ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 22ΑΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 1968

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΙΣ – ΟΜΙΛΙΑ ΜΕΛΟΥΣ

Αἱ «ἰδέαι» τοῦ Πλάτωνος εἰς τὰ σύγχρονα Μαθηματικά *, *ὑπὸ* ***Φ. Βασιλείου.***

1. Ἡ ἀποκατάστασις τάξεως εἰς τὰ διαρκῶς μεταβαλλόμενα φαινόμενα τοῦ κόσμου τῶν αἰσθητῶν ἀπαιτεῖ, κατὰ τὸν Πλάτωνα, τὴν γνῶσιν τῆς αἰωνίας καὶ ἀναλλοιώτου πραγματικότητος. Μόνον διὰ τῆς γνώσεως αὐτῆς καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐπὶ τῶν φαινομένων κυριαρχία τοῦ σκεπτομένου νοῦ.

Ἀπὸ τὴν μεταξὺ τοῦ φαινομένου καὶ τῆς πραγματικότητος διάκρισιν ἤχθη, ὡς γνωστόν, ὁ Πλάτων εἰς τὴν περίφημον αὐτοῦ «θεωρίαν τῶν ἰδεῶν». Ἰδέα εἶναι τὸ «ὄντως ὄν», ἡ ἀπόλυτος δηλ. πραγματικότης τοῦ διὰ τῶν αἰσθήσεων ἀντιληπτοῦ φαινομένου. Εἶναι, μὲ ἄλλας λέξεις, αὐτὴ ἡ «ἀλήθεια» ὡς προϋπόθεσις κάθε ἐπιστήμης, γενικὰ κάθε πνευματικῆς δραστηριότητος τοῦ ἀνθρώπου.

Εἰς τὸν κόσμον τῶν ἰδεῶν ὑπάγονται τὰ μαθηματικὰ ὄντα καθὼς καὶ αἱ μαθηματικαὶ ἀλήθειαι. Ὡς ἰδέαι εἶναι αὗται ἄϋλοι μορφαὶ ἢ «ἀρχέτυπα» προσιτὰ μόνον εἰς τὴν νόησιν. Τρίγωνον ἢ ἄλλο τι γεωμετρικὸν σχῆμα, χαρασσόμενον ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ κατασκευαζόμενον ἀπὸ μεταλλικὸν σύρμα, δὲν εἶναι ἀντικείμενον τῶν Μαθηματικῶν. Εἶναι ἁπλῶς ἀτελὴς ὑλοποίησις ἑνὸς ἰδεατοῦ καὶ τελείου τριγώνου ἢ σχήματος.

Τὴν ἀληθῆ γνῶσιν, τὴν ἰδέαν, ἔχομεν δι᾽ ἀναμνήσεως τῆς ψυχῆς, ἀφ᾽ ὅτου αὕτη εὑρίσκετο εἰς τὸν κόσμον τῆς ἀληθείας προτοῦ εἰσέλθει εἰς τὸ φθαρτὸν σῶμα καὶ τὴν ὁποίαν ἔκτοτε, κατὰ τὸ πλεῖστον, ἀπώλεσεν. Ἡ ἀφύπνισις τῆς εἰς κατάστασιν ὑπνώσεως εὑρισκομένης ἀναμνήσεως ταύτης κατορθοῦται διὰ τῆς θέας ἀντικειμένων ἐχόντων ὁμοιότητά τινα ἢ καὶ ἀνομοιότητα πρὸς τὰς ἄλλοτε ὁραθείσας ἰδέας.

Διαφέρουν δὲ αἱ ἰδέαι ὄχι μόνον ἀπὸ τὰς διὰ τῶν αἰσθήσεων προσλαμβανομέ-

* PH VASSILIOU, **Plato's theory of ideas about modern Mathematics.**

νας παραστάσεις ἀλλὰ καὶ ἀπὸ αὐτὰς τὰς ἐννοίας ἀποτελούσας τὰ λογικὰ ὁμοιώματα ἐκείνων [1].

Κατὰ ταῦτα, εἰς ἀντιπαραβολὴν πρὸς τὸν κόσμον τῆς ἐμπειρίας, τὸν διὰ τῶν αἰσθήσεων δηλ. ἀντιληπτὸν κόσμον, ὅπως καὶ πρὸς τὸν κόσμον τῶν ἐννοιῶν, δηλ. τὸν κόσμον τῶν πνευματικῶν δημιουργημάτων, «ὑπάρχει», κατὰ τὸν Πλάτωνα, ὁ κόσμος τῶν ἰδεῶν, δηλ. ὁ κόσμος τῶν «νοητῶν», ὑπὸ τὴν ἀντικειμενικὴν αὐτῶν ἔννοιαν. Οἱ τρεῖς αὐτοὶ κόσμοι εὑρίσκονται εἰς τοιαύτην μεταξύ των σχέσιν, ὥστε ὁ δεύτερος τούτων νὰ ἐπιδρᾷ τόσον ἐπὶ τοῦ πρώτου, τοῦ κόσμου τῶν φυσικῶν καταστάσεων, ὅσον καὶ ἐπὶ τοῦ τρίτου, ἐκείνου τῶν ἀντικειμενικῶν ἰδεῶν. Ὅμως ἡ ἀλληλεπίδρασις τοῦ πρώτου καὶ τρίτου κόσμου δὲν εἶναι δυνατή, εἰμὴ μόνον μὲ τὴν παρέμβασιν τοῦ δευτέρου, ὡς ἐνδιαμέσου κόσμου, τῶν ὑποκειμενικῶν ἢ προσωπικῶν ἐμπειριῶν [2].

Σύμφωνα πρὸς αὐτά, ὁ ἀνθρώπινος νοῦς ἠμπορεῖ νὰ ὁρᾶται φυσικοῦ τινος σώματος, ὡς ἐπίσης ἀριθμοῦ τινος ἢ γεωμετρικοῦ σχήματος. Καίτοι δὲ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ἔννοια τοῦ ὁρᾶν χρησιμοποιεῖται μεταφορικῶς, ὅμως αὕτη δὲν παύει δηλοῦσα πραγματικὴν σχέσιν τοῦ νοῦ πρὸς τὸ νοητὸν ἀντικείμενον, τὸν ἀριθμὸν ἢ τὸ σχῆμα, ἀνάλογα πρὸς ὅ,τι συμβαίνει εἰς τὴν περίπτωσιν κυριολεξίας τοῦ ὁρᾶν.

Οὕτως, ὁ νοῦς ἠμπορεῖ νὰ συνδέεται μὲ ἀντικείμενα τοῦ πρώτου ὅπως καὶ τοῦ τρίτου κόσμου δημιουργῶν ἔμμεσον μεταξύ των συσχέτισιν.

