ΔΗΜΟΣΙΑ ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 8ΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2004

ΥΠΟΔΟΧΗ

ΤΟΥ ΑΝΤΕΠΙΣΤΕΛΛΟΝΤΟΣ ΜΕΛΟΥΣ ΠΟΛΥΧΡΟΝΗ ΔΗΜ. ΣΠΑΝΟΥ

ΠΡΟΣΦΩΝΗΣΗ ΥΠΟ ΤΟΥ ΑΝΤΙΠΡΟΕΔΡΟΥ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ
κ. ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ ΡΟΥΚΟΥΝΑ

Ἡ σημερινὴ συνεδρία εἶναι ἀφιερωμένη στὴν ὑποδοχὴ τοῦ κυρίου Πολυχρόνη Σπανοῦ, διαπρεποῦς καθηγητοῦ καὶ ἐρευνητοῦ στὸν τομέα τῆς Ἐφηρμοσμένης Μηχανικῆς. Πτυχιοῦχος τοῦ Ε.Μ.Π., συνέχισε τὶς σπουδὲς μὲ ὑποτροφία στὶς Η.Π.Α. Ἐκεῖ σταδιοδρόμησε ὡς καθηγητὴς στὰ Πανεπιστήμια Austin στὸ Texas καὶ στὸ Rice στὸ Huston Texas, ὅπου καὶ κατέχει προικοδοτημένη ἕδρα. Τοῦ ἔχουν ἀπονεμηθεῖ γιὰ τὸ ἔργο του πλεῖστα βραβεῖα καὶ τιμητικὲς διακρίσεις Ἀμερικανικὲς καὶ Γερμανικές, τὸ ὁποῖο συνίσταται σὲ διδασκαλία καὶ ἔρευνα ποὺ ἀποσκοπεῖ κυρίως σὲ ποικίλες ἐφαρμογὲς τῆς Μηχανικῆς. Ὁ κ. Σπανὸς δὲν παραμελεῖ βεβαίως καὶ τὸ θεωρητικὸ μέρος τῆς ἐπιστήμης του, τὸ ὁποῖο προκύπτει καὶ ἀπὸ τὴν πλούσια συγγραφική του δραστηριότητα. Ἐπιπλέον, ἐνθαρρύνει τὴν παρακολούθηση τῶν σχετικῶν ἐρευνῶν καὶ στὴν πατρίδα του ὀργανώνοντας διεθνῆ συνέδρια στὴν Ἑλλάδα, διδάσκοντας σὲ σεμινάρια ἑλληνικῶν πανεπιστημιακῶν ἱδρυμάτων καὶ καθοδηγώντας συμπατριῶτες μας σπουδαστὲς στὸ Πανεπιστήμιό του. Τέλος, μὲ ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον πληροφορήθηκα ὅτι ὁ κ. Πολυχρόνης Σπανὸς ἀσκεῖ καὶ δικαστικὰ καθήκοντα στὸ Τέξας.

Κύριε συνάδελφε, σᾶς ὑποδεχόμαστε μὲ μεγάλη χαρὰ στὸ ἀνώτατο αὐτὸ πνευματικὸ ἵδρυμα τῆς χώρας.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΥΠΟ ΤΟΥ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟΥ

κ. ΑΝΤΩΝΙΟΥ ΚΟΥΝΑΔΗ

Κύριε Πρόεδρε,

Ἡ Σύγκλητος τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, μετὰ ἀπὸ πρόταση τῆς Α΄ Τάξεως τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν, μοῦ ἔκανε τὴν ἰδιαίτερη τιμή, ἀλλὰ καὶ μοῦ ἔδωσε τὴν εὐχαρίστηση νὰ μοῦ ἀναθέσει τὴν ἐντολὴ νὰ παρουσιάσω τὸ νέο ἀντεπιστέλλον μέλος τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, τὸν Καθηγητὴ τοῦ Πανεπιστημίου Rice τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν, κ. Πολυχρόνη Σπανό. Ὡς ὁμότεχνος καὶ φίλος του, ἀποδέχτηκα μὲ ἰδιαίτερη χαρὰ τὴν ἐντολὴ νὰ ἀπευθύνω τὸν καθιερωμένο χαιρετισμὸ κατὰ τὴν ἀποψινὴ ἐπίσημη ὑποδοχή του.

Ἡ ἐπιστήμη τῆς «Μηχανικῆς» ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν τοῦ ὅρου ἔννοια καλύπτει μία ἐκτεταμένη γνωστικὴ περιοχή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἀκρογωνιαῖο λίθο ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζονται σχεδὸν ὅλες οἱ ἐπιστῆμες ποὺ καλλιεργοῦνται κυρίως ἀπὸ Πολυτεχνικὲς Σχολές. Ἡ ἀπὸ ἀρχαιοτάτων χρόνων ἑλληνικὴ συμβολὴ στὴν περιοχὴ τῆς Μηχανικῆς συνεχίζεται καὶ σήμερα ἀπὸ Ἕλληνες ἐρευνητὲς τόσο στὴ χώρα μας, ὅσο καὶ στὸ ἐξωτερικό. Τὴν τελευταία 30ετία ὑπάρχει πράγματι μεγάλος ὄγκος ἐρευνητικῶν ἐργασιῶν Ἑλλήνων ἐπιστημόνων στὴν εὐρύτερη περιοχὴ τῆς «Μηχανικῆς», δημοσιευθεισῶν στὰ πλέον ἔγκριτα διεθνοῦς κυκλοφορίας περιοδικά. Ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὴν διεθνῆ ἐπιθεώρηση "Mechanics Reviews", τὰ τελευταῖα 20 χρόνια οἱ Ἕλληνες ἐρευνητὲς καταλαμβάνουν διεθνῶς τὶς πρῶτες 10-15 θέσεις ἀπὸ πλευρᾶς ἀριθμοῦ ἐπιστημονικῶν δημοσιεύσεων ἐτησίως.

Ἕνας Ἕλλην ἐρευνητὴς ἰδιαίτερα διακρινόμενος στὴν περιοχὴ τῆς «Μηχανικῆς» εἶναι ὁ καθηγητὴς τοῦ Πανεπιστημίου Rice (Huston Texas) κ. Πολυχρόνης Σπανός, τοῦ ὁποίου τὸ ἐρευνητικὸ ἔργο ἑστιάζεται στὴ μελέτη μὴ γραμμικῆς δυναμικῆς καὶ ταλαντώσεων συστημάτων μέσω προσδιοριστικῶν καὶ στοχαστικῶν ἀναλύσεων.

Ὁ κ. Σπανὸς γεννήθηκε στὴν Ἀθήνα τὸ 1950. Εἶναι πατέρας 2 παιδιῶν. Τὶς ἐγκύκλιες σπουδές του ἐπεράτωσε στὸ Πρότυπο Γυμνάσιο τῆς Βαρβακείου Σχολῆς καὶ τὴν ἴδια χρονιὰ ἐπέτυχε στὶς εἰσαγωγικὲς ἐξετάσεις τῆς Σχολῆς

Μηχανολόγων - Ἠλεκτρολόγων τοῦ ΕΜΠ, ἀπὸ τὴν ὁποία ἀπεφοίτησε ὡς ὑπότροφος τοῦ ΙΚΥ τὸ 1973. Ἐν συνέχειᾳ μετέβη στὶς ΗΠΑ, ὅπου ἔγινε δεκτὸς ὡς ὑπότροφος ἀπὸ τὸ Τμῆμα Πολιτικῶν Μηχανικῶν τοῦ Τεχνολογικοῦ Ἰνστιτούτου τῆς Καλιφόρνιας, ἀπὸ τὸ ὁποῖο τὸ 1974 ἔλαβε τὸ δίπλωμα MSc. Τὸ 1976 ἔλαβε ἀπὸ τὸ ἴδιο Πανεπιστήμιο τὸ διδακτορικό του δίπλωμα (PhD) μὲ ὑψηλὴ διάκριση στὴν περιοχὴ τῆς «Ἐφηρμοσμένης Μηχανικῆς» μὲ παράλληλες συμβολὲς στὰ *Ἐφηρμοσμένα Μαθηματικὰ καὶ τὴν Οἰκονομικὴ τῶν Ἐπιχειρήσεων*. Ὁ κ. Σπανὸς διετέλεσε Καθηγητὴς στὸ πανεπιστήμιο τοῦ Τέξας (Austin) ἀπὸ τὸ 1981-1983, στὸ Πανεπιστήμιο τοῦ Rice (Τμῆμα Πολιτικῶν Μηχανικῶν καὶ Τμῆμα Μηχανολόγων) ἀπὸ τὸ 1984-1988, ἐνῶ ἀπὸ τὸ 1988 ἕως σήμερα εἶναι καθηγητὴς τοῦ ἰδίου Πανεπιστημίου στὴν ἕδρα L.R.Ryon τῆς Ἐπιστήμης τοῦ Μηχανικοῦ (Engineering Science).

Ἐπιστημονικό - Ἐρευνητικὸ ἔργο

Τὰ ἐπιστημονικά του ἐνδιαφέροντα ἐπικεντρώνονται στὰ δυναμικὰ συστήματα μὲ ἔμφαση στὴ μὴ γραμμικὴ συμπεριφορὰ καὶ στοχαστικὴ (πιθανοτικὴ) ἀνάλυση προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐφαρμογὲς στὶς περιοχὲς *δομικῆς μηχανικῆς, ἀεροδιαστημικῆς, ἀντισεισμικῆς ἀνάλυσης καὶ θαλασσίων κατασκευῶν*. Ἔχει ἀσχοληθεῖ ἐπίσης μὲ εἰδικότερα προβλήματα *σύνθετων ὑλικῶν* καὶ μὲ ἀλγορίθμους ἐπεξεργασίας σημάτων γιὰ ἰατροβιολογικὲς ἐφαρμογές, ὅπως ἠλεκτροκαρδιογραφήματα. Ἔχει ἐπινοήσει τεχνικὲς ἐπιλύσεως τόσο ἀναλυτικές, ὅσο καὶ ἀριθμητικές, οἱ ὁποῖες ἀπαιτοῦν προχωρημένο ὑπολογιστικὸ προγραμματισμὸ καὶ χρήση ὑπερυπολογιστῶν. Προσδιοριστικὲς καὶ στοχαστικὲς διαφορικὲς ἐξισώσεις ὡς καὶ ἐξισώσεις διαφορῶν, ἐνσωματώνει μὲ ἐπιτυχία σὲ διάφορα ἀριθμητικὰ σχήματα. Ἐπίσης βελτιωμένες τεχνικὲς τυχαίας ἐξομοίωσης Μόντε Κάρλο συνδυάζει εὔστοχα μὲ προχωρημένες μεθόδους ἐπεξεργασίας σημάτων καὶ ἐκτίμησης ἀσφαλείας, οἱ ὁποῖες περιέχουν ψηφιακοὺς ἠθμοὺς καὶ μετασχηματισμοὺς κυματιδίων.

Ἡ ἀποψινὴ ὁμιλία τοῦ κ. Σπανοῦ ἔχει ὡς θέμα τὴν ἱστορικὴ ἐξέλιξη καὶ συμβολὴ τῶν κυματιδίων στὴν ἀξιόπιστη ἀνάλυση σημάτων σὲ προβλήματα μὴ γραμμικῆς δυναμικῆς, στὰ ὁποῖα λαμβάνεται ὑπόψη ἡ μεταβολὴ τῶν συχνοτήτων συναρτήσει τοῦ χρόνου. Ἔχει ἐπιβλέψει 37 μεταπτυχιακὲς ἐργασίες καὶ τὶς διδακτορικὲς διατριβὲς 29 φοιτητῶν, μεταξὺ τῶν ὁποίων ὑπάρχει ἱκανὸς ἀριθμὸς ἑλλήνων ἐπιστημόνων. Ἡ ἐρευνητική του ὁμάδα περιλαμβάνει σήμερα 15 μεταπτυχιακοὺς φοιτητές.

Διαθέτει πλούσια συγγραφικὴ δραστηριότητα, ἔχοντας δημοσιεύσει περισσότερες ἀπὸ 250 ἐργασίες σὲ ἔγκριτα περιοδικὰ ἢ σὲ πρακτικὰ συνεδρίων, ἐνῶ εἶναι ἐκδότης ἢ συνεκδότης σὲ περισσότερους ἀπὸ 19 τόμους βιβλίων ἢ πρακτικῶν διεθνῶν συνεδρίων. Ἀπὸ τὸ 1990 ὀργανώνει κάθε 4 χρόνια στὴν Ἑλλάδα τὸ Διεθνὲς Συνέδριο τῆς Ὑπολογιστικῆς Στοχαστικῆς Μηχανικῆς (Κέρκυρα 1990, Ἀθήνα 1994, Σαντορίνη 1998, Κέρκυρα 2002). Ἀνήκει στὴν ἐκδοτικὴ ἐπιτροπὴ ἀρκετῶν γνωστῶν ἐγκρίτων διεθνοῦς κυκλοφορίας ἐρευνητικῶν περιοδικῶν καὶ εἶναι ὁ ἐπικεφαλῆς ἐκδότης τοῦ γνωστοῦ διεθνοῦς περιοδικοῦ «Μὴ Γραμμικὴ Μηχανική», καὶ συνεκδότης τοῦ διεθνοῦς περιοδικοῦ «Πιθανοτικὴ Τεχνικὴ Μηχανική». Διετέλεσε τεχνικὸς σύμβουλος σὲ πολλοὺς κρατικοὺς καὶ ἰδιωτικοὺς διεθνεῖς ἐπιστημονικοὺς ὀργανισμούς.

