ τῶν κωνικῶν τούτων εὑρίσκονται τὰ ζεύγη τῶν σημείων

A, C; B, D; E, F.

Ἐὰν αἱ γωνίαι (PA, PC), (PB, PD) ἔχουν τὰς αὐτὰς διχοτόμους Px, Py, τότε τὸ αὐτὸ θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὴν γωνίαν (PE, PF), καθ' ὅσον Px, Py εἶναι συζυγεῖς ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ἑκάστου τῶν δύο ζευγῶν PA, PC; PB, PD.

2. Ἔστω P ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἓν τρίγωνον ABC. Ἡ συμμετρικὴ τῆς PA ὡς πρὸς τὸ τρίγωνον εἶναι ἡ εὐθεῖα AP′, ἥτις μετὰ τῆς AC σχηματίζει τὴν αὐτὴν γωνίαν ἣν καὶ ἡ AP σχηματίζει μετὰ τῆς AB.

* **TH. VAROPOULOS, Sur un théorème de la géométrie de Morley-Lebesque.**