Βάσει ἐξαγομένων μαθηματικῶν θεωριῶν, ἀνηκουσῶν εἰς τὸν κόσμον τῶν ἰδεῶν, ὁ ἐπιστήμων δύναται νὰ ἐπιφέρῃ ὡρισμένας ἀλλαγὰς εἰς τὸν κόσμον τῶν φυσικῶν καταστάσεων.Καθίσταται οὕτω ἔκδηλος ἡ ἔμμεσος ἐπίδρασις τοῦ τρίτου ἐπὶ τοῦ πρώτου κόσμου, περὶ τῆς ὁποίας ἤδη ὡμιλήσαμεν. Ἀκόμη καὶ ὅταν ὁ δημιουργὸς θεωρίας τινὸς δὲν εἶναι ἐνήμερος τῶν συνεπειῶν τῆς θεωρίας του, ὅμως ἡ δυνατότης τοιαύτης ἐφαρμογῆς εἰς τὸν κόσμον τῶν φυσικῶν καταστάσεων ἐνυπάρχει εἰς αὐτὴν ταύτην τὴν θεωρίαν [2].

Ἐξ ἄλλου, ἡ ἀπαλλαγὴ ἀπὸ τὴν πλάνην τῶν αἰσθήσεων ἀπαιτεῖ μακρὰν καὶ ἐπίπονον προσπάθειαν. Ὁ πρὸς τοῦτο δρόμος, κατὰ τὴν Πλατωνικὴν θεωρίαν, εἶναι ἡ καλουμένη διαλεκτικὴ μέθοδος, ἀποδεικτικὸν δὲ μέσον ταύτης εἶναι ἡ «ἔμμεσος ἀπόδειξις». Ἀφετηρίαν διὰ τὴν ἔμμεσον ἀπόδειξιν ἀποτελεῖ ἡ ἀρχή, ὅτι ἡ ἀλήθεια δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀντιφάσκῃ πρὸς ἑαυτήν. Ὁσάκις λοιπὸν ἀναχωρῶν τις ἀπὸ ὑπόθε-

---

1. Ἰ. Θεοδωρακοπούλου, Ἡ θεωρία τῶν ἰδεῶν τοῦ Πλάτωνος, Εἰς τὸ ἔργον Φιλοσοφία καὶ ζωή. Ἀθῆναι (1967) σ. 264.

2. Sir Karl Popper, On the Theory of Objective Mind. Εἰς τὰ Akten des XIV. internationalen Kongresses für Philosophie, Wien (1968).

σίν τινα φθάνει συλλογιστικῶς εἰς ἀντίφασιν, πρέπει ν' ἀπορρίπτῃ τὴν ἐν λόγῳ ὑπόθεσιν. Οὕτω κατανικᾷ διαλεκτικῶς, προβαίνων ἀπὸ ὑποθέσεως εἰς ὑπόθεσιν, τὴν πλάνην τῆς αἰσθήσεως, μέσα εἰς τὴν ὁποίαν ζῇ, ἀτενίζει δὲ πρὸς τὴν ἀλήθειαν, τὴν ἰδέαν.

Περιοριζόμενοι, κατωτέρω, εἰς τὰ μαθηματικὰ ὄντα ὡς ἀντικείμενα τοῦ τρίτου κόσμου, ἐξαίρομεν ἰδιαιτέρως τὴν Πλατωνικὴν θέσιν, ὅτι ταῦτα ὡς ἰδέαι «ὑπάρχουν», δὲν κατασκευάζονται ἢ ἐφευρίσκονται, οὔτε ἀπεικονίζονται πλήρως, δὲν ταυτίζονται δηλ. μὲ τὰ ἔκτυπα αὐτῶν. Ταῦτα δύναται νὰ συλλάβῃ μόνον ὁ σκεπτόμενος νοῦς.

Οὕτω εἰς τὰ Μαθηματικὰ ἐπιχειρεῖται ἡ περιγραφὴ μέρους τῆς ἀπολύτου, τῆς ἀντικειμενικῆς πραγματικότητος, ὄχι δὲ ἡ ὑποκειμενικὴ ἐξιδανίκευσις τοῦ ἐμπειρικοῦ κόσμου.

Σύμφωνα λοιπὸν πρὸς τὴν Πλατωνικὴν αὐτὴν θέσιν, τὰ Μαθηματικὰ δὲν δημιουργοῦν ἢ ἐφευρίσκουν τὰ εἰς αὐτὰ θεωρούμενα ἀντικείμενα ἀλλὰ «ἀνακαλύπτουν» αὐτά. Μὲ ἄλλην φρασεολογίαν, ὁ Πλατωνικὸς ἰδεαλισμός, ἢ κατ' ἄλλους ὁ Πλατωνικὸς ρεαλισμός, δέχεται τὴν ὕπαρξιν τῶν ἐν λόγῳ ἀντικειμένων εἰς μίαν μόνον εἰς τὴν νόησιν προσιτὴν πραγματικότητα, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν γνῶσιν, δηλ. τὴν ἀνακάλυψιν αὐτῶν.

Τοιαύτη εἶναι ἡ ἔκτασις τῆς ἐφαρμογῆς τῆς Πλατωνικῆς αὐτῆς ἀντιλήψεως εἰς τὴν ἐπιστήμην τῶν Μαθηματικῶν ὥστε, ὅπως ἀπὸ τὰ κατωτέρω θέλει καταδειχθῇ, δεσπόζει αὕτη τῶν κλασσικῶν ἀλλὰ καὶ νεωτέρων αὐτῆς θεωριῶν.

Εἰς τοὺς ἀρνουμένους τὸν Πλατωνικὸν ἰδεαλισμὸν τὸ τίμημα εἶναι ὄχι μόνον ἡ ἐγκατάλειψις πλείστων ἁπλῶν καὶ κομψῶν μεθόδων, ἔναντι ἄλλων πολυπλόκων καὶ δυσχρήστων, ἀλλὰ καί, τὸ σπουδαιότερον, ἡ ἀπώλεια τοῦ μεγαλυτέρου μέρους τοῦ θαυμασίου μαθηματικοῦ οἰκοδομήματος, τὸ ὁποῖον μᾶς ἐκληροδότησεν ἡ ἡράκλειος προσπάθεια τῶν παρελθουσῶν γενεῶν.

2. Εἰς τὴν πλατωνικὴν αὐτὴν ἀντίληψιν κατὰ τὴν ὁποίαν, ὡς εἴπομεν, τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα ὑ π ά ρ χ ο υ ν, εὑρισκόμενα μεταξύ των εἰς σχέσεις, ἀνεξάρτητα τοῦ ἂ ν καὶ π ῶ ς ἡμεῖς νοοῦμεν αὐτά, ἀντιπαρατάσσει ἡ διαφόρων κλιμακώσεων θεωρία τῶν καλουμένων ὀπαδῶν τῆς κ α τ α σ κ ε υ α σ τ ι κ ῆ ς Σχολῆς, τὴν κ α τ ὰ β ή μ α τ α κ α τ α σ κ ε υ ὴ ν τῶν ἐν λόγῳ ἀντικειμένων ὑπὸ τοῦ νοῦ. Ἡ νοητικὴ αὐτὴ μαθηματικὴ κατασκευὴ δὲν ἐξετάζεται ἀναφορικὰ μὲ τὴν φύσιν τῶν κατασκευαζομένων ἀντικειμένων, τὴν ἀνεξάρτητα δηλ. ἀπὸ τὴν γνῶσιν μας ὕπαρξιν ἢ μὴ τῶν θεωρουμένων ἀντικειμένων.