Διεθνὴς ἀναγνώριση

Ἔχει τύχει πολλῶν διεθνῶν ἀναγνωρίσεων. Ἀπὸ τὴν Ἑταιρεία Μηχανολόγων Μηχανικῶν τῶν ΗΠΑ ἔλαβε τὰ μετάλλια τῶν ἐτῶν 1982 καὶ 1991, τὸ δὲ 1988 τὸ βραβεῖο Huber τῆς Ἀμερικανικῆς Ἑταιρείας Πολιτικῶν Μηχανικῶν. Ἐπίσης ἀπὸ τὴν ἴδια ἑταιρεία ἔλαβε τὸ Μετάλλιο Φρόϋντενθαλ (Freudenthal) τὸ 1992 γιὰ τὴ συμβολή του στὴ στοχαστικὴ μηχανικὴ καὶ στὴν ἀνάλυση ἀξιοπιστίας, καὶ τὸ 1999 τὸ Μετάλλιο Νιούμαρκ (Newmark) γιὰ τὴ συμβολή του στὴ *θεωρία καὶ ἐφαρμογὲς* τῆς δυναμικῆς καὶ τῶν ταλαντώσεων. Τὸ 1995 ἔλαβε τὸ βραβεῖο ὑψηλῆς ἐρευνητικῆς ἐπιδόσεως γιὰ δόκιμους ἐπιστήμονες ἀπὸ τὸ γερμανικὸ ἵδρυμα Χοῦμπολτ (Humbolt) γιὰ τὴ συμβολή του στὴν Ἐπιστήμη τοῦ Μηχανικοῦ. Τὸ 1997 ἔλαβε στὸ Kyoto τῆς Ἰαπωνίας ἀπὸ τὴν Διεθνῆ Ἕνωση Δομικῆς Ἀσφάλειας καὶ Ἀξιοπιστίας τὸ βραβεῖο *στοχαστικῆς δυναμικῆς ἔρευνας*, ἐνῶ τὸ 2004 ἔλαβε ἀπὸ τὴν Ἀμερικανικὴ Ἑταιρεία Πολ. Μηχανικῶν τὸ Μετάλλιο "Von Karman" γιὰ τὸ συνολικό του ἔργο στὴν περιοχὴ τῆς Μηχανικῆς. Ὁ κ. Σπανὸς εἶναι ἕνας ἐμπνευσμένος δάσκαλος τῶν τεχνικῶν ἐπιστημῶν, ὁ ὁποῖος ἔχει λάβει δυὸ φορὲς (1995, 1996) τὸ βραβεῖο ἀρίστης διδασκαλίας ἀπὸ τὸ πανεπιστήμιο Rice στὸ ὁποῖο ὑπηρετεῖ. Εἶναι *ἑταῖρος* (Fellow) τῶν Ἀμερικανικῶν ἐπιστημονικῶν ἑταιρειῶν Μηχανολόγων Μηχανικῶν, Πολιτικῶν Μηχανικῶν, τῆς Ἀμερικανικῆς Ἀκαδημίας Μηχανικῆς καὶ τοῦ ἱδρύματος Ἀλεξάντερ φὸν Χοῦμπολτ (Humbolt). Εἶναι ἐπίσης μέλος (κατόπιν τιμητικῆς πρόσκλησης) σὲ πολλὲς διεθνεῖς ἐπιστημονικὲς ἑταιρεῖες.

Ὁ κ. Σπανὸς εἶναι ἔνθερμος καὶ ἀφοσιωμένος ὑποστηρικτὴς τοῦ ἑλληνικοῦ στοιχείου, ὅπως ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὴν ἔντονη παρουσία του στὸν ἑλληνικὸ χῶρο μὲ τὴ μορφὴ ἐπιστημονικῶν συνεργασιῶν μὲ Ἕλληνες συναδέλφους, μὲ τὴν ἐπίβλεψη καὶ καθοδήγηση ἑλλήνων φοιτητῶν στὸ ἵδρυμά του καὶ σὲ ἱδρύματα τῆς Ἑλλάδος, ὡς καὶ τὴν πραγματοποίηση ἐπιστημονικῶν σεμιναρίων σὲ πολλὰ ἑλληνικὰ Ἀνώτατα Ἐκπαιδευτικὰ Ἱδρύματα.

Ἀγαπητὲ συνάδελφε καὶ φίλε Πολυχρόνη,

Δὲ νομίζω ὅτι χρειάζεται νὰ ὁμιλήσω περισσότερο, ὅταν πολὺ καλύτερα καὶ πειστικότερα ὁμιλεῖ τὸ λαμπρὸ καὶ διεθνῶς ἐκτιμώμενο ἐρευνητικὸ καὶ γενικότερα ἐπιστημονικό σου ἔργο. Ἕνα ἔργο, τὸ ὁποῖο δικαίως σὲ ἔχει ἀναδείξει σὲ ἕνα κορυφαῖο ἐπιστήμονα στὴν ἐρευνητικὴ περιοχὴ ποὺ διακονεῖς. Ἡ Ἀκαδημία Ἀθηνῶν σὲ ἀναγνώριση αὐτῆς τῆς μεγάλης σου προσφορᾶς σὲ ὑποδέχεται ἀπόψε στοὺς κόλπους της μὲ τὴν εὐχή, ἀλλὰ καὶ τὴν πεποίθηση ὅτι θὰ ἀνταποκριθεῖς στὶς προσδοκίες μας, ἐνισχύοντας καὶ ἀπὸ αὐτὴ τὴ νέα θέση τοῦ Ἀντεπιστέλλοντος μέλους τὴν ἐπιστήμη, στὴν ὁποία τόσα πολλὰ μέχρι σήμερα ἔχεις προσφέρει.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΙΔΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

ΕΙΣΙΤΗΡΙΟΣ ΛΟΓΟΣ ΤΟΥ ΑΝΤΕΠΙΣΤΕΛΛΟΝΤΟΣ ΜΕΛΟΥΣ

κ. ΠΟΛΥΧΡΟΝΗ ΔΗΜ. ΣΠΑΝΟΥ

Κύριε Πρόεδρε,

Σᾶς εὐχαριστῶ θερμὰ γιὰ τὸν ἐγκάρδιο χαιρετισμὸ κατὰ τὴν ἀποψινὴ ἐπίσημη ὑποδοχή μου στὸ ἀνώτατο πνευματικὸ ἵδρυμα τῆς χώρας. Θερμὲς εὐχαριστίες ἐπίσης ὀφείλονται στὸ διακεκριμένο συνάδελφο καὶ φίλο, Ἀκαδημαϊκὸ Ἀντώνη Κουνάδη, γιὰ τὴν εὐμενῆ παρουσίαση τοῦ ἔργου μου καὶ τὴν τιμητικὴ ἀναφορὰ στὸ πρόσωπό μου. Ὄντας βαθύτατα συγκινημένος, αἰσθάνομαι ἰδιαίτερο χρέος νὰ ἐκφράσω τὶς θερμότερες τῶν εὐχαριστιῶν μου στὴν Ὁλομέλεια τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, ἡ ὁποία μοῦ ἔκανε τὴν τιμὴ νὰ μὲ συμπεριλάβει στὰ μέλη της.

Εἶναι φυσικὸ τὴ σημαντικὴ αὐτὴ στιγμὴ νὰ ἀναλογισθῶ μὲ εὐγνωμοσύνη τὰ ὅσα μοῦ προσέφερε ἡ οἰκογένειά μου καὶ ἰδιαίτερα οἱ γονεῖς μου Δημήτριος Σπανὸς καὶ Αἰκατερίνη Μπονάρου-Σπανοῦ. Οἱ γονεῖς μου ἐργάσθηκαν ὡς ἐκπαιδευτικοὶ στὴν ἀγαπημένη μου γενέτειρα καὶ ἱστορικὴ πόλη τῆς Μεσσήνης, κοινῶς γνωστὴ ὡς Νησί. Ὑπῆρξαν μόνιμοι δάσκαλοί μου στὰ θέματα τοῦ «εὖ ζεῖν» καὶ οἱ πρῶτοι μου μέντορες στὴν ποσοτικὴ ἀνάλυση καὶ ἐπιστημονικὴ ἀναζήτηση. Τοὺς εὐχαριστῶ μὲ εὐλάβεια γιὰ τὴ δυνατὴ ἀγάπη τους, ποὺ ὅμως σεβάστηκε τὴν προσωπική μου ἀνεξαρτησία καὶ ἐπιστημονικὴ δίψα.

Παράλληλα θέλω νὰ εὐχαριστήσω τὰ παιδιά μου, Δημήτρη καὶ Εὔη, ποὺ παρευρίσκονται γιὰ τὴν ἀποψινὴ ἐκδήλωση ἐκ τῆς ἀλλοδαπῆς, γιὰ τὴν ἀδιακύβευτη ἀγάπη τους, τὶς ὑγιεῖς ἐπιστημονικές τους ἀνησυχίες καὶ τὸν ἀταλάντευτο ρόλο τους ὡς δικαίων καὶ χαρισματικὰ ἀνηλεῶν κριτῶν τῶν προσωπικῶν ἐπιλογῶν μου καὶ ἐπιστημονικῆς φιλοσοφίας.

Αὐτὴ τὴ βραδιὰ ἀναλογίζομαι ἐπίσης μὲ συγκίνηση τὸν καθηγητή μου στὰ μαθηματικὰ στὴ Βαρβάκειο Πρότυπο Σχολή, κ. Γραφάκο ἢ κατὰ τοὺς τότε Βαρβακειόπαιδες, Μάστορα, τοῦ ὁποίου ἡ σοφία γιὰ τὶς ἀνθρώπινες σχέσεις καὶ ἡ ρεαλιστικὴ ἀναγνώριση τῶν δυνατοτήτων τῶν μαθητῶν του ἐπέδρασε καταλυτικὰ στὴν ὡριμότητα καὶ ἐπιστημονικὴ συνείδηση πολλῶν ἐκ τῶν τότε συμμαθητῶν μου, συμπεριλαμβανομένου καὶ ἐμοῦ. Μὲ τὴν ἴδια διάθεση θυμᾶμαι τὸν καθηγητή μου στὰ μαθηματικά, στὸ Ἐθνικὸ Μετσόβιο Πολυτεχνεῖο, κ. Παπασπύρου μὲ τὸν ὁποῖο ποτὲ δὲν ἐπικοινώνησα ἐκτὸς τῆς αἴθουσας διδασκαλίας. Παρὰ ταῦτα, ἡ ἐπιλογή του νὰ παρουσιάσει τὰ μαθήματα Ἀπειροστικοῦ καὶ Ὁλοκληρωτικοῦ Λογισμοῦ μὲ περίτεχνη καὶ αὐστηρὴ χροιὰ Μαθηματικῆς Ἀνάλυσης ἐπηρέασε τὴν ἐρευνητική μου μεθοδολογία καθοριστικὰ καὶ ἀνεξίτηλα.

Στὸν ἐπιβλέψαντα τὴ διδακτορική διατριβή μου καθηγητή, τοῦ Τεχνολογικοῦ Ἰνστιτούτου τῆς Καλιφορνίας, γιὰ πολλοὺς CALTECH, Δόκτορα Bill Iwan, ἐκφράζω τὴν εὐγνωμοσύνη μου γιὰ τὴ μύησή μου στὸν ἐνδιαφέροντα καὶ ὄμορφο, ἂν ὄχι ποιητικό, τομέα τῆς δυναμικῆς καὶ ταλαντώσεων, καὶ γιὰ τὸ διαρκὲς μήνυμά του ὅτι τὰ τεχνικὰ κείμενα πρέπει νὰ χαρακτηρίζονται ἀπὸ ἀκρίβεια καὶ συντομία ἀνάλογη ἐκείνων τῶν μαθηματικῶν θεωρημάτων καὶ τύπων.

Τέλος, εὐχαριστῶ ἀπὸ καρδιᾶς τὴν πληθώρα τῶν διδακτορικῶν σπουδαστῶν μου, Ἑλλήνων καὶ ἀλλοδαπῶν, ποὺ μοιράστηκαν καὶ μοιράζονται τὴν ἀγωνία, ἀπογοήτευση, ἐνθουσιασμό, καὶ ἀνταμοιβὴ τῆς ρηξικέλευθης ἔρευνας. Εὐχαριστῶ ἰδιαίτερα τὸν λίαν ἐπιμελῆ Χιώτη μαθητή μου καὶ ἀπόφοιτο τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, Νικόλαο Πολίτη, γιὰ τὴ βοήθειά του στὶς ὀπτικὲς λεπτομέρειες τῆς ἀποψινῆς ὁμιλίας μου.

Ὁ τίτλος τῆς ὁμιλίας εἶναι: **Ἀριθμητικὰ Κυματίδια καὶ Ἐφαρμογὲς στὴ Στοχαστικὴ Δυναμική**. Δηλαδή, ἀνάλυση τῆς δυναμικῆς συμπεριφορᾶς κατασκευῶν καὶ συστημάτων ποὺ ὑπόκεινται σὲ φορτία, τὰ ὁποῖα χαρακτηρίζονται ἀπὸ ἀβεβαιότητα ὡς πρὸς τὴν ἔντασή τους καὶ τὴν χρονικὴ ἐξέλιξή τους. Ἡ ἀνάλυση γίνεται μὲ μιὰ βέλτιστα τοποθετημένη στὸν ἄξονα τῶν χρόνων οἰκογένεια βραχυχρόνιων συναρτήσεων, τὰ κυματίδια.

Ἐκ προοιμίου θέλω νὰ διευκρινίσω ὅτι οἱ μέθοδοι, στὶς ὁποῖες θὰ ἀναφερθῶ, χρησιμοποιοῦν προχωρημένα μαθηματικὰ ἐργαλεῖα, τὰ ὁποῖα θὰ προσπαθήσω νὰ ἀποφύγω κατὰ τὸ δυνατόν. Σημειώνω βεβαίως ὅτι λεπτομερεῖς ἀναφορὲς καὶ τεκμηριώσεις θὰ ὑπάρξουν στὸ σχετικὸ ἀνάτυπο ἐκ τῶν Πρακτικῶν τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν. Θὰ ἤθελα ἐπίσης νὰ ἐπισημάνω ὅτι στὴν πλειονότητά τους οἱ παρουσιάσεις στὰ θέματα ἀριθμητικῶν κυματιδίων χαρακτηρίζονται ἀπὸ μιὰ ἀρχὴ ἀπροσδιοριστίας. Δηλαδή, τὰ σφάλματα σὲ ἀναφορὰ μὲ τὴν ἀκριβολογία καὶ τὴ μεταδοτικότητα τοῦ ὁμιλητοῦ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐλαχιστοποιηθοῦν ταυτόχρονα. Ἐγὼ πάντως θὰ προσπαθήσω!

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ

Συχνὰ σὲ προβλήματα δυναμικῆς οἱ διεγέρσεις χαρακτηρίζονται ἀπὸ μεταβολὲς στὸ χρόνο τῶν κυριαρχουσῶν συχνοτήτων. Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸ δὲν ἐνδείκνυται ἡ ἀνάλυσή τους μὲ μεθόδους στάσιμων ἀνελίξεων. Χαρακτηριστικὸ παράδειγμα ἀποτελοῦν τὰ σεισμικὰ κύματα, τὰ ὁποῖα παρουσιάζουν μηδενικὴ ἀρχικὴ τιμή, αἰφνίδιες ἐκτονώσεις ἐνέργειας, ἀλλαγὲς στὸ περιεχόμενο τῶν συχνοτήτων, καὶ φθίνουσα ἔνταση μὲ τὸ χρόνο (Trifunac 1971).

