für die Pythagoreer die Zahl 17 hat und die Bedeutung, die ihre ungleichen Teile 9 und 8 $\left(\text{d. h. } \frac{9}{8}\right)$ für die Tonleiter haben, anzudeuten.

Nach Iamblichos ist das Quadrat 4×4 das einzige, dessen Umfang und Inhalt sich durch dieselbe Zahl 16 ausdrücken lassen. Die Zahl 17 liegt in der Nähe der Zahl 16, und deshalb scheint es, dass Platon im Theaetetus bei $\sqrt{17}$ aufhörte. Nach Plutarch ist die Zahl 17 für die Pythagoreer heilig und diese Zahl liegt zwischen 16 und 18. Umfang und Inhalt 16 hat nur ein einziges Quadrat, (4×4), und Umfang und Inhalt 18 hat nur ein einziges rechteckiges Parallelogramm (3×6). Ausserdem stammt das Verhältnis $\frac{9}{8}$ (was für die Tonleiter von Bedeutung ist) von den ungleichen Teilen der Zahl 17. Schliesslich bemerkt E. Stamatis, dass die Zahl 17 die Summe des arithmetischen Mittels und des harmonischen Mittels der Zahlen 6 und 12 ist, die die äusseren Glieder der musikalischen Proportion $6 : 8 = 9 : 12$ sind und von Platon im Timaeus erwähnt werden. Darüber hinaus ist die Zahl der Säulen der Schmalseite des Parthenon 8, die der Längsseile 17. Ferner begegnen wir der Zahl 17 im daktylischen Hexameter bei Homer und in den Μουσικὰ des Ptolemaeus.

ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. — Ἐλεύθεραι πλευρικαὶ ταλαντώσεις ἁπλῆς ῥάβδου ὑπὸ πλαστικὴν ἐξαίτησιν, *ὑπὸ* ***Δ. Γ. Μαγείρου****. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Βασιλ.. Αἰγινήτου.

1. Εἰσαγωγή.

α) Τὸ πρόβλημα τῶν ἐλευθέρων πλευρικῶν ταλαντώσεων μιᾶς πραγματικῆς ράβδου εἰς «πλαστικότητα», ὅταν αὕτη εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἄκρα της εἰς ἁπλῆν στήριξιν, ὁδηγεῖ εἰς τὴν εὕρεσιν λύσεως $u(x,t)$ μιᾶς μὴ γραμμικῆς ἐξισώσεως μὲ μερικὰς παραγώγους τῆς μορφῆς:

$$\left[f(u'') \right]'' = c\ddot{u}, \tag{1}$$

ὅταν αἱ ἀνεξάρτητοι μεταβληταί, διάστημα x καὶ χρόνος t, περιορίζωνται εἰς τὸ πεδίον:

$$D: \quad 0 \leq x \leq \pi, \qquad 0 \leq t \leq \tau < \infty, \tag{2}$$

μὲ ὁριακὰς συνθήκας:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = u''(0,t) = u''(\pi,t) = 0, \tag{3}$$

καὶ μὲ ἀρχικάς:

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \qquad u(x,0) = \varphi_2(x). \tag{4}$$

---

* D. G. MAGIROS, **Lateral free vibrations of simple prismatic bar in plasticity.**

Τὸ c εἰς τὴν (1) εἶναι σταθερόν, αἱ τελεῖαι φανερώνουν παραγώγισιν ὡς πρὸς t, αἱ ὀξεῖαι παραγώγισιν ὡς πρὸς x. Τὸ u(x,t) εἶναι ἡ ἀπόκλισις τῶν ταλαντουμένων σημείων τῆς ράβδου ἀπὸ τῆς ὁριζοντίας θέσεως.

Τὸ μῆκος τῆς ράβδου εἶναι l, καὶ διὰ λόγους εὐκολίας τῶν ὑπολογισμῶν λαμβάνεται τὸ διάστημα $[o,\pi]$ διὰ τὸ x, ἀντὶ τοῦ φυσικοῦ διαστήματος $[o,l]$. Ἡ συνάρτησις $f(u'')$ εἶναι ἡ «καμπτικὴ ροπὴ» M διατομῆς τῆς ράβδου, θεωρουμένης ὡς συναρτήσεως τῆς καμπυλότητος.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς «ἐλαστικότητος» τῆς ράβδου ἡ ροπὴ M παρέχεται διὰ τῆς σχέσεως:

$$M = f(u'') = EIu'', \tag{5}$$

ὅτε, ἐφ' ὅσον EI = σταθερόν, ἡ ἀντίστοιχος διαφορικὴ ἐξίσωσις εἶναι:

$$EIu^{IV} = c\ddot{u}, \tag{6}$$

τῆς ὁποίας ἡ λύσις εἶναι γνωστή.[1]

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως τῆς «πλαστικότητος» ἡ ροπὴ εἶναι μία μὴ γραμμικὴ συνάρτησις τῆς καμπυλότητος, $M = f(u'')$, καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ποία ἡ λύσις τῆς (1) εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην.