Διὰ τοὺς ὀπαδοὺς τῆς κατασκευαστικῆς Σχολῆς, ἡ πλατωνικὴ ἄποψις εἶναι μεταφυσικῆς φύσεως ὀντολογία. Διότι, ἂν τὸ ὑπάρχειν δὲν ἔχῃ τὴν σημασίαν τοῦ κατασκευάζειν, τότε ἔχει κατ' αὐτοὺς ἀναγκαστικὰ μεταφυσικὴν σημασίαν.

Μαθηματικός τις ἰσχυρισμὸς ἐπιβεβαιοῖ ἁπλῶς τὸ γεγονὸς πραγματοποιήσεως μαθηματικῆς κατασκευῆς. Εἶναι μὲν ἀληθές, λέγουν, ὅτι ὅλοι οἱ μαθηματικοὶ εἶναι πεπεισμένοι περὶ τῆς, κατά τινα ἔννοιαν, ἀσχολίας τῶν μαθηματικῶν μὲ αἰωνίας ἀληθείας, ὅταν ὅμως θελήσῃ κανεὶς νὰ καθορίσῃ ἐπακριβῶς τὴν ἔννοιαν αὐτήν, τότε ἐμπλέκεται εἰς λαβύρινθον δυσκολιῶν μεταφυσικῆς φύσεως. Ὁ μόνος, λοιπόν, τρόπος διὰ νὰ τὰς ἀποφύγῃ εἶναι νὰ τὰς ἐξοστρακίσῃ τελείως ἀπὸ τὰ Μαθηματικά.

Διεξοδικώτερόν πως ἐπὶ τοῦ πνεύματος τῶν δοξασιῶν αὐτῶν θέλομεν ἐπιμείνει εἰς τὰ ἑπόμενα κατὰ τὴν ἔκθεσιν τῆς θεωρίας τῆς καλουμένης ἐνορατικῆς ἢ διαισθητικῆς Σχολῆς.

3. Ἀπὸ φιλοσοφικῆς σκοπιᾶς, τὰ Μαθηματικὰ διέρχονται σήμερον σοβαρὰν κρίσιν. Ἡ κρίσις αὐτὴ συνδέεται ἀμεσώτατα μὲ τήν, κυρίως διὰ τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων τοῦ G. Cantor, εἰσαγωγὴν εἰς αὐτὰ νέων ἐννοιῶν καὶ μεθόδων καθὼς καὶ τῶν ἐπ' αὐτῶν τρόπων συλλογισμοῦ. Ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου συνόλου, δηλ. τοῦ συνόλου μὲ μὴ πεπερασμένα τὸ πλῆθος στοιχεῖα καὶ ἡ ἐπ' αὐτῆς βασιζομένη ἔννοια τοῦ ἐνεστῶτος ἢ τοῦ, κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη, ἐνεργείᾳ ἀπείρου, ἀνήκουν εἰς τὴν ἀναφερομένην κατηγορίαν.

Ἡ κατάκτησις τοῦ ἐνεργείᾳ ἀπείρου ὥς τινος τοῦ τελειωμένου καὶ ἑτοίμου, τοῦ εἶναι ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ γίγνεσθαι, ἠμπορεῖ ἀναμφισβήτητα νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐπέκτασις τοῦ μαθηματικοῦ ὁρίζοντος ὄχι ὀλιγώτερον ἐπαναστατικὴ ἀπὸ ὅ,τι ἦτο ἡ θεωρία τῶν κβάντα ἢ ἡ θεωρία τῆς Σχετικότητος καὶ ἡ πυρηνικὴ Φυσική.

Εἶναι ἀληθές, ὅτι ἡ χρῆσις τῆς ἐννοίας τοῦ ἐνεστωτικοῦ ἀπείρου, τὴν ὁποίαν οἱ μαθηματικοὶ καὶ φιλόσοφοι, ἀπὸ τῆς ἀρχαιότητος μέχρι καὶ τοῦ τέλους τοῦ δεκάτου ἐνάτου αἰῶνος, μὲ ἰδιαιτέραν σφοδρότητα κατεδίκαζον, ἐπροκάλεσε τοὺς δισταγμούς, ἂν μὴ τὴν δυσπιστίαν, τοῦ μαθηματικοῦ κόσμου. Ἡ οὕτω κληθεῖσα «φρίκη τοῦ ἀπείρου» εἶχεν ὡς ἀφορμὴν τὴν δι' αὐτοῦ ἐμφάνισιν εἰς τὰ Μαθηματικὰ πλείστων παραδόξων καὶ ἀντινομιῶν. Ἡ ἀποκορύφωσις ὅμως τῶν δισταγμῶν αὐτῶν εἰς ἀληθῆ ἔκρηξιν ἀνησυχίας διὰ τὸν ἀπειλούμενον κίνδυνον σημειοῦται ἀπὸ τῆς ἐποχῆς τῆς εἰς τὴν θεωρίαν τῶν Συνόλων εἰσαγωγῆς τοῦ ἐνεστωτικοῦ ἀπείρου καὶ τῆς, διὰ τῆς εἰσαγωγῆς αὐτῆς, ἐμφανίσεως νέων, σοβαρωτέρων τῶν μέχρι τῆς στιγμῆς ἐκείνης γνωστῶν, ἀντινομιῶν.

Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ πεπερασμένα, καὶ ἡ ἐπὶ τῶν μὲ ἄπειρα στοιχεῖα συνό-

λων χρῆσις τῶν συνήθων κανόνων τῆς Λογικῆς, ὅπως τῆς ἀρχῆς τῆς τ ο ῦ τ ρ ί τ ο υ ἢ μ έ σ ο υ ἀ π ο κ λ ε ί σ ε ω ς, καὶ ὁ βάσει τῶν κανόνων αὐτῶν συλλογιστικὸς τρόπος, εἶναι ἕτερον σκέλος, πρὸς τὸ ὁποῖον ἡ ἀναφερθεῖσα κρίσις τῶν Μαθηματικῶν ἀμεσώτατα συνδέεται.

Εὐρεῖα καὶ συστηματικὴ ἐφαρμογὴ τοῦ συλλογιστικοῦ αὐτοῦ τρόπου διὰ τὰ μὴ πεπερασμένα σύνολα ἔγινε τὸ πρῶτον κατὰ τὸ τέλος τῆς παρελθούσης ἑκατονταετηρίδος, κατὰ τὴν ἀκριβολόγον διατύπωσιν καὶ ἀπόδειξιν τῶν προτάσεων καὶ μεθόδων τοῦ Ἀ π ε ι ρ ο σ τ ι κ ο ῦ Λ ο γ ι σ μ ο ῦ.

Διὰ δοθεῖσαν ἰ δ ι ό τ η τ α, ἐκφραζομένην διὰ τῶν ἐννοιῶν θεωρίας τινὸς τῆς ὁποίας ἀντικείμενα εἶναι τὰ στοιχεῖα ἀπείρου συνόλου, ἡ κατ' ἐπέκτασιν ἀπὸ τὰ πεπερασμένα καὶ εἰς τὰ ἄπειρα σύνολα χρῆσις τῆς ἀρχῆς τῆς τοῦ τρίτου ἢ μέσου ἀποκλείσεως, ὁδηγεῖ εἰς τὴν διάζευξιν : «Ἢ ὑπάρχει στοιχεῖον τοῦ ἀπείρου συνόλου ἔχον τὴν ἐν λόγῳ ἰδιότητα ἢ τοιοῦτον στοιχεῖον δὲν ὑπάρχει». Ὁμοίως : «Ἢ ὑπάρχει στοιχεῖον ἀπείρου συνόλου μὴ ἔχον δοθεῖσαν ἰδιότητα ἢ τοιοῦτον στοιχεῖον δὲν ὑπάρχει, δηλ. ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἔχουν τὴν ἰδιότητα αὐτήν».