Τὶς τελευταῖες δεκαετίες σημαντικὴ ἐρευνητικὴ δραστηριότητα ἔχει κατευθυνθεῖ στὴν ἀνάλυση μὴ-στάσιμων σημάτων καὶ τὴν πρόβλεψη τῶν στατιστικῶν χαρακτηριστικῶν τῆς ἀπόκρισης τῶν κατασκευῶν. Οἱ ἀρχικὲς προσπάθειες ἐπικεντρώθηκαν στὴν τροποποίηση τῶν μεθόδων, ποὺ εἶχαν ἤδη ἀναπτυχθεῖ στὴν καλὰ τεκμηριωμένη θεωρία στάσιμων κυμάτων. Κατ' αὐτὴ τὴν προσέγγιση, γιὰ διεγέρσεις, οἱ ὁποῖες μποροῦν νὰ διαιρεθοῦν σὲ μεγάλα τμήματα ποὺ εἶναι στάσιμα, παράμετροι ἀπόσβεσης ποὺ εἶναι συναρτήσεις τοῦ χρόνου ἔχουν χρησιμοποιηθεῖ γιὰ τὴν πρόβλεψη τῆς στάσιμης ἀπόκρισης (Vanmarcke 1976). Σὲ μετέπειτα ἐργασίες γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τῆς ἀπόκρισης τῶν κατασκευῶν ἡ διέγερση θεωρήθηκε ὡς μιὰ βραδέως μεταβαλλόμενη ἀνέλιξη, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς τὸ γινόμενο μιᾶς ντετερμινιστικῆς (προσδιορισμιτικῆς) συνάρτησης μεταβολῆς τοῦ πλάτους καὶ μιᾶς στάσιμης ἀνέλιξης (Priestley 1965; Priestley 1981). Ἡ προσέγγιση αὐτὴ ἔτυχε εὐρείας ἐφαρμογῆς μὲ ἀποτέλεσμα νὰ προταθοῦν διάφορες συναρτήσεις μεταβολῆς τοῦ πλάτους (Borino et al. 1988; Gasparini and DebChaudhury 1980; Muscolino 1988; Quek et al. 1990; Senthilnathan and Lutes 1988). Πέραν αὐτοῦ, ὅμως, εἶναι γενικὰ ἀποδεκτὸ ὅτι ἡ παράλειψη τῆς μεταβολῆς τῆς συχνότητας τῆς διεγέρσεως μὲ τὸ χρόνο ὁδηγεῖ σὲ σημαντικὲς ἀποκλίσεις στὸν προσδιορισμὸ τῆς ἀπόκρισης γραμμικῶν καὶ μὴ γραμμικῶν συστημάτων (Conte and Peng 1997; Papadimitriou 1990; Saragoni and Hart 1972; Yeh and Wen 1990). Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸ ἀρκετὲς ἐργασίες ἔχουν ἐκπονηθεῖ μὲ στόχο τὸν προσδιορισμὸ τῆς ἀπόκρισης κατασκευῶν μὲ περισσότερο ρεαλιστικὲς προσεγγίσεις τῆς διέγερσης, οἱ ὁποῖες λαμβάνουν ὑπόψη τὴ μεταβολὴ τῶν συχνοτήτων μὲ τὸν χρόνο (Conte and Peng 1997; Grigoriu et al. 1988; Kubo and Penzien 1979; Lin and Yong 1987).

Ἡ ἀνάλυση μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια προσέλκυσε μεγάλο ἐρευνητικὸ ἐνδιαφέρον κατὰ τὶς τελευταῖες δύο δεκαετίες. Ἡ βασικὴ ἰδέα τῆς μεθόδου εἶναι ἡ ἀνάλυση ἑνὸς σήματος σὲ μιὰ διπλὴ σειρὰ συναρτήσεων βάσης, – τὰ «ἀριθμητικὰ κυματίδια» – οἱ ὁποῖες παράγονται ἀπὸ τὴ «μητρικὴ συνάρτηση» μὲ ἀλλαγὴ κλίμακας καὶ μετατόπιση. Σὲ ἀντίθεση μὲ τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα στὴν παραδοσιακὴ ἀνάλυση Fourier, ποὺ ἐκτείνονται στὸ ἄπειρο, τὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια φθίνουν μέσα σὲ ἕνα πεπερασμένο διάστημα. Τὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ μεγάλες συχνότητες ἔχουν μικρὴ ὑποστήριξη στὸ πεδίο τοῦ χρόνου, ἐνῶ τὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ χαμηλότερες συχνότητες ἔχουν μεγαλύτερη ὑποστήριξη στὸ πεδίο τοῦ χρόνου. Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸ ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια παρέχει μιὰ περιγραφὴ τοῦ σήματος στὸ πεδίο χρόνου-συχνοτήτων ἱκανὴ νὰ ἀποτυπώσει φαινόμενα μικρῆς διάρκειας καὶ ὑψηλῆς συχνότητας (Cohen 1995; Qian 2001). Ἀπὸ τὶς πρῶτες ἐργασίες μὲ ἐφαρμογὲς τῶν ἀριθμητικῶν κυματιδίων μπορεῖ νὰ ἀναφέρει κανεὶς ἐκεῖνες τῶν Goupillaud et al. 1984 καὶ τῶν Grossmann and Morlet 1984. Σύντομα, ὅμως, δημοσιεύθηκαν ἐργασίες ποὺ ἐνίσχυσαν τὴ μαθηματικὴ τεκμηρίωση τῆς ἀνάλυσης μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια (Daubechies 1988; Daubechies 1992; Mallat 1989), ἔκτοτε δὲ ὑπάρχει πληθώρα βάσεων ἀριθμητικῶν κυματιδίων διαθέσιμη στὴ βιβλιογραφία. Λόγω τῶν ἑλκυστικῶν χαρακτηριστικῶν ποὺ ἔχουν τὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια στὴν ἀνάλυση χρόνου-συχνοτήτων, ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια παρέχει μεγαλύτερη εὐελιξία σὲ σχέση μὲ τὶς παραδοσιακὲς μεθόδους γραμμικῆς ἀνάλυσης χρόνου-συχνοτήτων, ὅπως ὁ βραχὺς μετασχηματισμὸς Fourier, καὶ ὁ μετασχηματισμὸς Gabor (Gabor 1946).

Ἡ ἀποτελεσματικότητα τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια στὴν ἀνάλυση τῶν κατασκευῶν ἔχει καταδειχθεῖ μέσω μεγάλου ἀριθμοῦ ἐφαρμογῶν (Spanos and Zeldin 1997, Spanos et al. 2005). Ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια ἔχει χρησιμοποιηθεῖ γιὰ ἀνάλυση καὶ σύνθεση σεισμικῶν κυμάτων (Iyama and Kuwamura 1999) καὶ τὴ μοντελοποίηση στοχαστικῶν συστημάτων (Agrawal 1998). Ἄλλες ἐφαρμογὲς περιλαμβάνουν τὴν ἀνάλυση ταλαντώσεων δυναμικῶν συστημάτων μὲ μεταβαλλόμενα στὸ χρόνο χαρακτηριστικὰ (Carmona et al. 1998; Newland 1994a; Newland 1994b; Spanos and Zeldin 1997). Προβλήματα ταλαντώσεων ἔχουν ἐπίσης προσεγγισθεῖ μὲ σχήματα ποὺ συνδυάζουν ἀριθμητικὰ κυματίδια μὲ τὴν κλασσικὴ μέθοδο Galerkin (Diaz and Yamaura 2001) ἢ τὴ μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων (Youche et al. 1998). Ἐπιπλέον ἐφαρμογὲς στὴν ἀνάλυση δοκῶν (Mei et al. 1998), συστημάτων σεισμικῆς μόνωσης βάσης (Basu and Gupta 1999b) καὶ πλακῶν (Mei et al. 1998; Youche et al. 1998) ἔχουν ἀναπτυχθεῖ. Σημαντικὴ προσπάθεια ἔχει ἀφιερωθεῖ στὴ στατιστικὴ περιγραφὴ τῆς ἀπόκρισης γραμμικῶν συστημάτων ὑπὸ σεισμικὲς διεγέρσεις. Ἐπίσης μὴ πεπλεγμένες σχέσεις ἔχουν ἐξαχθεῖ γιὰ τὰ χρονικὰ μεταβαλλόμενα φάσματα διέγερσης καὶ ἀπόκρισης (Basu and Gupta 1997; Basu and Gupta 1998; Basu and Gupta 2000; Basu and Gupta 2001). Ὁ τομέας ἐλέγχου δυναμικῶν συστημάτων, τῶν ὁποίων τὰ χαρακτηριστικὰ μεταβάλλονται στὸ χρόνο, ἔχει προωθηθεῖ ἀπὸ τὴν ἐφαρμογὴ τῆς ἀνάλυσης ἀριθμητικῶν κυματιδίων (Hsiao and Wang 1998; Zhou et al. 1999).

Πολλὲς εἶναι καὶ οἱ ἐφαρμογὲς τῶν ἀριθμητικῶν κυματιδίων στὴν ἀναγνώριση συστημάτων. Οἱ ἐφαρμογὲς αὐτὲς βασίζονται στὶς ἰδιότητες ἐντοπισμοῦ τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια. Οἱ ἰδιοσυχνότητες τοῦ συστήματος μποροῦν νὰ προσδιορισθοῦν ἀπὸ τὰ σημεῖα μεγιστοποίησης τῆς μέσης τετραγωνικῆς τιμῆς τῶν συντελεστῶν τοῦ μετασχηματισμοῦ τῆς ἀπόκρισης. Ἐπιπλέον ἡ ἀπόσβεση τοῦ συστήματος μπορεῖ νὰ προσδιορισθεῖ ἀπὸ τὸν ρυθμὸ μεταβολῆς τῆς φάσης τῶν συντελεστῶν τοῦ μετασχηματισμοῦ (Ruzzene et al. 1997; Staszewski 1998a; Staszewski and Chance 1997) ἢ μὲ τὴ μέθοδο λογαριθμικῆς ἐλάττωσης (Hans et al. 2000; Lamarque et al. 2000). Ἀριθμητικὰ κυματίδια σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴ μέθοδο Galerkin ἔχουν ἐφαρμοσθεῖ στὸ πρόβλημα προσδιορισμοῦ χαρακτηριστικῶν δυναμικῶν συστημάτων (Ghanem and Romeo 2000). Τὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια ἔχουν ἐπίσης ἐφαρμοσθεῖ στὸν ἐντοπισμὸ μὴ γραμμικότητας σὲ δυναμικὰ συστήματα καὶ στὴν πρόβλεψη ὁριακῶν κύκλων στὴ μὴ γραμμικὴ ἀπόκριση συστημάτων (Lind et al. 2001).

Ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια ἔχει ἀκόμη χρησιμοποιηθεῖ γιὰ τὸν ἐντοπισμὸ ρωγμῶν σὲ δομικὰ συστήματα καὶ στὴν ἐκτίμηση ἀξιοπιστίας τῶν κατασκευῶν. Λόγω τῆς ἰδιότητας ἐντοπισμοῦ, ὁ μετασχηματισμὸς μπορεῖ νὰ συλλάβει ἀπότομες ἀλλαγὲς καὶ ἀσυνέχειες καὶ κατὰ συνέπεια νὰ προειδοποιήσει γιὰ βλάβες στὸ δομικὸ σύστημα. Ἡ ἀναπαράσταση τοῦ μετασχηματισμοῦ στὸ πεδίο χρόνου κλιμάκων μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ γιὰ τὴν ποσοτικοποίηση τῆς ἐκτίμησης τοῦ εὔρους τῆς βλάβης, καθὼς καὶ στὴν παρακολούθηση τῆς ἐπέκτασης τῆς βλάβης στὸ ὑλικό. Ἐπιπλέον, ἔχει χρησιμοποιηθεῖ γιὰ τὸν ἐντοπισμὸ βλαβῶν σὲ κιβώτια μετάδοσης κίνησης (Gaul and Hurlebaus 1998; Staszewski 1998b; Staszewski and Tomlinson 1994; Wang and McFadden 1995; Wang and McFadden 1996).

Μεταξὺ τῶν διαφόρων βάσεων ἀριθμητικῶν κυματιδίων, ποὺ ἔχουν ἀναπτυχθεῖ, τὰ ἁρμονικὰ κυματίδια (Newland 1993) παρουσιάζουν συγκεκριμένες ἐπιθυμητὲς ἰδιότητες γιὰ ἐφαρμογὲς στὴ στοχαστικὴ δυναμική. Τὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια σὲ διάφορες κλίμακες δὲν παρουσιάζουν ἐπικάλυψη στὶς συχνότητες.

Αὐτὸ μπορεῖ νὰ ὁδηγήσει σὲ ἀπλοποιήσεις κατὰ τὴ στατιστικὴ περιγραφὴ τῶν χαρακτηριστικῶν τόσο τῆς διέγερσης, ὅσο καὶ τῆς ἀπόκρισης τῶν δυναμικῶν συστημάτων.

Στὴ συνέχεια δίδεται μιὰ σύντομη περιγραφὴ τῶν δυνατῶν ἐφαρμογῶν τῶν ἁρμονικῶν ἀριθμητικῶν κυματιδίων. Ἡ ἰδιότητα τῆς μὴ ἐπικάλυψης τῶν ἁρμονικῶν ἀριθμητικῶν κυματιδίων ὁδηγεῖ σὲ ἁπλούστερες ἐκφράσεις γιὰ τὰ φάσματα μὴ στάσιμων ἀνελίξεων καὶ στὴν πρόβλεψη τῶν ἀποκρίσεων γραμμικῶν καὶ μὴ γραμμικῶν συστημάτων.

2. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΜΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΙΔΙΑ

2.1 Συνεχὴς καὶ μέσω διακεκριμενοποίησης μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια.

Στὴν ἑνότητα αὐτὴ παρουσιάζεται μιὰ σύντομη περιγραφὴ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ μετασχηματισμοῦ ἀριθμητικῶν κυματιδίων. Ἔστω $f(t)$ μιὰ συνάρτηση ποὺ ἀνήκει στὸ χῶρο τῶν συναρτήσεων πεπερασμένης ἐνέργειας. Δηλαδή,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty \tag{1}$$

Γιὰ τὸν μετασχηματισμὸ μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια τῆς συνάρτησης $f(t)$, εἰσάγεται μιὰ ἄλλη συνάρτηση τοῦ ἴδιου χώρου ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴ σχέση

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \tag{2}$$

ὅπου

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t} dt \tag{3}$$

εἶναι ὁ μετασχηματισμὸς Fourier τῆς συνάρτησης $\psi(t)$. Ἡ συνάρτηση $\psi(t)$ ὀνομάζεται *βασικὸ* ἢ *μητρικὸ ἀριθμητικὸ κυματίδιο* καὶ ἡ ἐξίσωση Ἐξ. (2) ἀποτελεῖ τὴ συνθήκη ἀποδεκτότητας. Τὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια $\psi_{a,b}(t)$ κατασκευάζονται μὲ ἀλλαγὴ κλίμακας καὶ μετατόπιση τοῦ μητρικοῦ ἀριθμητικοῦ κυματιδίου $\psi(t)$. Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ εἰσάγονται μία παράμετρος κλίμακας a καὶ μία παράμετρος μετατόπισης b. Ἔτσι, ἡ ἐξίσωση ἀριθμητικῶν κυματιδίων ἔχει τὴ μορφὴ

$$\psi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right);\quad a,b\in\mathbf{R} \tag{4}$$

Πιὸ συγκεκριμένα ἡ παράμετρος κλίμακας, a, καθορίζει τὴ συχνότητα τοῦ ἀριθμητικοῦ κυματιδίου καὶ ἡ παράμετρος μετατόπισης, b, περιορίζει τὴ συνάρτηση περὶ τὸ κέντρο $t=b$.

Ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια μιᾶς συνάρτησης $f(t)$, ὡς πρὸς μιὰ βάση ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ μητρικὸ ἀριθμητικὸ κυματίδιο $\psi(t)$, δίδεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωση

$$W_\psi^C f(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt, \tag{5}$$

ὅπου $\psi^*(t)$ εἶναι ἡ μιγαδικὴ συζυγὴς συνάρτηση τῆς $\psi(t)$. Ἀξίζει νὰ σημειωθεῖ ὅτι ἡ ἐξίσωση Ἐξ. (5) εἶναι ἐπίσης γνωστὴ στὴ βιβλιογραφία ὡς *συντελεστὴς ἀριθμητικῶν κυματιδίων*. Τὸ μέγεθος τοῦ συντελεστῆ ἀριθμητικῶν κυματιδίων ἐκφράζει τὸ βαθμὸ ὁμοιότητας τῆς συνάρτησης $f(t)$ μὲ τὴ μητρικὴ συνάρτηση ὑπὸ κλίμακα, a, στὴν περιοχὴ περὶ τὸ σημεῖο $t=b$. Ἡ συνάρτηση $f(t)$ μπορεῖ νὰ κατασκευαστεῖ ἀπὸ τοὺς συντελεστὲς ἀριθμητικῶν κυματιδίων τῆς Ἐξ. (5) σύμφωνα μὲ τὴ σχέση

$$f(t)=\frac{1}{2\pi C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2}WT_f(a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)da\,db. \tag{6}$$

Ἡ ἐξίσωση Ἐξ. (5) εἶναι γνωστὴ στὴ βιβλιογραφία ὡς συνεχὴς μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια καὶ χρησιμοποιεῖται στὴν ἀνάλυση συνεχῶν σημάτων. Γιὰ τὴν ἀνάλυση διακριτῶν σημάτων χρησιμοποιεῖται ὁ *διακριτὸς μετα-*

σχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια. Στὴν περίπτωση αὐτή, οἱ κλίμακες καὶ οἱ παράμετροι μετατόπισης τῶν ἀριθμητικῶν κυματιδίων δὲν μποροῦν νὰ πάρουν αὐθαίρετα ὁποιεσδήποτε τιμές, ἀλλὰ μόνο τιμές, ποὺ καθορίζονται ἀπὸ κάποιο συγκεκριμένο σχῆμα διακεκριμενοποίησης. Ὁ, μέσω διακεκριμενοποίησης, μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$W_{\psi}^{D} f\left(a_j, b_{j,k}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left|a_j\right|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^{*}\left(\frac{t-b_{j,k}}{a_j}\right) dt, \tag{7}$$

ὅπου $j \in N$ καὶ $k \in Z$. Γιὰ παράδειγμα, σὲ ἕνα κοινὸ σχῆμα διακεκριμενοποίησης ἡ παράμετρος κλίμακας μπορεῖ νὰ ἀναπτυχθεῖ σὲ ἕνα δυαδικὸ κάνναβο δίδοντας $a_j=2^j$ καὶ $b_{j,k}=k2^j$.

2.2 Ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια.

Ἀνάμεσα στοὺς μετασχηματισμοὺς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια, ποὺ εἶναι διαθέσιμοι στὴ βιβλιογραφία, ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἁρμονικὰ κυματίδια (Newland 1993) ἔχει προσελκύσει αὐξανόμενο ἐρευνητικὸ ἐνδιαφέρον. Σὲ ἀντίθεση μὲ τὶς ἄλλες διαθέσιμες στὴ βιβλιογραφία βάσεις, τὰ ἁρμονικὰ κυματίδια χαρακτηρίζονται ἀπὸ ζῶνες συχνοτήτων χωρὶς ἐπικάλυψη. Αὐτὴ ἡ ἰδιότητα καθιστᾶ τὸ μετασχηματισμὸ μὲ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια κατάλληλο γιὰ τὴν ἐκτίμηση χρονικὰ ἐξαρτώμενων φασματικῶν χαρακτηριστικῶν. Ἐπιπλέον, ἡ εὐελιξία ποὺ προσφέρει ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια σὲ ὅ,τι ἀφορᾶ τὸν βαθμὸ ἀνάλυσης διακεκριμένων σημάτων στὸ πεδίο χρόνου-συχνοτήτων, καθὼς καὶ ὁ γρήγορος ἀλγόριθμος ὑλοποίησής του ἐνδιαφέρουν ἰδιαίτερα τὶς ἐφαρμογὲς στὴ μηχανική.

Τὸ μητρικὸ ἁρμονικὸ ἀριθμητικὸ κυματίδιο ἔχει κιβωτιοειδὲς φάσμα ποὺ περιγράφεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$\hat{W}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 2\pi \leq \omega \leq 4\pi \\ 0, & \text{ἀλλοῦ.} \end{cases} \tag{8}$$

Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς Fourier τῆς Ἐξ. (8) ὁδηγεῖ στὴν παρακάτω ἔκφραση γιὰ τὸ ἁρμονικὸ ἀριθμητικὸ κυματίδιο ὡς συνάρτηση τοῦ χρόνου

$$w(t)=\frac{e^{i4\pi t}-e^{i2\pi t}}{i2\pi t}, \quad i=\sqrt{-1}. \tag{9}$$

Δύο σχήματα διακεκριμενοποίησης, τὸ δυαδικὸ καὶ τὸ γενικό, ἔχουν χρησιμοποιηθεῖ γιὰ τόν, μέσω διακεκριμενοποίησης, μετασχηματισμὸ μὲ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια (Newland 1994a). Ἐπιπλέον, ἕνα ἐπεξεργασμένο μὲ φίλτρο σχῆμα ἔχει προταθεῖ γιὰ βελτιωμένο ἐντοπισμὸ στὸ χρόνο (Newland 1999).

Ἡ δυαδικὴ μορφὴ τῶν ἁρμονικῶν ἀριθμητικῶν κυματιδίων γιὰ παραμέτρους κλίμακας καὶ μετατόπισης, *a* καὶ *b* ἀντίστοιχα, περιγράφεται ἀπὸ τὴ μαθηματικὴ σχέση

$$w_{j,k}(t)=\frac{e^{i4\pi(2^j t-k)}-e^{i2\pi(2^j t-k)}}{i2\pi(2^j t-k)}. \tag{10}$$

Ὁ μετασχηματισμὸς Fourier τῆς παραπάνω σχέσης εἶναι

$$\hat{W}_{j,k}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}2^{-j}e^{-\frac{i\omega k}{2^j}}, & 2^j 2\pi\le\omega\le 2^j 4\pi\\ 0, & \text{ἀλλοῦ.}\end{cases} \tag{11}$$

Γιὰ μιὰ ἀκολουθία μήκους $N=2^n$, ὁ δείκτης κλίμακας j παίρνει τιμὲς ἀπὸ 0 ἕως n-2. Σὲ κάθε ἐπίπεδο j ὑπάρχουν 2^j ἀριθμητικὰ κυματίδια ἐντοπισμένα σὲ διαφορετικὲς χρονικὲς στιγμὲς σύμφωνα μὲ τὸ δείκτη μετατόπισης k.

Οἱ συντελεστὲς τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ δυαδικὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια δίδονται ἀπὸ τὴν ἐξίσωση

$$a(j,k)=2^j\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,w^*(2^j t-k)\,dt. \tag{12}$$

Μιὰ χρήσιμη ἰδιότητα τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ δυαδικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια εἶναι ὅτι οἱ συντελεστές του μὲ δεῖκτες N-2^j-k εἶναι μιγαδικοὶ συζυγεῖς τῶν συντελεστῶν μὲ δεῖκτες 2^j+k. Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ μειώνει κατὰ τὸ ἥμισυ τοὺς ὑπολογισμοὺς ποὺ ἀπαιτοῦνται ἀπὸ τὸν ἀλγόριθμο. Ἐπίσης, σχέσεις ὀρθογωνικότητας ἰσχύουν γιὰ δυαδικὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια γιὰ τὴν ἴδια παράμετρο κλίμακας, ἀλλὰ διαφορετικὲς παραμέτρους μετατόπισης

$$\int_{-\infty}^{\infty} w\left(2^j t+k\right) w^*\left(2^r t+s\right) dt=0, \quad \text{γιὰ κάθε } j, k, r, s \tag{13}$$

ἐκτὸς ἀπὸ $j=r$ καὶ $s=k$.

Τὸ σχῆμα γενικῶν ἁρμονικῶν κυματιδίων ὁρίζεται μὲ διαφορετικὸ τρόπο, ἀφοῦ κάθε κλίμακα σὲ αὐτὸ τὸ σχῆμα σχετίζεται μὲ δύο δεῖκτες. Συγκεκριμένα, ἕνα ἁρμονικὸ ἀριθμητικὸ κυματίδιο γιὰ κλίμακα (m, n) καὶ θέση k ὁρίζεται στὸ πεδίο τοῦ χρόνου ἀπὸ τὴ σχέση

$$w_{(m,n),k}(t)=\frac{e^{in2\pi\left(t-\frac{k}{n-m}\right)}-e^{im2\pi\left(t-\frac{k}{n-m}\right)}}{i2\pi(n-m)\left(t-\frac{k}{n-m}\right)}, \tag{14}$$

τῆς ὁποίας ὁ μετασχηματισμὸς Fourier εἶναι

$$\hat{W}_{(m,n),k}(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi(n-m)}e^{-\frac{i\omega k}{n-m}}, & m2\pi\leq\omega\leq n2\pi \\ 0, & \text{ἀλλοῦ,}\end{cases} \tag{15}$$

ὅπου $m, n \in N$. Ἔτσι, ἡ ἐξίσωση Ἐξ. (14) περιγράφει ἕνα ἀριθμητικὸ κυματίδιο, τοῦ ὁποίου τὰ κέντρα στὸ χρόνο καὶ τὴ συχνότητα εἶναι $k/(n-m)$ καὶ $(m+n)\pi$ ἀντίστοιχα καὶ τὸ εὗρος συχνοτήτων εἶναι $(n-m)/2\pi$. Κατάλληλη ἐπιλογὴ τῶν παραμέτρων m καὶ n ἐπιτρέπει τὴ βελτίωση τοῦ βαθμοῦ ἀνάλυσης χρόνου-συχνοτήτων.

Οἱ συντελεστὲς τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ γενικὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια μιᾶς συνάρτησης $f(t)$ ὁρίζονται ἀπὸ τὴν ἐξίσωση

$$a\left((m,n),k\right)=(n-m)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, w^*\left(t-\frac{k}{n-m}\right)dt. \tag{16}$$

Ὁ μετασχηματισμὸς μὲ γενικὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια μπορεῖ νὰ βελτιωθεῖ μὲ τροποποίηση τῶν γενικῶν ἁρμονικῶν κυματιδίων μὲ ἕνα μαθηματικὸ παράθυρο. Γιὰ τὸ λόγο αὐτό, μιὰ συνάρτηση Hanning μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ στὸ πεδίο τῶν συχνοτήτων, ὁπότε προκύπτει ἡ σχέση

$$\hat{W}(\omega)=\frac{1}{(n-m)2\pi}\left[1-\cos\left(\frac{\omega-m2\pi}{n-m}\right)\right]. \tag{17}$$

Αὐτὸ τὸ βελτιωμένο σχῆμα ἀπαντᾶται στὴ βιβλιογραφία ὑπὸ τὸν ὅρο μετασχηματισμὸς μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια.

Ἀξίζει νὰ σημειωθεῖ ὅτι τόσο ὁ μετασχηματισμὸς μὲ δυαδικὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια, ὅσο ὁ μετασχηματισμὸς μὲ γενικὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια μποροῦν νὰ ἀναπτυχθοῦν βασισμένοι στὸν ἀλγόριθμο τοῦ ταχέως μετασχηματισμοῦ Fourier. Συγκεκριμένα, μετασχηματισμοὶ μέσω διακεκριμενοποίησης ποὺ κάνουν χρήση τοῦ ταχέως μετασχηματισμοῦ Fourier, παρουσιάζουν σημαντικὰ ὑπολογιστικὰ πλεονεκτήματα στὴν ἀνάλυση σημάτων σὲ σύγκριση μὲ ἄλλους διαθέσιμους τέτοιους μετασχηματισμοὺς ἀριθμητικῶν κυματιδίων.

3. ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΦΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕΣΩ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΜΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΙΔΙΑ

Ὁ μετασχηματισμὸς ἁρμονικῶν ἀριθμητικῶν κυματιδίων μπορεῖ νὰ ἑρμηνευθεῖ μέσα στὸ πλαίσιο τῆς θεωρίας ἐξελισσόμενου φάσματος τοῦ Priestley (Priestley 1981). Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ θεωρεῖται μιὰ ἀργὰ ἐξελισσόμενη, μὴ στάσιμη ἀνέλιξη μὲ μηδενικὴ μέση τιμὴ

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_t(\omega)\,dZ(\omega), \tag{18}$$

ὅπου $\varphi_t(\omega)$ εἶναι μιὰ συνάρτηση ταλαντώσεως, καὶ $Z(\omega)$ εἶναι μιὰ στοχαστικὴ ἀνέλιξη, τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα εἶναι ὀρθογωνικά. Συγκεκριμένα, ἡ ἀκόλουθη μορφὴ θεωρεῖται

$$\phi_t(\omega)=A_t(\omega)e^{i\theta(\omega)t}, \tag{19}$$

στὴν ὁποία $\theta(\omega)=\omega_0$ εἶναι ἡ συχνότητα γιὰ τὴν ὁποία ὁ ταχὺς μετασχηματισμὸς Fourier τῆς $\varphi_t(\omega)$ λαμβάνει τὴ μεγαλύτερη τιμή του. Τὸ ἐξελισσόμενο φάσμα σύμφωνα μὲ τὴν προσέγγιση τῆς θεωρίας τοῦ Priestley ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$dH_t(\omega) = \left|A_t(\omega)\right|^2 E\left[\left|dZ(\omega)\right|^2\right], \tag{20}$$

ὅπου E [ ] ἐκφράζει τὸν τελεστὴ μαθηματικῆς ἐλπίδας.