β) Διὰ καταλλήλων προϋποθέσεων ἐπὶ τῶν συναρτήσεων $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ καὶ $f(u'')$, ἐπιζητεῖται εὕρεσις λύσεως τῆς μορφῆς:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(t) \cdot \sin mx. \tag{7}$$

Προσδιορίζεται ἡ συνάρτησις $v_m(t)$ μὲ τὴν βοήθειαν συστήματος μὴ γραμμικῶν ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων, τὸ ὁποῖον λύεται δι' ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῶν «διαδοχικῶν προσεγγίσεων». Ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ λύσις ἀνταποκρίνεται εἰς ὅλα τὰ ἐπιτάγματα τοῦ Hadamard[2], ἤτοι ὅτι ὑπὸ καταλλήλους περιορισμοὺς τῶν ἀρχικῶν δεδομένων εἶναι ὁμοιομόρφως συγκλίνουσα, μοναδικὴ καὶ εὐσταθής, ἑπομένως δύναται νὰ παριστᾷ τὴν φυσικὴν πραγματικότητα κατὰ ἱκανοποιητικὸν τρόπον.

2. Κατασκευὴ τῆς λύσεως.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν (1), (3), (4) εἰς τὸ πεδίον (2), ἁρμονικῆς μορφῆς (7) ἀκολουθοῦμεν τὰ κάτωθι τρία στάδια:

α) Ἡ λύσις (7) ἱκανοποιεῖ τὰς συνθήκας (3) διὰ $m = 1, 2, 3, \ldots$ Ὑποθέτοντες τώρα τὴν $u''(x,t)$ μονοτόνως αὐξανομένην καὶ τὰς $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ δυναμένας ν' ἀναπτυχθοῦν εἰς ἡμιτονικὰς κατὰ Fourier σειράς:

[1] S. TIMOSHENKO: Vibration Problems, 2nd edd. (1937), § 54.

[2] R. COURANT: Proc. Inter. Congress of Math., II (1952).

$$\varphi_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \cdot \sin mx, \qquad \varphi_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \cdot \sin mx, \tag{8}$$

ἡ πλήρωσις τῶν συνθηκῶν (4) ὑπὸ τῆς (7) ἀπαιτεῖ, ὅπως ἡ συνάρτησις $v_m(t)$ ἱκανοποιῇ τὰς συνθήκας:

$$v_m(o) = \gamma_m, \qquad \dot{v}_m(o) = \delta_m. \tag{9}$$

β) Ἐκ τῶν (8) εὑρίσκεται ἡ $v_m(t)$. Δεχόμενοι διὰ τὴν $f(u'')$ τὴν μορφήν:

$$f(u'') = \sum_{r=1} P_r \left[u''(x,t)\right]^r, \tag{10}$$

ὅπου P_r σταθεραί, $r = 1, 2, 3, \ldots$, καθὼς καὶ ὅτι αὕτη δέχεται ἡμιτονικὸν κατὰ Fourier ἀνάπτυγμα:

$$f(u'') = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(t) \cdot \sin mx, \tag{11}$$

δυνάμεθα ἐκ τῶν (1), (7), (9), (10), (11), νὰ δώσωμεν εἰς τὴν $v_m(t)$ τὴν μορφήν:

$$\left\{\begin{array}{l} v_m(t) = \gamma_m + t\delta_m - \frac{1}{c} m^2 \sum\limits_{r=1} (-1)^r \sum\limits_{n_1, \cdots n_r}^{1, \ldots \infty} a \cdot n_1^2 \ldots n_r^2 . \\ \int_o^t dt \int_o^t v_{n_1}(t) \ldots v_{n_r}(t)\, dt, \end{array}\right. \tag{12}$$

ὅπου·

$$a = \frac{2}{\pi} P_r \int_o^{\pi} \sin n_1 x \ldots \sin n_r\, x.\ \sin mx\, dx \tag{13}$$

γ) Ἡ (12) παριστᾷ ἓν ἄπειρον σύστημα μὴ γραμμικῶν ὁλοκληρωτικῶν ἐξισώσεων βαθμοῦ r, καὶ ὁ προσδιορισμὸς τῆς $v_m(t)$ δι' ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῶν «διαδοχικῶν προσεγγίσεων» παρέχεται διὰ τοῦ ἀκολούθου τύπου:

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{(o)}{v_m}(t) = \gamma_m + \delta_m \quad, \quad i = o, \\ \overset{(i)}{v_m}(t) = \gamma_m + t\delta_m - \frac{1}{c} m^2 \sum\limits^{r=i} (-1)^r \int_o^t dt \int_o^t \left[\sum\limits_{n_1, \ldots n_r}^{1, \ldots \infty} a \cdot n_1^2 \ldots u_r^2 . \right. \\ \left. \qquad \overset{(i-1)}{v_{n_1}}(t) \ldots \overset{(i-1)}{v_{n_r}}(t) \right] dt, \qquad i \geq 1. \end{array}\right. \tag{14}$$

Ἡ (14) διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ μετασχηματισμοῦ:

$$m^4 v_m(t) = w_m(t), \tag{15}$$

γίνεται:

$$\left\{\begin{aligned} &\overset{(o)}{w}_m(t)=m^4(\gamma_m+t\delta_m)\quad , \quad i=o,\\ &\overset{(i)}{w}_m(t)=m^4(\gamma_m+t\delta_m)-\frac{1}{c}m^6\sum_{r=1}(-1)^r\int_o^t dt\int_o^t\\ &\qquad\left[\sum_{n_1,..n_r}^{i,..\infty}\frac{a}{n_1^2\ldots n_r^2}\overset{(i-1)}{w}_{n_1}(t)\ldots\overset{(i-1)}{w}_{n_r}(t)\right]dt,\ i\geq 1\end{aligned}\right. \tag{16}$$

Ἡ μορφὴ (16) εἶναι κατάλληλος διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ὁμοιομόρφου συγκλίσεως. Ἡ λύσις τῆς (1) δίδεται κατὰ ταῦτα ὑπὸ τῶν (7), (14) ἢ ὑπὸ τῶν (7), (15) καὶ 16).

3. Ομοιόμορφος σύγκλισις τῆς κατασκευασθείσης λύσεως.

Λαμβάνομεν τὴν μορφὴν (16). Δύναται ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει τὸ ὅριον:

$$\lim_{i\to\infty}\overset{(i)}{w}_m(t)\,.$$

Ἡ ὕπαρξις τούτου ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ὁμοιόμορφον σύγκλισιν τῆς διπλῆς σειρᾶς:

$$\sum_{i=o}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\overset{(i+1)}{w}_m(t)-\overset{(i)}{w}_m(t)\right|$$

Χρησιμοποιεῖται ἡ ἀνισότης[1]

$$\frac{|a|}{n_1^2\ldots n_r^2}\leq\frac{2Pr^2}{m^2}$$

ὅπου:

$$P=\max|P_r|$$

Διὰ καταλλήλων παραδοχῶν καὶ περιορισμῶν τῶν δεδομένων συναρτήσεων $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ γίνεται δεκτὸν ὅτι αἱ σειραί:

$$\sum_{m=1}^{\infty}m^{4\left(1+\frac{1}{r}\right)}\gamma_m\,,\quad\sum_{m=1}^{\infty}m^{4\left(1+\frac{1}{r}\right)}\delta_m$$

συγκλίνουν πρὸς τὰ σταθερὰ ὅρια $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ ἀντιστοίχως, ἀποδεικνύεται δ' ὅτι:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\overset{(i)}{w}_m(t)\right|<2\,\bar{C}\,, \tag{17}$$

ὅπου:

$$\bar{C}=\bar{C}_1+T\,\bar{C}_2<1$$
$$T=\max t$$

Ἐπίσης δεικνύεται ὅτι:

---

[1] M. Siddiqui, *Math. Zeitschrift*, **35** (1935), 467.

$$\sum_{i=o}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\overset{(i+1)}{w_m}(t)-\overset{(i)}{w_m}(t)\right|\leq\frac{\bar{C}(1-10\bar{C})}{1-(10\bar{C}+A)},\tag{18}$$

ὅπου:

$$A=\frac{1}{c}PT^2$$

Ἡ (18) δεικνύει τὴν ὕπαρξιν τοῦ ὁρίου: $\lim\limits_{i\to\infty}\overset{(i)}{w_m}(t)$, $m=1, 2, 3,...$ καὶ ἐὰν τοῦτ$_0$ εἶναι $w_m(t)$, τότε:

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\overset{(i)}{w_m}(t)=\sum_{m=1}^{\infty}w_m(t)=w(t).\tag{19}$$

Τὰ ἀνωτέρω ἀποδεικνύουν ὅτι ἡ λύσις (7), ὑπὸ τοὺς τεθέντας περιορισμοὺς διὰ τὰ ἀρχικὰ δεδομένα, εἶναι ὁμοιομόρφως συγκλίνουσα.

4. Τὸ μοναδικὸν τῆς λύσεως.