Καὶ εἰς τὰς δύο τῶν ὡς ἄνω διαζεύξεων, τῶν ὁποίων σημειωτέον τὸ πρῶτον μέρος δὲν σημαίνει καὶ τὸν μὲ τὰ σημερινὰ ἢ μελλοντικὰ μέσα τῆς ἐπιστήμης προσδιορισμὸν τοῦ εἰς αὐτὰς ὡς ὑπάρχοντος φερομένου στοιχείου, ἐπιτρέπεται ἀπὸ τὸν ἀποκλεισμὸν τοῦ «ὄχι» νὰ συμπεράνῃ κανεὶς τὸ «ναὶ» καὶ ἀντιστρόφως.

Τοῦ συλλογιστικοῦ αὐτοῦ τρόπου εὐρυτάτη χρῆσις γίνεται εἰς τὴν κλασσικὴν θεωρίαν τῶν Συνόλων ὡς καὶ εἰς τὴν Ἀνάλυσιν.

Εἰς ὅλας τὰς ἀνωτέρω ἐκφράσεις, ἡ ὕπαρξις στοιχείου θεωρεῖται ὡς κάτι τὸ ἀντικειμενικῶς καθωρισμένον, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν δυνατότητα ἢ μὴ τῆς κατασκευῆς τοῦ ἐν λόγῳ στοιχείου. Μάλιστα, ἡ ὕπαρξις τοῦ στοιχείου εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς παρουσίας τοῦ νοῦ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ στοιχεῖον νὰ ἀνακαλύπτεται, ὄχι δὲ νὰ ἐφευρίσκεται.

Αὐτὴ ὅμως ἀκριβῶς εἶναι ἡ ἄποψις, τὴν ὁποίαν, ὡς εἴπομεν, δέχεται ὁ Πλάτων διὰ τὰς ἰδέας του.

4. Ἡ ἰδία Πλατωνικὴ ἀντίληψις ὑπάρξεως παρατηρεῖται, ἐξ ἄλλου, εἰς τὴν θεωρίαν τῶν Συνόλων παντοῦ ὅπου ἀπαιτεῖται ἡ ὕπαρξις ἀπείρου συνόλου εἴτε ὑπὸ τὴν θεωρηθεῖσαν ἀπόλυτον ἔννοιαν, εἴτε ὑπὸ τὴν σχετικὴν ἢ ὑποτακτικὴν ἔννοιαν, ἐκείνην δηλ. κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐν λόγῳ ὕπαρξις ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν παραδοχὴν τῆς ὑπάρξεως ἄλλου τινὸς ἀπείρου συνόλου.

Ὁ ἁπλούστερος, ὑπὸ τὴν ἀπόλυτον ἔννοιαν, τ ύ π ο ς ἀπείρου συνόλου εἶναι τὸ ἀ ρ ι θ μ ή σ ι μ ο ν ἢ τὸ ἀ π α ρ ι θ μ η τ ὸ ν ἄπειρον, παράδειγμα τοῦ ὁποίου *εἶναι τὸ σύνολον τῶν φ υ σ ι κ ῶ ν ἀριθμῶν, δηλ. τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν ἀριθμῶν. Διὰ τὸν λόγον αὐτόν, ἡ παραδοχὴ τῆς ὑπάρξεως τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀποτελεῖ τὴν «ἀσθενεστέραν» τῶν πλατωνικῶν παραδοχῶν εἰς τὴν θεωρίαν τῶν Συνόλων.*

Ὑπὸ τὴν ὑποτακτικὴν ἔννοιαν ἄπειρον εἶναι π.χ. οἱονδήποτε μὴ πεπερασμένον σύνολον μορφούμενον βάσει μιᾶς τῶν ἑξῆς δύο ἀρχῶν :

α) Δοθέντος κατηγορήματός τινος ἢ δοθείσης ἰδιότητος ἐχούσης νόημα δι' ὅλα τὰ στοιχεῖα συνόλου, ὑποτιθεμένου ὡς ὑπαρκτοῦ, ὑ π ά ρ χ ε ι ὑποσύνολόν του περιέχον καὶ μόνον ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου, τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὴν περὶ ἧς ὁ λόγος ἰδιότητα, ἐκεῖνα, μὲ ἄλλας λέξεις, διὰ τὰ ὁποῖα τὸ κατηγόρημα ἀληθεύει.

β) Συνόλου τινὸς ὑποτιθεμένου ὡς ὑπαρκτοῦ, ὑ π ά ρ χ ε ι καὶ τὸ ἔχον στοιχεῖα ὅλα καὶ μόνον τὰ ὑποσύνολα τοῦ δοθέντος.

Τὰς δύο ὡς ἄνω ἀρχάς, χάριν συντομίας, θὰ ἀναφέρωμεν εἰς τὸ ἑξῆς ὡς ἀρχὰς τοῦ δ ι α χ ω ρ ι σ μ ο ῦ ἀντιστ. τῶν ὑ π ο σ υ ν ό λ ω ν.

Ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ ὡς ὑπαρκτὸν αἰτούμενον σύνολον τῶν φυσικῶν, ἢ ἄλλο τι ἰ σ ό μ ο ρ φ ο ν πρὸς ἐκεῖνο σύνολον, ἠμποροῦμεν, ὡς γνωστόν, νὰ μορφώσωμεν, κατὰ τὸν G. Cantor, σύνολα μεγαλυτέρας αὐτοῦ δ υ ν ά μ ε ω ς, ὅπως π. χ. σύνολα τῆς δυνάμεως τοῦ «συνεχοῦς». Ἐξ ἄλλου, ἡ βάσει τῆς ἀρχῆς τοῦ διαχωρισμοῦ μόρφωσις ὑποσυνόλου δοθέντος συνόλου, γίνεται κατὰ τρόπον, ὥστε ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου νὰ θεωροῦμεν διαχωριζόμενα ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἀναφερομένην ἰδιότητα. Ἡ δυνατότης τοῦ διαχωρισμοῦ αὐτοῦ ἐξαρτᾶται καὶ μόνον ἐκ τοῦ ὅτι διὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου ἡ δοθεῖσα ἰδιότης ἰσχύει ἢ δὲν ἰσχύει. Θεωροῦντες τὸ σύνολον ὡς δεδομένον, δεχόμεθα ὅτι καὶ ὅλα τὰ στοιχεῖα του δίδονται, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνονται ἐκεῖνα μὲ τὴν ὡς ἄνω ἰδιότητα. Τὸ σύνολον ὑποτίθεται ὑπάρχον ὡς κάτι τὸ ἕτοιμον καὶ κλειστὸν πρὸ οἱασδήποτε ἐπ' αὐτοῦ ἢ τῶν στοιχείων του νοητικῆς πράξεως, ὡς π.χ. τοῦ διαχωρισμοῦ. Τὸ ὅτι ἡ ὕπαρξις στοιχείων τινῶν τοῦ συνόλου θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἐ ξ α ρ τ ᾶ τ α ι ἀπὸ τὴν μόρφωσιν τοῦ ἐν λόγῳ ὑποσυνόλου, δὲν τίθεται κἂν ὑπὸ συζήτησιν. Ἡ παραδοχὴ αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει τὴν διὰ τοῦ διαχωρισμοῦ μόρφωσιν τοῦ ὑποσυνόλου ὅλων τῶν στοιχείων τῶν ἐχόντων τὴν δοθεῖσαν ἰδιότητα χωρὶς τὸν κίνδυνον, ὅπως κάποιο στοιχεῖον ἔχον τὴν δοθεῖσαν ἰδιότητα ἀπολέσῃ ἐνδεχομένως ταύτην ἐ κ τ ῶ ν ὑ σ τ έ ρ ω ν, λόγῳ ἐμφανίσεως νέων στοιχείων τοῦ συνόλου ἢ τῆς προσλήψεως ἄλλων τινῶν στοιχείων τοῦ ὑποσυνόλου.