Ὁ μετασχηματισμὸς μὲ δυαδικὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια τῆς ἀνέλιξης $f(t)$ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$f(t) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{2^j-1}\int_{2^j 2\pi}^{2^j 4\pi} \frac{a(j,k)}{2^j 2\pi} e^{-i\omega\left[k\left(1+\frac{1}{2^j}\right)-2^{j-1}t\right]} e^{i\omega 2^{j-1}t}\, d\omega. \tag{21}$$

Συγκρίνοντας τὶς ἐξισώσεις Ἐξ. (21) καὶ Ἐξ. (18) ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια τῆς Ἐξ. (21) μπορεῖ νὰ ἐκφραστεῖ εὑρηματικὰ μὲ τὴν Ἐξ. (18) θεωρώντας τὶς ἀκόλουθες σχέσεις

$$A_t(\omega) \quad \leftrightarrow \quad e^{-i\omega\left[k\left(1+\frac{1}{2^j}\right)-2^{j-1}t\right]}, \tag{22}$$

$$\theta(\omega) \quad \leftrightarrow \quad 2^{j-1}\omega, \tag{23}$$

καὶ

$$dZ(\omega) \quad \leftrightarrow \quad a(j,k), \tag{24}$$

ὅπου γίνεται ἡ ἀκόλουθη προσέγγιση

$$d\omega \approx \Delta\omega = 2^j 2\pi. \tag{25}$$

Στὴ συνέχεια ἡ ἀκόλουθη σχέση υἱοθετεῖται γιὰ τὴν ἐκτίμηση τοῦ φάσματος (Spanos et al. 2004)

$$S_{j,k} = \frac{E\left[\left|a(j,k)\right|^2\right]}{2^j}. \tag{26}$$

Σημειώνεται ὅτι γιὰ σήματα μήκους NT, ὅπου N εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν σημείων καὶ τὸ T ὁ ἀριθμὸς τῶν σημείων στὴ μονάδα τοῦ χρόνου, ἡ ἐξίσωση Ἐξ. (26) ὁρίζει ἕνα τοπικὸ φάσμα στὰ ἀκόλουθα διαστήματα

$$\begin{cases} \dfrac{2^j 2\pi}{NT} \leq \omega \leq \dfrac{2^j 4\pi}{NT}, \\ \dfrac{NTk}{2^j} \leq t \leq \dfrac{NT(k+1)}{2^j}. \end{cases} \tag{27}$$

Ἡ παραπάνω περιγραφὴ ἔγινε μὲ βάση τὸ μετασχηματισμὸ δυαδικῶν ἁρμονικῶν ἀριθμητικῶν κυματιδίων. Σημειώνεται ὡστόσο ὅτι ἰσχύει καὶ γιὰ τὴν περίπτωση τῶν γενικῶν ἁρμονικῶν ἀριθμητικῶν κυματιδίων. Στὴν περίπτωση αὐτή, τὸ κανονικοποιημένο τοπικὸ φάσμα μπορεῖ νὰ ὁρισθεῖ ἀπὸ τὴ σχέση (Spanos et al. 2004)

$$S_{(m,n),k} = \frac{E\left[\left|a\left((m,n),k\right)\right|^2\right]}{n-m} \tag{28}$$

στὰ διαστήματα

$$\begin{gathered} \frac{m2\pi}{NT} \leq \omega \leq \frac{n2\pi}{NT}, \\ \frac{NTk}{n-m} \leq t \leq \frac{NT(k+1)}{n-m}. \end{gathered} \tag{29}$$

Γιὰ τὴ διερεύνηση τῆς χρησιμότητας τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια στὸν ἐντοπισμὸ τῶν μεταβαλλόμενων χαρακτηριστικῶν τῆς συχνότητας μὴ στάσιμων ἀνελίξεων, ἀλλὰ καὶ γιὰ τὴ διερεύνηση τῆς ἀξιοπιστίας τῶν ἐξισώσεων Ἐξ. (26) καὶ Ἐξ. (28) εἰσάγεται ἡ παρακάτω ἀνέλιξη μὲ χωριζόμενο φάσμα (Priestley 1981)

$$S(\omega,t) = S_0(\omega)\, g(t)^2, \tag{30}$$

ὅπου $S_0(\omega)$ εἶναι τὸ φάσμα τοῦ στάσιμου μέρους, καὶ $g(t)$ εἶναι ἡ μιὰ βραδέως ἐξελισσόμενη ντετερμινιστικὴ (προσδιορισμικὴ) συνάρτηση μεταβολῆς. Στὸ ἄρθρο αὐτὸ χρησιμοποιεῖται τὸ φάσμα Kanai-Tajimi

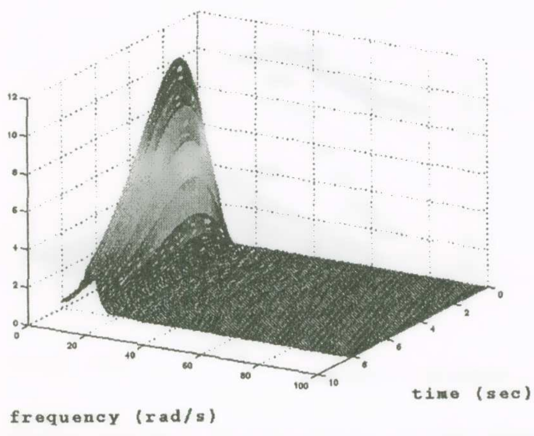
$$S_0(\omega)=\frac{1+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_0}\right)^2}, \tag{31}$$

ὅπου ω_0=10 rad/sec καὶ ζ=0.24. Ἡ συνάρτηση μεταβολῆς $g(t)$ ποὺ υἱοθετεῖται εἶναι

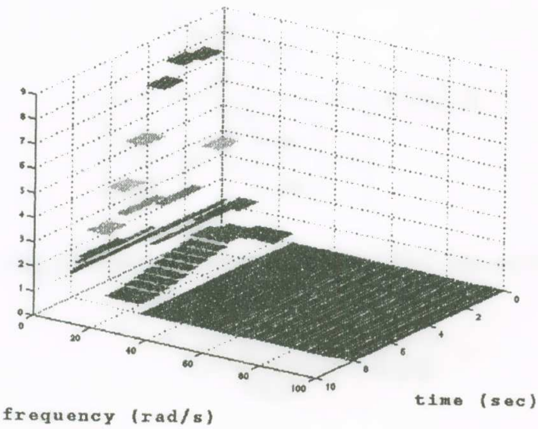
$$g(t)=\frac{e^{-0.25t}-e^{-0.5t}}{0.25}. \tag{32}$$

Στὴ συνέχεια ἕνα σχῆμα κινούμενης μέσης τιμῆς ἐφαρμόζεται γιὰ τὴ δημιουργία χρόνο-ἱστοριῶν συμβατῶν μὲ τὸ φάσμα $S_0(\omega)$ (Spanos and Zeldin 1998). Ἔτσι, τριακόσιες χρόνο-ἱστορίες δημιουργοῦνται περνώντας λευκὸ θόρυβο (Papoulis and Pillai 2002) μὲ μηδενικὴ μέση τιμὴ καὶ μοναδιαία ἀπόκλιση ἀπὸ ἕνα ψηφιακὸ φίλτρο 20ῆς τάξης. Ὁ ρυθμὸς δειγματοληψίας εἶναι $T=\pi/\omega_c$, ὅπου ω_c=100 rad/sec. Γιὰ κάθε χρόνο-ἱστορία ὑπολογίζονται οἱ συντελεστὲς τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια, καὶ στὴ συνέχεια οἱ μέσες τιμὲς τῶν συντελεστῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ συγκεκριμένες κλίμακες καὶ χρονικὲς στιγμές.

Τὸ ἐξελισσόμενο φάσμα ποὺ περιγράφεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωση Ἐξ. (30) δίδεται στὸ Σχῆμα 1. Οἱ Ἐξ. (26) καὶ Ἐξ. (28) ὑπολογίζονται στὰ διαστήματα τῶν Ἐξ. (27) καὶ Ἐξ. (29) ἀντίστοιχα.

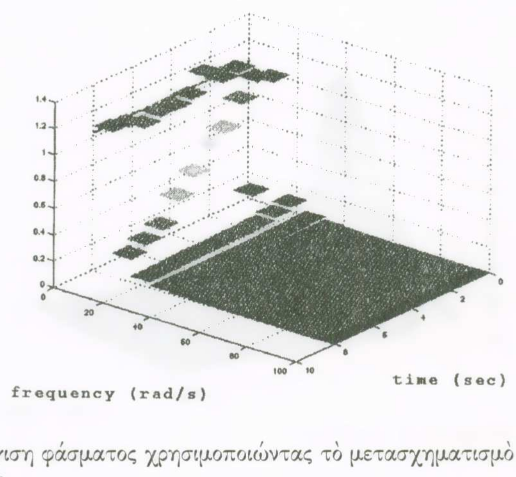


Σχῆμα 1: Ἐξελισσόμενο φάσμα πρὸς προσέγγιση.



Σχῆμα 2: Προσέγγιση φάσματος χρησιμοποιώντας τὸ μετασχηματισμὸ μὲ δυαδικὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια.

Στὸ Σχῆμα 2 ἀπεικονίζεται ἡ προσέγγιση φάσματος χρησιμοποιώντας τὸ μετασχηματισμὸ μὲ δυαδικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια τῆς Ἐξ. (26). Ὁ βαθμὸς ἀνάλυσης εἶναι περιορισμένος λόγω τοῦ τρόπου διακριτοποίησης τοῦ πεδίου χρόνου-συχνοτήτων. Ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸ γεγονὸς αὐτό, ὅμως, μὲ τὸν μετασχηματισμὸ μὲ δυαδικὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια ἐπιτυγχάνεται ἀρκετὰ καλὴ προσέγγιση



Σχῆμα 3: Προσέγγιση φάσματος χρησιμοποιώντας τὸ μετασχηματισμὸ μὲ γενικὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια.

τῆς ἐνέργειας τῆς ἀνέλιξης, καθὼς ὁ ὄγκος ποὺ περικλείεται κάτω ἀπὸ τὸ διάγραμμα εἶναι περίπου ἴσος μὲ τὴ μέση τετραγωνικὴ τιμὴ τῆς ἀνέλιξης.

Γιὰ τὴν ἐκτίμηση τοῦ φάσματος μέσω τοῦ μετασχηματισμοῦ γενικῶν ἁρμονικῶν ἀριθμητικῶν κυματιδίων διάφορες τιμὲς γιὰ τὶς παραμέτρους (m, n) ἐπιλέχθηκαν, ὥστε νὰ προκύψει ἱκανοποιητικὸς βαθμὸς ἀνάλυσης χρόνου-συχνοτήτων. Σημειώνεται ὅτι ἡ τιμὴ n-m=10 ἔδωσε τὴν καλύτερη ἀνάλυση. Ὅμως, ὅπως εἶναι ἐμφανὲς ἀπὸ τὸ Σχῆμα 3, ἡ ἐκτίμηση τοῦ φάσματος δὲν εἶναι καλή, διότι ὑπάρχουν σημαντικὲς ἀποκλίσεις ἀπὸ τὸ φάσμα ποὺ ἀπεικονίζεται στὸ Σχῆμα 1. Ἡ προσέγγιση εἶναι ἀκόμα χειρότερη γιὰ ἄλλες τιμὲς τῶν (m, n).

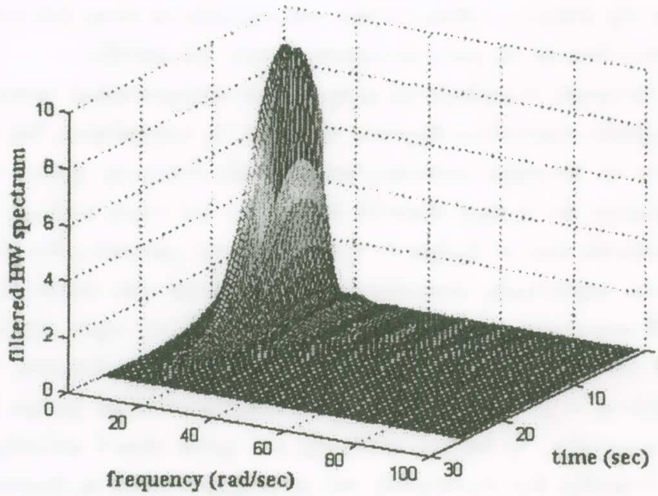
Γιὰ τὴν ἐπίτευξη ἱκανοποιητικότερης ἐκτίμησης τοῦ φάσματος τῆς Ἐξ. (30) ἐφαρμόζεται ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια. Ὁ βαθμὸς ἀνάλυσης στὸ χρόνο εἶναι ὁ καλύτερος δυνατός, ἐπειδὴ ἐντοπίζει ἕνα συντελεστὴ τοῦ μετασχηματισμοῦ σὲ διαστήματα T-*secs*. Οἱ φασματικὲς τιμὲς γιὰ τὸν μετασχηματισμὸ μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια δίδονται ἀπὸ τὴ σχέση

$$S_{(m,n),r} = \frac{E\left[\left|a\left((m,n),r\right)\right|^2\right]}{n-m}, \tag{33}$$

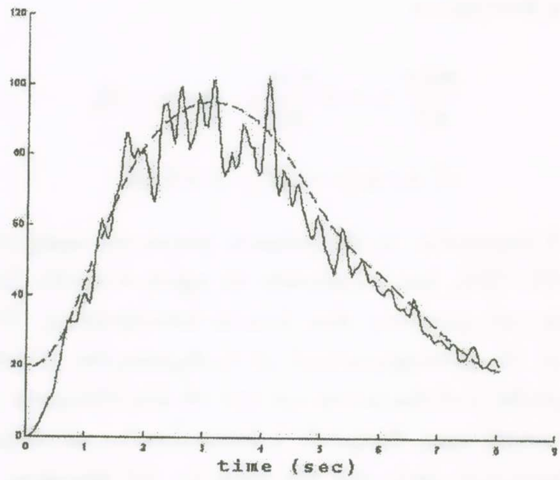
ποὺ ὁρίζεται στὰ διαστήματα

$$\begin{aligned} &\frac{m2\pi}{NT} \leq \omega \leq \frac{n2\pi}{NT}; \quad n-m=10, \\ &rT \leq t \leq (r+1)T; \quad r=1:N. \end{aligned} \tag{34}$$

Τὸ Σχῆμα 4 ἀπεικονίζει τὸ ἐξελισσόμενο φάσμα γιὰ τιμὲς τῶν (m, n) στὶς Ἐξ. (33) καὶ Ἐξ. (34), ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση n-m=10. Σημειώνεται ὅτι αὐτὴ ἡ ἐκτίμηση τοῦ φάσματος εἶναι ἀρκετὰ ἱκανοποιητική. Ἡ ἀκρίβεια ποὺ ἐπιτυγχάνεται μὲ τὸν μετασχηματισμὸ μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια ἐπιβεβαιώνεται καὶ ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα γιὰ τὴ στιγμιαία μέση τετραγωνικὴ τιμή, Σχῆμα 5, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἐμβαδὸ τῆς ἐπιφάνειας ποὺ περικλείεται κάτω ἀπὸ τὴν καμπύλη τοῦ φάσματος γιὰ κάθε χρονικὴ στιγμή.



Σχῆμα 4: Προσέγγιση φάσματος χρησιμοποιώντας τὸ μετασχηματισμὸ μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια.



Σχῆμα 5: Στιγμιαία μέση τετραγωνικὴ τιμὴ τῆς ἀνέλιξης (συνεχὴς γραμμὴ) καὶ προσέγγιση μὲ τὸ μετασχηματισμὸ μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια (διακεκομμένη γραμμή).

4. ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

4.1 Μονοβάθμιο σύστημα

Στὴ συνέχεια ὁ μετασχηματισμὸς ἁρμονικῶν κυματιδίων ἐφαρμόζεται στὸν προσδιορισμὸ τῆς ἀπόκρισης ἑνὸς γραμμικοῦ μονοβάθμιου συστήματος γιὰ μὴ στάσιμη διέγερση (Tratskas and Spanos 2003). Στὸ σύστημα ἔχει μικρὴ ἀπόσβεση καὶ εἶναι ἀρχικὰ σὲ ἠρεμία. Ἡ ἐξίσωση κίνησης τοῦ συστήματος δίδεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t), \tag{35}$$

ὅπου m εἶναι ἡ μάζα τοῦ ταλαντωτῆ, c εἶναι ὁ συντελεστὴς ἀπόσβεσης, k ἡ ἀκαμψία καὶ $f(t)$ ἡ διέγερση. Ἡ Ἐξ. (35) μπορεῖ νὰ ἐπιλυθεῖ εἴτε στὸ πεδίο τοῦ χρόνου, εἴτε στὸ πεδίο τῶν συχνοτήτων. Ἡ λύση στὸ πεδίο τοῦ χρόνου ἔχει τὴ γενικὴ μορφὴ

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)f(\tau)d\tau, \tag{36}$$

ὅπου

$$h(t)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_d t),\quad \zeta<1 \tag{37}$$

καὶ

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},\qquad \zeta=\frac{c}{2\sqrt{km}},\qquad \omega_d=\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}. \tag{38}$$

Ἐπιπλέον, ἡ λύση στὸ πεδίο τῶν συχνοτήτων, ὑπὸ τὴν προϋπόθεση ὅτι οἱ σχετιζόμενοι μετασχηματισμοὶ ὑπάρχουν, δίδεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$X(\omega)=H(\omega)F(\omega), \tag{39}$$

ὅπου $F(\omega)$ εἶναι ὁ μετασχηματισμὸς Fourier τῆς συνάρτησης $f(t)$. Δηλαδὴ

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt. \tag{40}$$

καὶ $H(\omega)$ εἶναι ὁ μετασχηματισμὸς Fourier τῆς $h(t)$, δηλαδὴ

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{k-m\omega^2+ic\omega}. \qquad (41)$$

Γιὰ μιὰ τυχαία διέγερση $f(t)$ τόσο ἡ Ἐξ. (36), ὅσο καὶ ἡ ἐξίσωση Ἐξ. (39) ἀδυνατοῦν νὰ περιγράψουν συγκεκριμένα ἐγγενῆ χαρακτηριστικὰ τῆς ἀνέλιξης ἀπόκρισης. Ἡ λύση στὸ χρόνο δὲν δίνει ἀπευθείας κάποια πληροφορία σχετικὰ μὲ τὶς συχνότητες καὶ τὴν ἀνέλιξή τους στὸ χρόνο. Ἡ λύση στὸ πεδίο τῶν συχνοτήτων δίνει τὸ «μέσο» περιεχόμενο συχνοτήτων τῆς ἀνέλιξης ἀπόκρισης καὶ ἀδυνατεῖ νὰ ἐντοπίσει ἀπότομες καὶ μικρῆς διάρκειας μεταβολὲς στὴ συχνότητα.

Εἶναι λοιπὸν ἐπιθυμητὴ μιὰ συνδυασμένη λύση, ἡ ὁποία εἶναι ἱκανὴ νὰ περιγράψει τὰ μὴ στάσιμα χαρακτηριστικὰ τῆς ἀνέλιξης ἀπόκρισης. Λόγω αὐτῶν τῶν ἰδιοτήτων του, ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια ἐφαρμόζεται στὴν Ἐξ. (35) (Basu and Gupta 1998).

$$m\frac{\partial^2 W_\psi^c x}{\partial b^2}+c\frac{\partial W_\psi^c x}{\partial b}+kW_\psi^c x=W_\psi^c f \qquad (42)$$

ὅπου $W\,x$ καὶ $W\,f$ εἶναι οἱ μετασχηματισμοὶ μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια τῆς ἀπόκρισης καὶ τῆς διέγερσης ἀντίστοιχα. Στὴ συνέχεια ἡ Ἐξ. (42) μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ γιὰ τὴν ἐξαγωγὴ τῶν στατιστικῶν χαρακτηριστικῶν τῆς ἀνέλιξης ἀπόκρισης.

Ἀκολούθως δίνεται μιὰ σύντομη περιγραφὴ τῆς διαδικασίας ἐπίλυσης τῆς Ἐξ. (42) γιὰ τὴν περίπτωση τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια. Γιὰ ἁπλότητα ἐφαρμόζεται ὁ μετασχηματισμὸς μὲ δυαδικὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια καὶ τὰ σύμβολα $W\,x$ καὶ $W\,f$ ἀντικαθίστανται ἀπὸ τὰ $WT_x(j,k)$ καὶ $WT_f(j,k)$ γιὰ νὰ εἶναι ἐμφανὲς ὅτι ἡ λύση δίνεται στὸ διακεκριμενοποιημένο πεδίο χρόνου-συχνοτήτων.

Σημειώνεται ὅτι ὁ μετασχηματισμὸς $WT_f(j,k)$ συνδέεται μὲ περιορισμένο εὖρος συχνοτήτων, τὸ ὁποῖο καθορίζεται ἀπὸ τὸ δείκτη κλίμακας j (Newland 1993; Spanos et al. 2004). Ἔτσι, ὁ μετασχηματισμὸς τῆς ἀπόκρισης γιὰ δείκτη κλίμακας j, $WT_x(j,k)$, μπορεῖ νὰ προκύψει παίρνοντας τὴ συνέλιξη τοῦ μετασχηματισμοῦ $WT_f(j,k)$ μὲ τὴ συνάρτηση $h_j(k)$, ἡ ὁποία μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ ὅτι ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕνα «ὑποσύστημα» γιὰ δείκτη κλίμακας j. Συγκεκριμένα, ἕνα τέτοιο «ὑποσύστημα» περιγράφει τὴ συμπεριφορὰ τοῦ ἀρχικοῦ δυναμικοῦ συστήματος τῆς Ἐξ. (35) σὲ εὖρος συχνοτήτων ποὺ καθορίζεται ἀπὸ τὸ δείκτη κλίμακας j καὶ συνδέεται μὲ ἐνέργεια τῆς συνάρτησης μεταφορᾶς στὸ ἴδιο περιορισμένο εὖρος συχνοτήτων. Ἡ διακεκριμενοποίηση τῆς συνάρτησης μεταφορᾶς γίνεται σύμφωνα μὲ τὴ σχέση

$$H_{2^j+s} = 2\pi H\left(\omega = 2\pi\left(2^j + s\right)\right), \tag{43}$$

ἡ δὲ συνάρτηση $h_j(k)$ μπορεῖ νὰ προκύψει ἀπὸ τὴν Ἐξ. (43) μέσω τοῦ ἀντίστροφου μετασχηματισμοῦ Fourier. Δηλαδή,

$$h_j\left(k\right) = \sum_{s=0}^{2^j-1} H_{2^j+s} e^{i2\pi sk/2^j} \tag{44}$$

Ἡ παραπάνω σχέση γιὰ τὴ συνάρτηση $h_j(k)$ μπορεῖ νὰ ἑρμηνευθεῖ ὡς ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια τῆς Ἐξ. (37). Ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια μιᾶς τυχαίας συνάρτησης $f(t)$ δίνεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωση

$$a\left(j,k\right) = \sum_{s=0}^{2^j-1} F_{2^j+s} e^{i2\pi sk/2^j} \tag{45}$$

ὅπου F_n εἶναι οἱ συντελεστὲς τοῦ μετασχηματισμοῦ Fourier τῆς $f(t)$. Στὴ συνέχεια ἀκολουθεῖται ὁ παρακάτω συμβολισμὸς

$$h_j\left(k\right) = T\left(j,k\right) = \sum_{s=0}^{2^j-1} H_{2^j+s} e^{i2\pi sk/2^j}. \tag{46}$$

Ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια $W_\psi^c x$ τῆς ἀπόκρισης μπορεῖ νὰ ἐκφραστεῖ ὡς

$$WT_x\left(j,k\right) = \sum_{z=0}^{2^j-1} T\left(j,z\right) WT_f\left(j,k-z\right). \tag{47}$$

Ἡ Ἐξ. (26) μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τοῦ φάσματος ἀπόκρισης τοῦ «τοπικοῦ» συστήματος γιὰ δεῖκτες κλίμακας καὶ θέσης j καὶ k ἀντίστοιχα

$$S_{j,k} = \frac{E\left[\left(\sum_{z=0}^{2^j-1} T\left(j,z\right) WT_f\left(j,k-z\right)\right)^2\right]}{2^j}, \tag{48}$$

στὰ διαστήματα ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὴν Ἐξ. (27). Προφανῶς, ἀνάλογη διαδικασία μπορεῖ νὰ ἀκολουθηθεῖ καὶ στὴν περίπτωση τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ γενικὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια. Στὴν περίπτωση αὐτὴ τὸ φάσμα ἀπόκρισης τοῦ «τοπικοῦ» συστήματος δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$S_{(m,n),r} = \frac{E\left[\left(\sum_{z=0}^{n-m-1} T\left((m,n),z\right) WT_f\left((m,n),r-z\right)\right)^2\right]}{n-m} \tag{49}$$

στὰ διαστήματα ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὴν Ἐξ. (29).

4.2 Πολυβάθμιο σύστημα

Ἡ διαδικασία προσδιορισμοῦ τοῦ φάσματος ἀπόκρισης ποὺ ἀναπτύχθηκε στὴν παραπάνω ἑνότητα γιὰ μονοβάθμια συστήματα μπορεῖ νὰ ἐπεκταθεῖ καὶ στὴν περίπτωση πολυβάθμιων συστημάτων (Tratskas and Spanos 2003). Ἡ ἐξίσωση κίνησης γιὰ ἕνα d-βάθμιο σύστημα δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t), \tag{50}$$

ὅπου **M**, **C** καὶ **K** εἶναι οἱ τὰ $d \times d$ μητρῶα μάζας, ἀπόσβεσης καὶ ἀκαμψίας ἀντίστοιχα. Ἡ συνάρτηση μεταφορᾶς τοῦ συστήματος τῆς Ἐξ. (50) δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$\mathbf{H}(\omega) = \left[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C}\right]^{-1}. \tag{51}$$

Ἡ Ἐξ. (51) μπορεῖ νὰ γραφτεῖ στὴ μορφὴ

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1d}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2d}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{d1}(\omega) & H_{d2}(\omega) & \dots & H_{dd}(\omega) \end{bmatrix}, \tag{52}$$

καὶ ὁ τανυστὴς μεταφορᾶς ἀριθμητικῶν κυματιδίων εἶναι

$$\mathbf{T}(j,k)=\begin{bmatrix} T_{11}(j,k) & T_{12}(j,k) & \ldots & T_{1d}(j,k) \\ T_{21}(j,k) & T_{22}(j,k) & \ldots & T_{2d}(j,k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{d1}(j,k) & T_{d2}(j,k) & \ldots & T_{dd}(j,k) \end{bmatrix}, \qquad (53)$$

ὅπου $T_{lr}(j,k)$, γιὰ $l,r=1,\ldots,d$ συμβολίζει τὸ μετασχηματισμὸ μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια τοῦ συστήματος, γιὰ δεῖκτες κλίμακας καὶ θέσης j καὶ k ἀντίστοιχα, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ στοιχεῖο $H_{lr}(\omega)$ τοῦ μητρώου συνάρτησης μεταφορᾶς. Γιὰ παράδειγμα, ἡ ἐξίσωση ποὺ περιγράφει αὐτὴ τὴ σχέση στὴν περίπτωση τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ δυαδικὰ ἁρμονικὰ κυματίδια εἶναι

$$T_{lr}(j,k)=\int_{2\pi 2^j}^{4\pi 2^j} H_{lr}(\omega)e^{i\omega k/2^j}d\omega. \qquad (54)$$

Ὁ μετασχηματισμὸς ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ $l^{\sigma\tau\eta}$ μάζα ὑπολογίζεται σύμφωνα μὲ τὸ σχῆμα συνέλιξης

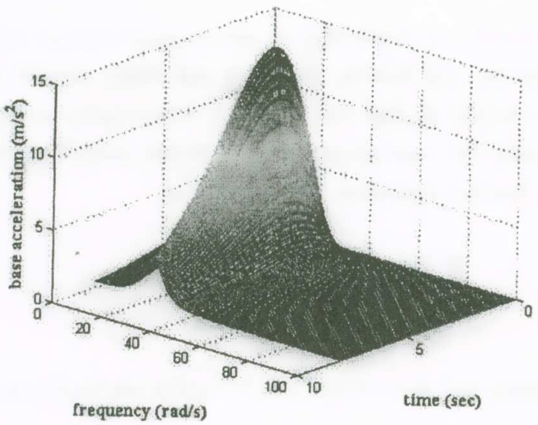
$$WT_{x_l}(j,k)=\sum_{r=1}^{d}\sum_{z=0}^{2^j-1}T_{lr}(j,z)WT_{f_r}(j,k-z). \qquad (55)$$

Τὸ ἐξελικτικὸ φάσμα τοῦ συστήματος μπορεῖ νὰ ὑπολογιστεῖ σύμφωνα μὲ τὶς Ἐξ. (26) καὶ Ἐξ. (55). Ἀντίστοιχη διαδικασία μπορεῖ νὰ ἀκολουθηθεῖ καὶ στὴν περίπτωση τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ γενικὰ ἁρμονικὰ κυματίδια.

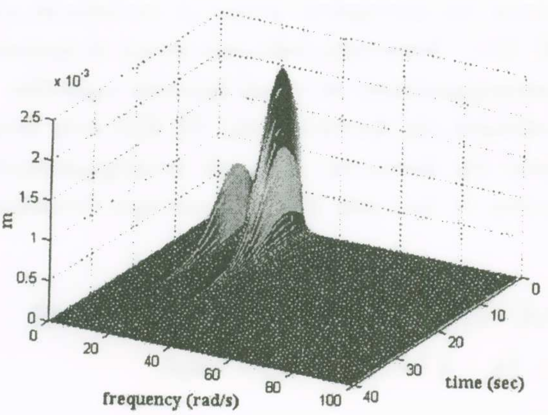
Γιὰ τὴν ἐπιβεβαίωση τῆς ἀξιοπιστίας τῆς Ἐξ. (55) στὴν ἐκτίμηση τῶν φασματικῶν ἰδιοτήτων τῆς ἀπόκρισης μέσω τοῦ μετασχηματισμοῦ ἀριθμητικῶν κυματιδίων θεωρεῖται τὸ ἀκόλουθο 2-βάθμιο σύστημα (Tratskas and Spanos 2003)

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1+c_1\dot{x}_1+c_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2)+k_1x_1+k_2(x_1-x_2)=-m_1\ddot{z} \\ &m_2\ddot{x}_2+c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1)+k_2(x_2-x_1)=-m_2\ddot{z}, \end{aligned} \qquad (56)$$

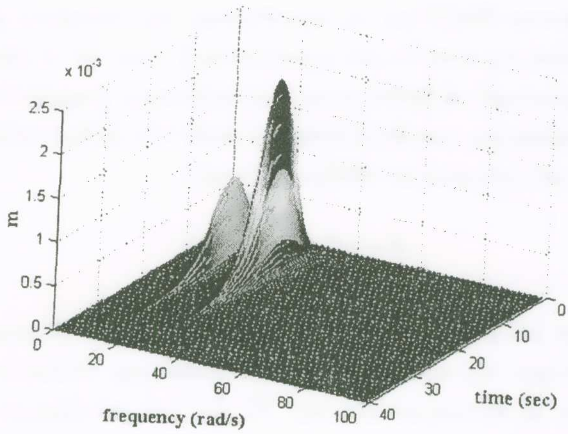
ὅπου z ἀντιστοιχεῖ στὴν ἐπιτάχυνση τοῦ ἐδάφους. Οἱ ἀκόλουθες ἀριθμητικὲς τιμὲς χρησιμοποιοῦνται στὴν ἀνάλυση: m_1=12.0 kg, m_2=5.0 kg, k_1=4000 N/m, k_2=2000 N/m, c_1=8.0 N/msec, καὶ c_2=2.0 N/msec. Γιὰ τὴ σύνθεση τῆς διέγερσης z λευκὸς θόρυβος περνάει ἀπὸ ἕνα φίλτρο δεύτερης τάξης μὲ φυσικὴ συχνότητα ω_0=18 rad/sec καὶ ἀπόσβεση ζ=0.2. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο, ἡ ἐνέργεια τοῦ φάσματος τῆς διέγερσης ἐκτείνεται στὸ εὗρος τῶν συχνοτήτων, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὶς δύο ἰδιομορφίες τοῦ συστήματος, δηλαδὴ ω_1=13.7 rad/sec καὶ ω_2=26.7 rad/sec.