Ἄς δεχθῶμεν ὅτι ἐκτὸς τῆς λύσεως $w_m(t)$ ὑπάρχει καὶ μία ἄλλη λύσις, $\bar{w}_m(t)$, μὴ γραμμικὴ τῆς $w_m(t)$. Δύναται νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|\bar{w}_m(t)-\overset{(i)}{w_m}(t)\right|\leq\left(\frac{A}{1-10\bar{C}}\right)^i\cdot\max\sum_{m=1}^{\infty}\left|\bar{w}_m(t)-\overset{(i-1)}{w_m}(t)\right|,\tag{20}$$

ὅπου: $\dfrac{A}{1-10\bar{C}}<1$, ἑπομένως $\lim\limits_{i\to\infty}\left(\dfrac{A}{1-10\bar{C}}\right)^i=o$,

ἤτοι: $\lim\limits_{i\to\infty}\left|\bar{w}_m(t)-\overset{(i)}{w_m}(t)\right|=o$, καί: $\bar{w}_m(t)=\lim\limits_{i\to\infty}\overset{(i)}{w_m}(t)=w_m(t)$.

5. Ἡ εὐστάθεια τῆς λύσεως.

Ἡ εὐστάθεια τῆς λύσεως συμπίπτει κατὰ μίαν ἔννοιαν[4] μὲ τὴν κατὰ συνεχῆ τρόπον ἐξάρτησιν τῆς λύσεως ἐκ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων, δηλαδὴ μικρὰ μεταβολὴ τῶν ἀρχικῶν δεδομένων ἐπιφέρει ἐπίσης μικρὰν μεταβολὴν εἰς τὴν λύσιν. Τοῦτο πράγματι συμβαίνει εἰς τὴν παρουσιαζομένην λύσιν.

Ὅταν εἰς τὰ ἀρχικὰ δεδομένα εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχεῖ τὸ $\bar{C}$ ἔχωμεν τὴν λύσιν w, καὶ εἰς νέα δεδομένα ἀντιστοιχοῦντα εἰς $\bar{C}'$ τὴν λύσιν w', ἀποδεικνύεται ὅτι:

$$\max|w-w'|\leq 2\left|\bar{C}-\bar{C}'\right|=2\left[\left|\bar{C}_1-\bar{C}'_1\right|+t\left|\bar{C}_2-\bar{C}'_2\right|\right],\tag{21}$$

ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ἡ εὐστάθεια τῆς λύσεως.

SUMMARY

This paper is concerned with the solution of a nonlinear partial diffe-

[4] J. J. STOKER: *Comm. Pure und Appl. Math.*, VIII, 1 (1955), 133.

rential equation in connection with the problem of lateral free vibrations of prismatic bars in Plasticity.

For simply supported bar at both ends the problem corresponds to find the solution u(x,t) of the followin system:

$$[f(u'')]'' = c\ddot{u},$$
$$u(o,t) = u(\pi,t) = u''(o,t) = u''(\pi,t) = o,$$
$$u(x,o) = \varphi_1(x),\ \dot{u}(x,o) = \varphi_2(x).$$

By taking properly the functions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $f(u'')$, a solution of the type:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(t)\cdot \sin mx \qquad \text{is given.}$$

The function $v_m(t)$ is determined with the help of an infinite system of nonlinear equations of degree r, which is solved by the method of successive approximations. The constructed solution fulfills, under certain limitations, all Hadamard's postulates, then it represents the reality.

ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ.— **Study of the potential in the plane of symmetry of a stellar system,** *by* ***G. Contopoulos*** *. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἰωάνν. Ξανθάκη.

In his fundamental paper on the dynamics of stellar systems Chandrasekhar[1] has studied the general case of a two dimensional system having a center of symmetry and some special cases of three-dimentional systems with axial symmetry. However the general problem of a stellar system with an axis and a plane of symmetry has not yet been considered.

In this paper the results of S. Chandrasekhar on the two-dimensional problem are proved by a new, more concise method. Then, by extention of this method, we study the potential function on the plane of symmetry of a three-dimentional stellar system having both an axis and a plane of symmetry.

I

We assume the validity of the following three postulates, as given by S. Chandrasekhar[2].

---

* ΓΕΩΡΓ. ΚΟΝΤΟΠΟΥΛΟΥ, *Ἔρευνα τοῦ δυναμικοῦ εἰς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας ἀστρικοῦ συστήματος.*

[1] S. Chandrasekhar, The Dynamics of Stellar Systems, *Ap. J.* **90**, 1939, 1, and **92**, 1940, 441.

[2] S. Chandrasekhar, Principles of Stellar Dynamics, Chicago 1942, p. 89, E. von der Pahlen, Einführung in die Dynamik von Sternsystemen, Basel 1947, S. 127.