Καὶ ἐδῶ, ἀπ' ἄκρου εἰς ἄκρον, κυριαρχεῖ ἡ πλατωνικὴ ἀντίληψις τῆς ἀνεξαρτήτως τοῦ σκεπτομένου νοῦ ὑπάρξεως τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων. Ὁ μαθηματικὸς εὑρίσκεται ἐνώπιον τοῦ συνόλου ὡς συγκροτημένης ἑτοίμου ὁλότητος συσσωρευ-

μένων στοιχείων προτοῦ οὗτος ἐπιληφθῇ τῆς θεωρήσεως αὐτοῦ εἰς τρόπον, ὥστε διὰ τὴν μόρφωσιν ὑποσυνόλου του ἀρκεῖ νὰ λάβῃ ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα ἀνταποκρίνονται εἰς τὰς τιθεμένας ἀπαιτήσεις. Αὐτὸ ὅμως σημαίνει καὶ πάλιν, ὅτι ὁ μαθηματικὸς θεωρεῖ τὴν ὕπαρξιν τῶν ἀντικειμένων ὑπὸ τὴν πλατωνικὴν ἔννοιαν, ἀνακαλύπτων καὶ οὐχὶ ἐφευρίσκων τὰ ἀντικείμενα αὐτά.

5. Σύμφωνα καὶ μὲ ἑτέραν ἀρχήν, καλουμένην ἀρχὴν τῆς ἐπιλογῆς, ἀπὸ τὴν παραδοχὴν τῆς ὑπάρξεως ἀπείρου τινὸς συνόλου συνάγεται ἡ ὕπαρξις ἑτέρου τοιούτου συνόλου, χωρὶς καὶ πάλιν τὸν ἰσχυρισμὸν τῆς δυνατότητος κατασκευῆς τοῦ τελευταίου διὰ τῶν σημερινῶν ἢ τῶν μελλοντικῶν μέσων τῆς ἐπιστήμης. Κατὰ τὴν ἀρχὴν αὐτὴν ἔχομεν ὅτι : Μεταξὺ τῶν ἀντιστοιχίσεων, διὰ τῶν ὁποίων εἰς κάθε ὑποσύνολον συνόλου τινὸς ἀντιστοιχεῖ στοιχεῖον τοῦ συνόλου, ὑπάρχουν καὶ ἀντιστοιχίαι ὅπου τὸ στοιχεῖον περιέχεται πάντοτε εἰς τὸ ὑποσύνολον.

Πολὺ πρὸ τῆς διατυπώσεως, ὑπὸ τοῦ γερμανοῦ μαθηματικοῦ E. Zermelo, τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιλογῆς, τὸ 1904, ἐθεωρεῖτο αὕτη τόσον αὐτονόητος, ὥστε οὐδεὶς ἐσκέφθη νὰ συζητήσῃ κἂν περὶ αὐτῆς, ἂν καί, ὡς ἀργότερον κατέστη φανερόν, ἀποτελεῖ αὕτη ἀπαραίτητον ἀποδεικτικὸν στοιχεῖον διὰ πλείστους κλάδους τῶν Μαθηματικῶν. Αἱ περὶ τὴν ἀρχὴν αὐτὴν γενόμεναι ἔκτοτε ἀτέρμονες συζητήσεις καθὼς καὶ ὁ ἐπιδειχθεὶς δι' αὐτὴν ἄκρος σκεπτικισμὸς ἐκ μέρους πλείστων ὅσων μαθηματικῶν, κυρίως λόγῳ τῶν πολὺ μακρὰν ὁδηγουσῶν συνεπειῶν της, ὠφείλοντο καὶ ἐδῶ, εἰς τελευταίαν ἀνάλυσιν, εἰς τὸν κατὰ τὴν πλατωνικὴν ἀντίληψιν μὴ κατασκευαστικὸν χαρακτῆρα αὐτῆς.

Δέον νὰ παρατηρηθῇ ὅτι, εἰς ἀντίθεσιν πρὸς τὴν διὰ τῶν ἀρχῶν τοῦ διαχωρισμοῦ καὶ τῶν ὑποσυνόλων αἰτουμένην ὕπαρξιν ὡρισμένου τινὸς συνόλου, ἡ ἀρχὴ τῆς ἐπιλογῆς δὲν ὁμιλεῖ περὶ ὡρισμένου ἀλλὰ μόνον περὶ κάποιου συνόλου ὡρισμένης φύσεως.

Εἰς τὴν περίπτωσιν πεπερασμένου συνόλου, εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν ἔχομεν ἀνάγκην τῆς ὡς ἄνω ἀρχῆς διὰ τὴν ἐξασφάλισιν τοῦ εἰς αὐτὴν ἀναφερομένου συνόλου ἐπιλογῆς. Μὲ τήν, κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ πεπερασμένα σύνολα, διατύπωσιν τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιλογῆς, ὅπως καὶ προηγουμένως διὰ τὴν χρῆσιν τῆς λογικῆς ἀρχῆς τῆς τοῦ τρίτου ἢ μέσου ἀποκλείσεως διὰ τὰ μὴ πεπερασμένα σύνολα, ἠκολουθήθη ἡ ὑπὸ τοῦ D. Hilbert κληθεῖσα ἡμισυνδυαστικὴ θέσις. Αὐτὸ σημαίνει : Ἡ κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὸ πεπερασμένον ἀντιμετώπισις τοῦ ἀπείρου.

6. Πλὴν τῶν ἐννοιῶν τοῦ συνόλου καὶ τοῦ ἐνεργείᾳ ἀπείρου, ἡ ἔννοια τοῦ μὴ αὐτοκατηγορικοῦ ἢ τοῦ αὐτοαναφορικοῦ ὁρισμοῦ ἀπετέλεσεν

ἐπίσης ἀφορμὴν διὰ τὴν εἰς τὰ Μαθηματικὰ ἐμφάνισιν τῶν ἀντινομιῶν καὶ ἐπομένως διὰ τὴν κρίσιν περὶ τῆς ὁποίας ἐκάμαμεν λόγον εἰς τὴν ἀρχήν.