Σχῆμα 6: Φάσμα τῆς διέγερσης τοῦ συστήματος τῆς 'Εξ. (56) χρησιμοποιώντας τὸν μετασχηματισμὸ μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια.



Σχῆμα 7: Φάσμα ἀπόκρισης τῆς μετακίνησης τῆς πρώτης μάζας τοῦ συστήματος τῆς 'Εξ. (56) χρησιμοποιώντας τὸν μετασχηματισμὸ μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια καὶ προσομοιώσεις Monte Carlo.



Σχῆμα 8: Φάσμα ἀπόκρισης τῆς μετακίνησης τῆς πρώτης μάζας τοῦ συστήματος τῆς Ἐξ. (56) χρησιμοποιώντας τὸν μετασχηματισμὸ μὲ ἐπεξεργασία μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια καὶ τὸ σχῆμα συνέλιξης τῆς Ἐξ. (47).

Τὸ Σχῆμα 6 ἀπεικονίζει τὸ φάσμα τῆς διέγερσης ὑπολογισμένο ἀπὸ τὸ μετασχηματισμὸ μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια μὲ παραμέτρους n-m=10, γιὰ 300 χρονο-ἱστορίες. Τὸ Σχῆμα 7 ἀπεικονίζει τὸ ἐξελικτικὸ φάσμα τῆς μετακίνησης τῆς πρώτης μάζας τοῦ συστήματος μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια σὲ ἀποκρίσεις τοῦ συστήματος ἀπὸ προσομοιώσεις Monte Carlo. Τὸ Σχῆμα 8 ἀπεικονίζει τὸ ἐξελικτικὸ φάσμα, ὅπως αὐτὸ προκύπτει ἀπὸ ὑπολογισμὸ τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια μέσω τοῦ σχήματος συνέλιξης τῆς Ἐξ. (47). Ἀπὸ παρατήρηση τῶν δύο τελευταίων σχημάτων προκύπτει ὅτι οἱ δύο μέθοδοι παράγουν τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα.

5. ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΥΠΟ ΜΗ ΣΤΑΣΙΜΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ

Ἡ ἐκτίμηση τοῦ ἐξελικτικοῦ φάσματος μὴ γραμμικῶν συστημάτων παρουσιάζει ἀρκετὲς μαθηματικὲς δυσκολίες. Ὡστόσο, ἡ μέθοδος ποὺ ἀναπτύχθηκε γιὰ τὸν προσδιορισμὸ γραμμικῶν συστημάτων μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ μαζὶ μὲ τὴ μέθοδο τῆς στατιστικῆς γραμμικοποίησης (Donley and Spanos 1990;

Roberts and Spanos 2003) γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τῆς ἀπόκρισης μὴ γραμμικῶν συστημάτων. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι μιὰ προσεγγιστικὴ λύση γιὰ τὸ φάσμα μὴ γραμμικῆς ἀπόκρισης μπορεῖ νὰ βρεθεῖ μέσω ἑνὸς ἰσοδύναμου γραμμικοῦ συστήματος, τοῦ ὁποίου οἱ παράμετροι προσδιορίζονται στὸ πεδίο τῶν ἀριθμητικῶν κυματιδίων.

Ἔστω ἕνα μὴ γραμμικὸ μονοβάθμιο σύστημα

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = f(t), \tag{57}$$

ὅπου $g(x, \dot{x})$ εἶναι μιὰ μὴ γραμμικὴ συνάρτηση τῶν x καὶ ẋ. Ἡ κλασικὴ προσέγγιση στὸ πρόβλημα τῆς στατιστικῆς γραμμικοποίησης (Roberts and Spanos 2003) συνδέεται μὲ ἀντικατάσταση τῆς Ἐξ. (57) μὲ μιὰ ἐξίσωση κίνησης ἑνὸς γραμμικοῦ συστήματος

$$\ddot{x} + 2\zeta_e \omega_e \dot{x} + \omega_e^2 x = f(t), \tag{58}$$

ὅπου ω_e καὶ ζ_e εἶναι ἡ πρὸς εὕρεση ἰσοδύναμη συχνότητα καὶ ἰσοδύναμη ἀπόσβεση ἀντίστοιχα. Μὲ ἐφαρμογὴ τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια στὶς Ἐξ. (57) καὶ Ἐξ. (58) (Basu and Gupta 1999a) προκύπτουν οἱ παρακάτω σχέσεις

$$\frac{\partial^2 W_\psi^c x}{\partial b^2} + W_\psi^c g(x, \dot{x}) = W_\psi^c f, \tag{59}$$

καὶ

$$\frac{\partial^2 W_\psi^c x}{\partial b^2} + 2\zeta_e \omega_e \frac{\partial W_\psi^c x}{\partial b} + \omega_e^2 W_\psi^c x = W_\psi^c f. \tag{60}$$

Τὸ σφάλμα ἀπὸ τὴν ἀντικατάσταση τῆς Ἐξ. (59) ἀπὸ τὴν Ἐξ. (60) δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση

$$\varepsilon = 2\zeta_e \omega_e \frac{\partial W_\psi^c x}{\partial b} + \omega_e^2 W_\psi^c x - W_\psi^c g(x, \dot{x}). \tag{61}$$

Γιὰ νὰ ἐφαρμοσθεῖ ὁ μετασχηματισμὸς μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια ἡ Ἐξ. (61) πρέπει νὰ ἐκφραστεῖ στὴ διακριτοποιημένη μορφὴ

$$\frac{\partial}{\partial \omega_{ej}^2} \sum_{all\ \mathrm{k}} E\left[\varepsilon_{j,k}^2\right] = 0\,, \tag{62}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_{ej}} \sum_{all\ \mathrm{k}} E\left[\varepsilon_{j,k}^2\right] = 0\,. \tag{63}$$

Ἀφοῦ ἐπιλυθοῦν οἱ Ἐξ. (62) καὶ Ἐξ. (63), γίνεται προσεγγιστικὴ ἐκτίμηση τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια τῆς ἀπόκρισης τοῦ μὴ γραμμικοῦ συστήματος ἀπὸ τὴν Ἐξ. (47) καὶ ἀπὸ αὐτὴ τοῦ ἐξελικτικοῦ φάσματος ἀπὸ τὴν Ἐξ. (26). Προφανῶς, ἀνάλογη διαδικασία μπορεῖ νὰ ἀκολουθηθεῖ καὶ στὴν περίπτωση τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ γενικὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια.

Σημειώνεται ὅτι ἡ στοχαστικὴ γραμμικοποίηση μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια μπορεῖ νὰ ἐφαρμοστεῖ καὶ στὴν ἀνάλυση πολυβάθμιων συστημάτων. Σὲ αὐτὴ τὴν περίπτωση θεωρεῖται ἕνα διάνυσμα σφάλματος, τὸ ὁποῖο ἐλαχιστοποιεῖται ὡς πρὸς κάθε στοιχεῖο τοῦ μητρώου $\mathbf{K_e}$ καὶ τοῦ μητρώου $\mathbf{C_e}$.

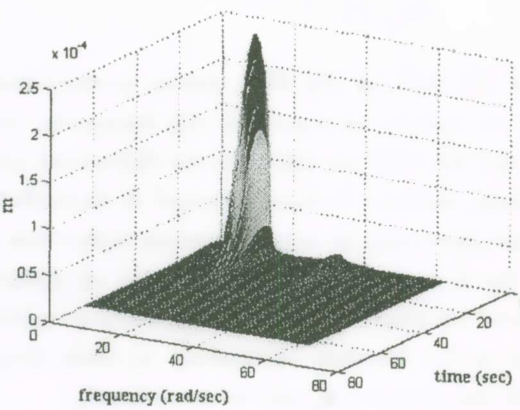
Στὴ συνέχεια παρουσιάζεται μιὰ ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου. Ἔστω τὸ δευτεροβάθμιο σύστημα (Tratskas 2002)

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + \left(c_1 + \varepsilon x_1^2\right)\dot{x}_1 + c_2\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right) + k_1 x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) = -m_1\ddot{z} \\ &m_2\ddot{x}_2 + c_2\left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right) + k_2\left(x_2 - x_1\right) = -m_2\ddot{z}, \end{aligned} \tag{64}$$

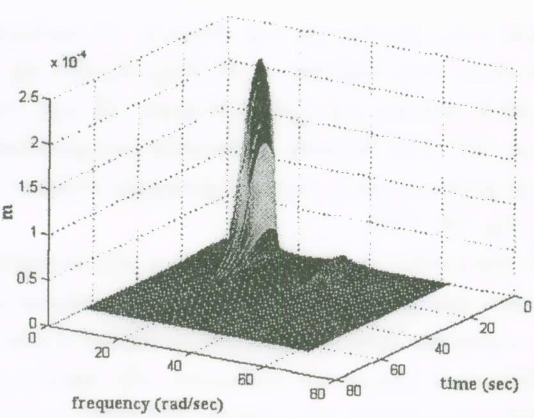
ὅπου z ἀντιστοιχεῖ στὴν ἐπιτάχυνση τοῦ ἐδάφους. Οἱ ἀκόλουθες ἀριθμητικὲς τιμὲς χρησιμοποιοῦνται στὴν ἀνάλυση: m_1=1.0 kg, m_2=0.5 kg, k_1=1000 N/m, k_2=100 N/m, c_1=1.0 N/msec, καὶ c_2=0.5 N/msec. Ἡ τιμὴ τῆς παραμέτρου ε λαμβάνεται ἴση μὲ 10^4. Γιὰ διέγερση z θεωρεῖται μιὰ μεταβαλλόμενη ἀνέλιξη λευκοῦ θορύβου μὲ μηδενικὴ μέση τιμὴ καὶ μοναδιαία ἀπόκλιση καὶ συνάρτηση μεταβολῆς αὐτὴ τῆς Ἐξ. (32).

Τὸ Σχῆμα 9 ἀπεικονίζει τὸ ἐξελικτικὸ φάσμα τῆς ἀπόκρισης τῆς πρώτης μάζας, ὑπολογισμένο ἀπὸ μετασχηματισμὸ μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια 300 προσομοιώσεων Monte Carlo. Τὸ Σχῆμα 10 ἀπεικονίζει τὸ ἐξελικτικὸ φάσμα τῆς ἀπόκρισης τῆς πρώτης μάζας, ὑπολογισμένο μὲ τὴ μέθοδο στατιστικῆς γραμμικοποίησης μέσω τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια. Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις λαμβάνεται $(n\text{-}m)$=10. Οἱ δύο μέθοδοι δίνουν ἀποτελέσματα ποὺ συμφωνοῦν τόσο στὸ πεδίο τοῦ χρόνου, ὅσο καὶ στὸ πεδίο τῶν συχνοτήτων.

Γενικεύσεις τῶν ἀνωτέρω μεθόδων γιὰ συστήματα μὲ μὴ γραμμικὴ ἐλαστικὴ ἢ ἀνελαστικὴ συμπεριφορὰ δίδονται στὴ διδακτορικὴ διατριβὴ (Tezcan 2005).



Σχῆμα 9: Φάσμα ἀπόκρισης τῆς μετακίνησης τῆς πρώτης μάζας τοῦ συστήματος τῆς Ἐξ. (64) χρησιμοποιώντας τὸν μετασχηματισμὸ μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια καὶ προσομοιώσεις Monte Carlo.



Σχῆμα 10: Φάσμα ἀπόκρισης τῆς μετακίνησης τῆς πρώτης μάζας τοῦ συστήματος τῆς Ἐξ. (64) χρησιμοποιώντας τὴν μέθοδο στατιστικῆς γραμμικοποίησης μὲ μετασχηματισμὸ μὲ ἐπεξεργασμένα μὲ φίλτρο ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια.

6. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στὸ ἄρθρο αὐτὸ ἔγινε μιὰ σύντομη παρουσίαση τῆς θεωρίας τοῦ μετασχηματισμοῦ μὲ ἀριθμητικὰ κυματίδια ὑπὸ τὸ πρίσμα τῶν ἐφαρμογῶν της στὴ δυναμικὴ τῶν κατασκευῶν. Ἰδιαίτερη ἔμφαση δόθηκε στὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια λόγω τῆς ἰδιότητας μὴ ἐπικάλυψης τῶν συχνοτήτων τοῦ Fourier μετασχηματισμοῦ τους. Ἀρχικὰ παρουσιάστηκε τὸ πρόβλημα ἐντοπισμοῦ τῶν χαρακτηριστικῶν τῆς διέγερσης ἀπὸ κοινοῦ στὰ πεδία χρόνου καὶ συχνοτήτων.

Σημειώνεται ὅτι τὰ ἁρμονικὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια ἔτυχαν ἰδιαίτερης προσοχῆς στὸ παρὸν ἄρθρο λόγω τῆς ἑλκυστικῆς ἰδιότητας τῆς μὴ ἐπικάλυψης στὸν ἄξονα τῶν συχνοτήτων καὶ τῆς σχετικῆς εὐχέρειας προσδιορισμοῦ τῆς ἀπόκρισης γραμμικῶν καὶ μὴ γραμμικῶν συστημάτων σὲ διεγέρσεις ποὺ ἀναπαρίστανται μὲ αὐτοῦ τοῦ εἴδους τὰ κυματίδια (Spanos et al. 2005). Ὅμως, ἐὰν αὐτὴ ἡ τελευταία ἰδιότητα δὲν εἶναι ἀπαραίτητη γιὰ ἕνα συγκεκριμένο πρόβλημα ἀνάλυσης σημάτων, ἄλλες οἰκογένειες κυματιδίων, ὅπως στὸ Spanos and Failla 2004, εἶναι δυνατὸ νὰ χρησιμοποιηθοῦν μὲ συγκρίσιμη ἀποτελεσματικότητα.