Μὴ αὐτοκατηγορικὴν γενικὰ πρόβασιν καλοῦμεν ἐκείνην κατὰ τὴν ὁποίαν στοιχεῖον ἀνῆκον εἰς σύνολόν τι χαρακτηρίζεται δι' αὐτοῦ τούτου τοῦ συνόλου.

Ἐὰν ζητήσῃ τώρα κανεὶς νὰ ἐξαντλήσῃ πλήρως τὸ νόημα τῆς ἀρχῆς τοῦ διαχωρισμοῦ ὡς καὶ ἐκείνης τῶν ὑποσυνόλων, παρατηρεῖ ὅτι ἡ προσφυγὴ εἰς τοιαύτας μὴ αὐτοκατηγορικὰς προβάσεις καθίσταται ἀναγκαία εἰς τὰ Μαθηματικά. Τὸ μὴ ἀπαριθμητὸν ἄπειρον εἶναι, ὡς φαίνεται, ἀδύνατον νὰ εἰσαχθῇ ἄνευ τῆς προσφυγῆς εἰς προβάσεις τοῦ ἀναφερθέντος μὴ αὐτοκατηγορικοῦ τύπου. Οὕτω π.χ. τὸ σύνολον τῶν ὑπερβατικῶν ἀριθμῶν, ὡς ὑποσύνολον τῶν πραγματικῶν, λαμβάνεται ἀπὸ ἐκεῖνο τῶν φυσικῶν διὰ τῆς μεταβάσεως κατ' ἀρχὰς μὲν εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν, βάσει τῆς ἀρχῆς τῶν ὑποσυνόλων, κατόπιν δὲ εἰς τὸ ζητούμενον ὑποσύνολον, βάσει τῆς ἀρχῆς τοῦ διαχωρισμοῦ, ὅταν ἡ ἰδιότης τοῦ εἶναι ὑπερβατικὸς θεωρηθῇ ὡς ἰδιότης τοῦ διαχωρισμοῦ. Ἡ δυνατότης τοῦ διαχωρισμοῦ ἔγκειται καὶ ἐδῶ εἰς τὴν παραδοχήν, ὅτι τὸ ἀρχικὸν σύνολον τῶν φυσικῶν ὑπάρχει ὡς κάτι τὸ ἕτοιμον καὶ κλειστόν, πρὸ τῆς εἰς αὐτὸ ἐφαρμογῆς τῶν νοητικῶν πράξεων τοῦ διαχωρισμοῦ καὶ τῶν ὑποσυνόλων.

Μὲ τὴν πλατωνικὴν αὐτὴν ἀντίληψιν τῆς ἐννοίας τοῦ συνόλου, αἱ μὴ αὐτοκατηγορικαὶ προβάσεις, αἱ εἰσαγόμεναι εἰς τὰ Μαθηματικὰ διὰ τῶν ἀναφερθεισῶν ἀρχῶν, εἶναι πάντοτε παραδεκταί, χωρὶς αὗται, ὑπὸ τὸν περιορισμὸν αὐτόν, νὰ ὁδηγοῦν εἰς ἀντινομίας περὶ τῶν ὁποίων ἀνωτέρω ἔγινε λόγος.

Ἂς σημειωθῇ εἰς τὸ σημεῖον αὐτό, ὅτι ἡ ὁλοσχερὴς ἀπαγόρευσις τῶν μὴ αὐτοκατηγορικῶν προβάσεων, ὡς αὕτη διακηρύσσεται ἀπὸ τοὺς ἀρνουμένους τὴν πλατωνικὴν θέσιν, συνεπάγεται, ὡς ἤδη ἐλέχθη, τὴν ἀπόρριψιν πλείστων καὶ θεμελιωδῶν προτάσεων καὶ ἀποδείξεων τῶν κλασσικῶν Μαθηματικῶν. Τοιαύτη ἀπόδειξις εἶναι π.χ. ἡ τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς κλασσικῆς Ἀλγέβρας ἡ βασιζομένη εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ «ἐλαχίστου» τῶν ἀπολύτων τιμῶν πολυωνύμου. Διότι, ἡ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτὴν εἰσερχομένη ἔννοια τοῦ ἐλαχίστου ἑνὸς ἀριθμοσυνόλου εἶναι ἔννοια μὴ αὐτοκατηγορική.

7. Ὅπως εἰς τὴν θεωρίαν τῶν Συνόλων τοῦ Cantor, οὕτω καὶ εἰς τὴν καλουμένην Λογικιστικὴν Σχολὴν ἐμφανίζονται αἱ ἰδέαι τοῦ Πλάτωνος. Θέσις τῶν ἐρευνητῶν τῆς ἐν λόγῳ Σχολῆς εἶναι ἡ θεώρησις τῶν Μαθηματικῶν ὡς κλάδου τῆς Λογικῆς. Πρῶτος ὁ G. Frege (1848-1925) ἐπεχείρησε νὰ ἀναγάγῃ τὴν Ἀριθμητικὴν ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τὴν Λογικήν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον εἶχεν ὡς προϋπόθεσιν τὴν βαθυτέραν ἐπὶ τῆς Λογικῆς ἔρευναν. Ἡ θεωρία τοῦ Frege βασίζεται ἐπὶ τῆς πλατωνικῆς

ἀντιλήψεως τῆς φύσεως τῶν μαθηματικῶν ὄντων, ἀναχωρεῖ δὲ ἀπὸ τὴν ἀρχὴν ὅτι ὁλόκληρος ἡ Ἀριθμητικὴ «ὑπάρχει» ἀνεξάρτητα τοῦ ἀνθρωπίνου νοῦ.

Ὁ λογικισμός, τὸν ὁποῖον ὁ Frege περιώριζεν εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἐπεξετάθη ἀργότερον ὑπὸ τῶν B. Russell καὶ A. Whitehead (1861-1947) εἰς ὁλόκληρον τὴν Μαθηματικὴν ἐπιστήμην. Θεμελιώδης ἀρχὴ τοῦ κλασσικοῦ αὐτῶν συγγράμματος Principia Mathematica εἶναι, ὅτι ὅλαι αἱ μαθηματικαὶ ἔννοιαι ἠμποροῦν νὰ ἐκφρασθοῦν μὲ πεπερασμένον πλῆθος ὅρων τῆς Λογικῆς, καθὼς καὶ ὅτι ὅλαι αἱ προτάσεις τῶν καθαρῶν Μαθηματικῶν ἠμποροῦν ν' ἀποδειχθοῦν βάσει πεπερασμένου πλήθους ἀρχῶν τῆς Λογικῆς.

Ὅπως ὁ Frege, οὕτω καὶ οἱ Russell καὶ Whitehead πρεσβεύουν ὅτι «ἀντικειμενικὴ ὕπαρξις» χαρακτηρίζει τὰ ὑπ' αὐτῶν θεωρούμενα μαθηματικὰ ὄντα.

8. Ὁ πλήρης ἀποκλεισμὸς τοῦ πλατωνικοῦ ἰδεαλισμοῦ καὶ ἡ δι' αὐτοῦ ἐπιχειρηθεῖσα ἀποφυγὴ τῶν ἀντινομιῶν ἀπετέλεσε τὸ ἀντικείμενον τῆς ἐρεύνης ὁλοκλήρου Σχολῆς, τῆς καλουμένης Διαισθητικῆς ἢ Ἐνορατικῆς, μὲ ἀρχηγὸν τὸν Ὁλλανδὸν μαθηματικὸν L. E. J. Brouwer, περὶ τῆς ὁποίας θεωροῦμεν ἐπίσης σκόπιμον νὰ ἀναφέρωμεν ὀλίγας λέξεις.

Διὰ τόν, τρόπον τινά, ριζοσπαστικὸν αὐτὸν τρόπον ἀντιμετωπίσεως τῶν ἀντινομιῶν, ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἀποκλεισμὸς γίνεται εἰς τὰ ἑξῆς δύο βήματα, ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς δύο οὐσιώδεις ὑποθέσεις τὰς εἰσαγομένας διὰ τοῦ πλατωνισμοῦ :
Τὸ πρῶτον βῆμα συνίσταται εἰς τήν, διὰ κατασκευαστικῶς λαμβανομένων ἐννοιῶν, ἀντικατάστασιν τῶν ἐννοιῶν τοῦ συνόλου ὡς καὶ τῶν ὑπὸ ἡμισυνδυαστικὴν ἔννοιαν μεθόδων ἢ συλλογιστικῶν τρόπων.
Τὸ δεύτερον, εἰς τὴν ἀπόρριψιν τῆς ἰδέας τοῦ συνόλου τῶν ἀκεραίων ὡς ὁλότητος κλειστῆς καὶ τελειωμένης.

Κατὰ τὸ πρῶτον βῆμα, ἡ ἰδέα ἀντιστοιχίας ἀπείρων ἀνεξαρτήτων προσδιορισμῶν, τῆς ἀντιστοιχίας δηλ. διὰ τῆς ὁποίας εἰς κάθε φυσικὸν ἀντιστοιχοῦμεν τυχόντα φυσικόν, συλλογιζόμενοι ἐπὶ τῆς ὁλότητος τῶν ἀπείρων αὐτῶν ἀντιστοιχιῶν κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν περίπτωσιν πεπερασμένων συνόλων, ἀπορρίπτεται. Π.χ. ἀκολουθία τις θεωρεῖται διδομένη μόνον δι' ἀριθμητικοῦ νόμου. Γενικὰ ὁμιλοῦμεν περὶ τῆς ὁλότητος στοιχείων, μόνον ὅταν κάθε ἕνα τῶν στοιχείων χωριστὰ ὁρίζεται ἢ κατασκευάζεται ἢ τοὐλάχιστον θεωρεῖται ὁριζόμενον ἢ κατασκευαζόμενον. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν δέον νὰ ἐκληφθῇ ὁ κατασκευαστικὸς χαρακτήρ, τὸν ὁποῖον ἀπαιτοῦμεν ἀπὸ μίαν ὁλότητα, διὰ νὰ θεωρῆται αὕτη ὡς διδομένη.

Κατὰ τὸ δεύτερον βῆμα, ἀποφεύγεται ἡ παραδοχὴ ὑπάρξεως τῆς ἀκολουθίας *τῶν φυσικῶν ὡς καθωρισμένου ἰδεατοῦ ἀντικειμένου. Ἀντιθέτως, ἀντιμετωπίζεται αὕτη ὡς μία ἀτελεύτητος πρόβασις, μὴ κλειστὴ καὶ τελειωμένη.*

Βασικὴ θέσις τῶν ἐνορατικῶν εἶναι, ὅτι ὕ π α ρ ξ ι ς εἰς τὰ Μαθηματικὰ σημαίνει μ α θ η μ α τ ι κ ὴ κ α τ α σ κ ε υ ή. Ἡ ἔμφασις, βέβαια, ἡ ὁποία διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ ἀποδίδεται εἰς τὰς κατασκευάς, δὲν εἶναι ἔργον μόνον τῶν ὀπαδῶν τῆς ἐνορατικῆς Σχολῆς. Συχνὰ εἰς τὰ Μαθηματικὰ τίθεται τὸ ἐρώτημα τοῦ δυνατοῦ ἢ μὴ τῆς κατασκευῆς ἀντικειμένων ἱκανοποιούντων δοθείσας συνθήκας. Κλασσικὰ προβλήματα, ὅπως ὁ τ ε τ ρ α γ ω ν ι σ μ ὸ ς τ ο ῦ κ ύ κ λ ο υ, ἡ τ ρ ι χ ο τ ό μ η σ ι ς γ ω ν ί α ς ἢ ὁ δ ι π λ α σ ι α σ μ ὸ ς κ ύ β ο υ διὰ τοῦ κανόνος καὶ διαβήτου, ἀποτελοῦν παραδείγματα κατασκευαστικῶν προτάσεων. Ἐκεῖνο ὅμως τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζει τὴν θέσιν τῶν διαισθητικῶν εἶναι ὁ ἀποκλεισμὸς οἱουδήποτε μὴ δυναμένου νὰ δοθῇ διὰ κατασκευῆς. Οὕτω, αἱ λεγόμεναι εἰς τὰ Μαθηματικὰ π ρ ο τ ά σ ε ι ς ὑ π ά ρ ξ ε ω ς, ἐφ᾽ ὅσον εἰς αὐτὰς δὲν παρέχεται τρόπος κατασκευῆς τῶν εἰς αὐτὰς ὡς ὑπαρκτῶν ἀποδεικνυομένων ἀντικειμένων, διὰ τὸν διαισθητικὸν παύουν ἔχουσαι νόημα.

Κοινὸν γνώρισμα τῶν προτάσεων ὑπάρξεως εἶναι, ὅτι εἰς αὐτὰς ἡ ὕπαρξις μαθηματικοῦ τινος ἀντικειμένου δὲν ἀποδεικνύεται διὰ τῆς παραγωγῆς αὐτοῦ ἀπὸ ἄλλα βάσει κατασκευῆς, ἀλλὰ συμπεραίνεται διὰ τῆς λ ο γ ι κ ῆ ς ἀ ν α γ κ α ι ό τ η τ ο ς. Αὕτη γίνεται, κατὰ τὸ πλεῖστον, βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς τοῦ τρίτου ἢ μέσου ἀποκλείσεως ἢ μεταξὺ ἀποκλειουσῶν ἀλλήλας δυνατοτήτων ἢ διὰ τῆς ε ἰ ς ἄ τ ο π ο ν ἀ π α γ ω γ ῆ ς, δηλ. διὰ τοῦ συμπερασμοῦ, ὅτι ἡ ὑπόθεσις τῆς μὴ ὑπάρξεως τοῦ ἐν λόγῳ ἀντικειμένου ὁδηγεῖ εἰς ἀντίφασιν.

Εἶναι ἀληθές, ὅτι πλήρης ὁρισμὸς τοῦ ὅρου «κατασκευὴ» ἐλλείπει ἀπὸ τοὺς διαισθητικούς. Καίτοι οὗτοι πιστεύουν εἰς τὴν δυνατότητα παροχῆς τοιούτου ἀπολύτου ὁρισμοῦ, ὅμως φαίνεται πιθανὸν ὅτι αὐτὸ θὰ παραμείνῃ ἀναγκαστικὰ ἀνέφικτον. Τὸ ἐναντίον θὰ ἰσοδυνάμει, διὰ πολλούς, μὲ τὸν περιορισμὸν τῆς δημιουργικῆς ἐλευθερίας τοῦ νοῦ.