Ἐν γένει, τὰ ἀριθμητικὰ κυματίδια εἶναι ἕνα λίαν ἀποτελεσματικὸ μαθηματικὸ μικροσκόπιο, τοῦ ὁποίου ἡ χρήση γιὰ ἐντοπισμὸ καὶ ἀπεικόνιση μεταβολῶν μικρῆς διάρκειας θὰ ἐπεκταθεῖ μὲ τὴν πάροδο τοῦ χρόνου σὲ μιὰ πληθώρα ἐπιστημονικῶν καὶ τεχνικῶν ἐφαρμογῶν. Ὅμως, δὲν θὰ πρέπει νὰ θεωροῦνται πανάκεια γιὰ κάθε εἴδους πρόβλημα, δεδομένου ὅτι ἐξελισσόμενες ἀνταγωνιστικὲς μέθοδοι, ὅπως ἐκεῖνες τῶν ἐγγενῶν ἰδιομορφῶν (Huang et al. 1998; Politis et al. 2004), εἶναι πιθανὸν νὰ εἶναι περισσότερο κατάλληλες γιὰ μιὰ συγκεκριμένη περίπτωση, ὅπως παραδείγματος χάριν ὁ προσδιορισμὸς τῆς στιγμιαίας συχνότητας ἑνὸς σήματος.

Ὡς ἐκ τούτου, ὁ ἀναλυτὴς ἑνὸς συγκεκριμένου τοπικὰ ἐξελισσόμενου φαινομένου θὰ πρέπει νὰ σταθμίζει τὰ πλεονεκτήματα τοῦ σχεδὸν πλήρως καθιερωμένου ὑπολογιστικοῦ προγραμματισμοῦ τῶν ἀριθμητικῶν κυματιδίων σὲ σύγκριση μὲ τὶς αὐξημένες ὑπολογιστικὲς ἀπαιτήσεις περισσότερο ἐξειδικευμένων τεχνικῶν, ὅπως τὰ ἀριθμητικὰ «κελαηδίσματα», ποὺ ὅμως ἐπιτρέπουν τὸν προσδιορισμὸ πιὸ ἐπικεντρωμένων ἰδιοτήτων τῶν σημάτων (Politis 2005).

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Agrawal, O. P. (1998). "Application of wavelets in modeling stochastic dynamic systems". *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME*, 120(3), 763-769.
2. Basu, B., and Gupta, V. K. (1997). "Non-stationary seismic response of MDOF systems by wavelet transform". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26(12), 1243-1258.
3. Basu, B., and Gupta, V. K. (1998). "Seismic response of SDOF systems by wavelet modeling of nonstationary processes". *Journal of Engineering Mechanics*, 124(10), 1142-1150.
4. Basu, B., and Gupta, V. K. (1999a). "On Equivalent Linearization Using the Wavelet Transform". *Journal of Vibration and Acoustics*, 121(4), 429-432.
5. Basu, B., and Gupta, V. K. (1999b). "Wavelet-based analysis of the non-stationary response of a slipping foundation". *Journal of Sound and Vibration*, 222(4), 547-563.
6. Basu, B., and Gupta, V. K. (2000). "Stochastic seismic response of single-degree-of-freedom systems through wavelets". *Engineering Structures*, 22(12), 1714-1722.
7. Basu, B., and Gupta, V. K. (2001). "Wavelet-based stochastic seismic response of a Duffing oscillator". *Journal of Sound and Vibration*, 245(2), 251-260.
8. Borino, G., Di Paola, M., and Muscolino, G. (1988). "Non-stationary spectral moments of base excited MDOF". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16, 745-756.
9. Carmona, R., Hwang, W.-L., and Torrésani, B. (1998). *Practical time-frequency analysis: Gabor and wavelet transforms with an implementation in S*, Academic Press, San Diego.
10. Cohen, L. (1995). *Time-frequency analysis*, Prentice Hall PTR, Englewood Cliffs, N.J.
11. Conte, J. P., and Peng, B. F. (1997). "Fully nonstationary analytical earthquake ground-motion model". *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*, 123(1), 15-24.
12. Daubechies, I. (1988). "Orthogonal Bases of Compactly Supported Wavelets". *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41, 909-996.
13. Daubechies, I. (1992). *Ten lectures on wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa.
14. Diaz, A. R., and Yamaura, K. "Computational performance of wavelet-based meshless methods in the solution of very large scale elasticity

problems". *2001 ASME Design Engineering Technical Conference and Computers and Information in Engineering Conference, Sep 9-12 2001*, Pittsburgh, PA, United States, 373-380.

15. Donley, M. G., and Spanos, P. D. (1990). *Dynamic analysis of non-linear structures by the method of statistical quadratization*, New York, Berlin.
16. Gabor, D. (1946). "Theory of Communication". *The Journal of the Institution of Electrical Engineers*, 93(3), 429-457.
17. Gasparini, D. A., and DebChaudhury, A. (1980). "Dynamic response to nonstationary nonwhite excitation". 106(6), 1233-1248.
18. Gaul, L., and Hurlebaus, S. (1998). "Identification of the impact location on a plate using wavelets". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(6), 783-795.
19. Ghanem, R., and Romeo, F. (2000). "A Wavelet-Based Approach for the Identification of Linear Time-Varying Dynamical Systems". *Journal of Sound and Vibration*, 234(4), 555-576.
20. Goupillaud, P., Grossman, A., and Morlet, J. (1984). "Cycle-Octave and Related Transforms in Seismic Signal Analysis". *Geoexploration*, 23, 85-102.
21. Grigoriu, M., Ruiz, S. E., and Rosenblueth, E. (1988). "Mexico earthquake of September 19, 1985 - nonstationary models of seismic ground acceleration". *Earthquake Spectra*, 4(3), 551-568.
22. Grossman, A., and Morlet, A. (1984). "Decomposition of Hardy Functions Into Square Integrable Wavelets of Constant Shape". *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 15(4), 723-736.
23. Hans, S., Ibraim, E., Pernot, S., Boutin, C., and Lamarque, C. H. (2000). "Damping Identification in Multi-Degree of Freedom System Via a Wavelet-Logarithmic Decrement. Part 2: Study of a Civil Engineering building". *Journal of Sound and Vibration*, 235(3), 375-403.
24. Hsiao, C.-H., and Wang, W.-J. (1998). "State analysis and optimal control of linear time-varying systems via Haar wavelets". *Optimal Control Applications and Methods*, 19(6), 423-433.
25. Huang, N. E., Shen, Z., Long, S. R., Wu, M. C., Shih, H. H., Zheng, Q., Yen, N.-C., Tung, C. C., and Liu, H. H. (1998). "The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert Spectrum for Nonlinear and Non-Stationary Time Series Analysis". *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 454(1971), 903-995.
26. Iyama, J., and Kuwamura, H. (1999). "Application of wavelets to analysis and simulation of earthquake motions". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 28(3), 255-272.
27. Kubo, T., and Penzien, J. (1979). "Simulation of three-dimensional strong ground motions along principal axes, San Fernando earthquake". 7(3), 279-294.

28. Lamarque, C. H., Pernot, S., and Cuer, A. (2000). "Damping Identification in Multi-Degree of Freedom Systems Via a Wavelet-Logarithmic Decrement. Part 1: Theory". *Journal of Sound and Vibration*, 235(3), 361-374.
29. Lin, Y. K., and Yong, Y. (1987). "Evolutionary Kanai-Tajimi earthquake models". *Journal of Engineering Mechanics*, 113(8), 1119-1137.
30. Lind, R., Snyder, K., and Brenner, M. (2001). "Wavelet analysis to characterize non-linearities and predict limit cycles of an aeroelastic system". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(2), 337-356.
31. Mallat, S. G. (1989). "Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of $L^2(R)$". *Transactions of the American Mathematical Society*, 315(1), 69-87.
32. Mei, H., Agarwal, O. P., and Pai, S. S. (1998). "Wavelet-based model for stochastic analysis of beam structures". *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 36(3), 465-470.
33. Muscolino, G. (1988). "Nonstationary envelope in random vibration theory". *Journal of Engineering Mechanics*, 114(8), 1396-1413.
34. Newland, D. E. (1993). *An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis*, New York, Harlow, Essex, England Longman Scientific & Technical.
35. Newland, D. E. (1994a). "Wavelet Analysis of Vibration Part I: Theory". *Journal of Vibration and Acoustics*, 116, 409-416.
36. Newland, D. E. (1994b). "Wavelet Analysis of Vibration Part II: Wavelet Maps". *Journal of Vibration and Acoustics*, 116, 417-425.
37. Newland, D. E. (1999). "Ridge and Phase Identification in the Frequency Analysis of Transient Signals by Harmonic Wavelets". *Journal of Vibration and Acoustics*, 121, 149-155.
38. Papadimitriou, K. (1990). "Stochastic characterization of strong ground motion and applications to structural response". *EERL90-93*, California Institute of Technology, Pasadena, CA.
39. Papoulis, A., and Pillai, S. U. (2002). *Probability, random variables, and stochastic processes*, McGraw-Hill, Boston.
40. Politis, N. (2005). "Wavelets-Based Time-Frequency Analysis Techniques in Structural Engineering", PhD, Advisor: P. D. Spanos, Rice University, Houston, TX.
41. Politis, N. P., Spanos, P.D., Roesset, J. M., and Thomaidis, P. M. "Analysis of Nonlinear Seismic Response of Structural Frames via Adaptive Time-Frequency Resolution Techniques". *17th Engineering Mechanics Conference of the ASCE, EM2004*, Newark, Delaware, 1-8.
42. Priestley, M. B. (1965). "Evolutionary spectra and non-stationary processes. (With discussion)". *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 27, 204-237.

43. Priestley, M. B. (1981). *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press, New York.
44. Qian, S. (2001). *Introduction to Time-Frequency and Wavelet Transforms*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
45. Quek, S. T., Teo, Y. P., and Balendra, T. (1990). "Non-stationary structural response with evolutionary spectra using seismological input model". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 19(2), 275-288.
46. Roberts, J. B., and Spanos, P. D. (1990, 2003). *Random vibration and statistical linearization*, 1^{st} edition, Wiley, Chichester, NY, 2^{nd} edition, Dover Publications, Mineola, NY.
47. Ruzzene, M., Fasana, A., Garibaldi, L., and Piombo, B. (1997). "Natural Frequencies and Dampings Identification Using Wavelet Transform: Application to Real Data". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(2), 207-218.
48. Saragoni, G. R., and Hart, G. C. (1972). "Non-stationary analysis and simulation of earthquake ground motions". *UCLA-ENG-7238*, Earthquake Engineering and Struct. Lab., University of California, Los Angeles, Los Angeles, CA.
49. Senthilnathan, A., and Lutes, L. D. "Maximum value statistics for transient response of linear structures". *Probabilistic Methods in Civil Engineering, Proceedings of the 5th ASCE Specialty Conference, May 25-27 1988*, Blacksburg, VA, USA, 205-208.
50. Spanos, P. D., and Failla, G. (2004). "Evolutionary spectra estimation using wavelets". *Journal of Engineering Mechanics*, 130(8).
51. Spanos, P. D., Failla, G., and Politis, N. P. (2005). "Wavelets and Vibrations Related Applications". Vibrations and Shock Handbook, C. W. de Silva, ed., CRC Press, Boca Raton, FL.
52. Spanos, P. D., Tezcan, J., and Tratskas, P. N. (2004). "Stochastic Processes Evolutionary Spectrum Estimation via the Wavelet Spectrum". *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, in press.
53. Spanos, P. D., and Zeldin, B. A. (1997). "A State-of-the-Art Report on Computational Stochastic Mechanics: Wavelets Concepts". *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12(4), 244-249.
54. Spanos, P. D., and Zeldin, B. A. (1998). "Monte Carlo treatment of random fields: a broad perspective". *Applied Mechanics Reviews*, 51(3), 219-237.
55. Staszewski, W. J. (1998a). "Identification of Non-Linear Systems Using Multi-Scale Ridges and Skeletons of the Wavelet Transform". *The Shock and Vibration Digest*, 214(4), 639-658.
56. Staszewski, W. J. (1998b). "Structural and mechanical damage detection using wavelets". *Shock and Vibration Digest*, 30(6), 457-472.

57. Staszewski, W. J., and Chance, J. E. "Identification of nonlinear systems using wavelets - experimental study". *Proceedings of the 1997 15th International Modal Analysis Conference, IMAC. Part 1 (of 2), Feb 3-6 1997*, Orlando, FL, USA, 1012-1016.
58. Staszewski, W. J., and Tomlinson, G. R. (1994). "Application of the wavelet transform to fault detection in a spur gear". *Mechanical Systems and Signal Processing*, 8(3), 289-307.
59. Tezcan, J. (2005). "Methods of Nonlinear Dynamic Response Determination to Excitations Represented via Wavelets", PhD, Advisor: P. D. Spanos, Rice University, Houston, TX.
60. Tratskas, P., and Spanos, P. D. (2003). "Linear Multi-Degree-of-Freedom System Stochastic Response by Using the Harmonic Wavelet Transform". *Journal of Applied Mechanics*, 70(5), 724-731.
61. Tratskas, P. N. (2002). "Wavelet-based excitation representation and response determination of linear and nonlinear systems", PhD, Advisor: P. D. Spanos, Rice University, Houston.
62. Trifunac, M. D. (1971). "Response Envelope Spectrum and Interpretation of Strong Earthquake Ground Motion". *Bulletin of the Seismological Society of America*, 61(2), 343-356.
63. Vanmarcke, E. H. (1976). "Structural respoonse to earthquakes". Seismic risk and engineering decisions, C. Lomnitz and E. Rosenblueth, eds., Elsevier Scientific Pub. Co., Amsterdam, New York, 287-337.
64. Wang, W. J., and McFadden, P. D. (1995). "Application of Orthogonal Wavelets to Early Gear Damage Detection". Mechanical Systems and Signal Processing, 9(5), 497-507.
65. Wang, W. J., and McFadden, P. D. (1996). "Application of wavelets to gearbox vibration signals for fault detection". *Journal of Sound and Vibration*, 192(5), 927-939.
66. Yeh, C.-H., and Wen, Y. K. (1990). "Modeling of nonstationary ground motion and analysis of inelastic structural response". *Structural Safety Proceedings of the European Mechanics Colloquium, Euromech 250, Jun 19-23 1989*, 8(1-4), 281-298.
67. Youche, Z., Jizeng, W., and Xiaojing, Z. (1998). "Applications of wavelet FEM to bending of beam and plate structures". *Applied Mathematics and Mechanics*, 19(8), 745-755.
68. Zhou, Y. H., Wang, J., and Zheng, X. "Wavelet control model of suppressing vibration of beam-plates with piezoelectric sensors and actuators". *SPIE Conference on Mathematics and Control in Smart Structures*, Newport Beach.