Ἐρχόμεθα εἰς τὴν ἐξέτασιν, ὑπὸ τὴν ἄποψιν τῶν διαισθητικῶν, τῆς λογικῆς ἀρχῆς τῆς τοῦ τρίτου ἢ μέσου ἀποκλείσεως. Ταύτης εὐρεῖα ἐφαρμογὴ γίνεται, ὡς γνωστόν, εἰς τὰ κλασσικὰ Μαθηματικὰ πρωτίστως εἰς τὰς ἀποδείξεις διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Διὰ τὸν ἐνορατικόν, ἡ ἀρχὴ αὐτὴ δὲν ἐφαρμόζεται προκειμένου περὶ μὴ πεπερασμένων συνόλων. Ὡς λ ο γ ι κ ὴ ἀ ρ χ ὴ παύει αὕτη ἔχουσα γ ε ν ι κ ὴ ν ἰ σ χ ύ ν, καὶ ἔχει μόνον ἰσχὺν ἐξαρτωμένην ἀπὸ τὴν ὁλότητα τῶν ἀντικειμένων εἰς τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζεται. Προκειμένου περὶ ἀπείρου συνόλου, ἡ ἀρχὴ τῆς τοῦ τρίτου ἢ μέσου ἀποκλείσεως δὲν ἐφαρμόζεται, π.χ. διὰ τὴν πρότασιν «ὑπάρχει στοιχεῖον τοῦ συνόλου ἔχον ὡρισμένην ἰδιότητα». Διότι, εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου *τυχὸν δὲν συναντῶμεν εἰς τὸ σύνολον στοιχεῖον μὲ τὴν ἐν λόγῳ ἰδιότητα, δὲν γνωρίζομεν κατὰ πόσον αὐτὸ ὀφείλεται εἰς τὸ ὅτι δ ὲ ν ὑ π ά ρ χ ε ι τοιοῦτον στοιχεῖον ἢ εἰς τὸ ὅτι δ ὲ ν ἐ σ υ ν ε χ ί σ α μ ε ν ἀρκετὰ τὴν σχετικὴν ἀναζήτησιν.*

Ἡ ἄποψις τῶν διαισθητικῶν συνεπάγεται περαιτέρω ἀποκλείσεις συλλογιστικῆς φύσεως. Γενική τις κρίσις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἢ κρίσις περὶ ὑπάρξεως δὲν δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ ὡς ἐκφράζουσα ἰδιότητα τῆς ἀκολουθίας τῶν ἀκεραίων. Οὕτω, γενική τις πρότασις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων ἐκφράζει ἁπλῶς τὴν ὑπόθεσιν, ὅτι ἰδιότης διατυπουμένη διὰ τῆς προτάσεως θέλει ἀληθεύει διὰ κάθε κατασκευὴν τοιούτου ἀριθμοῦ. Τέλος ὁ ἰσχυρισμὸς περὶ τῆς ὑπάρξεως ἀκεραίου μὲ δοθεῖσαν ἰδιότητα δὲν εἶναι τι περισσότερον παρὰ ἀτελὴς διατύπωσις ἀκριβεστέρας προτάσεως παρεχούσης μέθοδον πρὸς εὕρεσιν τοιούτου ἀριθμοῦ.

Ἡ κατὰ τὴν ἄποψιν τῶν διαισθητικῶν ἄρνησις γενικῆς τινος προτάσεως ἢ προτάσεως περὶ ὑπάρξεως ἀκεραίου, στερεῖται ἀκριβοῦς νοήματος. Τότε μόνον φθάνει κανεὶς εἰς ἀκριβῆ μαθηματικὴν πρότασιν, ὅταν ἐξειδικεύσῃ, τρόπον τινά, τὴν ἄρνησιν λέγων, ὅτι «ἀριθμὸς μὲ τὴν ἐν λόγῳ ἰδιότητα δὲν δύναται νὰ κατασκευασθῇ», ἢ ὅτι «ἡ ὑπόθεσις ἀριθμοῦ μὲ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν ὁδηγεῖ εἰς ἀντίφασιν», ἀντὶ τοῦ ὅτι «ἀριθμὸς ἔχων τὴν περὶ ἧς ὁ λόγος ἰδιότητα δὲν ὑπάρχει».

Κατόπιν τούτων, πολλὰ θεωρήματα τῆς κλασσικῆς Ἀναλύσεως πρέπει νὰ ἐγκαταλειφθοῦν. Τοιοῦτον θεώρημα εἶναι π.χ. ἡ θεμελιώδης πρότασις ὅτι «κάθε συνεχὴς συνάρτησις ὁριζομένη εἰς κλειστὸν διάστημα, ἔχει εἰς αὐτὸ ἀπόλυτον μ έ γ ι σ τ ο ν ἢ ἀπόλυτον ἐ λ ά χ ι σ τ ο ν». Ἐξ ἄλλου, εἰς τὴν θεωρίαν τῶν Συνόλων ὀλίγα τινὰ παραμένουν ἰσχύοντα.

Συνοψίζοντες, ἠμποροῦμεν τὴν θέσιν τῶν ὀπαδῶν τῆς διαισθητικῆς Σχολῆς νὰ τὴν χαρακτηρίσωμεν διὰ τῶν ἑξῆς : Οὗτοι δὲν δέχονται, εἰς ἀντίθεσιν πρὸς τοὺς πλατωνικούς, ὕπαρξιν τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων ἀνεξάρτητον τῆς σκέψεώς μας. Τῶν ἀντικειμένων αὐτῶν ἄμεσον ἐντύπωσιν δι᾽ αὐτοὺς λαμβάνει ὁ νοῦς διὰ τῆς δ ι α ι σ θ ή σ ε ω ς ἢ ἐ ν ο ρ ά σ ε ω ς, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν ἐμπειρίαν. Οὕτω, ἡ ἔννοια τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἶναι προϊὸν καθαρᾶς διαισθήσεως.

Ὅπως βλέπομεν, ὁ ἀποκλεισμὸς τοῦ πλατωνικοῦ ἰδεαλισμοῦ ὁδηγεῖ εἰς θεωρίας μὴ στερουμένας μὲν ἀσφαλῶς γονίμων μεθόδων διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν τοῦ ἐκ τῶν ἀντινομιῶν κινδύνου, ὡς καὶ μεθοδολογικῆς σαφηνείας, συνεπαγομένας ὅμως τὴν ἀπόρριψιν ἁπλῶν συλλογιστικῶν τρόπων, ὅπως εἶναι ἡ ἀρχὴ τῆς τοῦ τρίτου ἢ μέσου ἀποκλείσεως, καὶ τὸν ἕνεκα τοῦ γεγονότος τούτου περιορισμὸν τῶν μέχρι τοῦδε ἐπιτευγμάτων εἰς ἕνα ἐλάχιστον τμῆμα αὐτῶν, περιορισμὸν προσκρούοντα εἰς τὸ διὰ τῶν αἰώνων δημιουργηθὲν «μαθηματικὸν αἰσθητήριον», ὅσον καὶ ἂν τοῦτο διὰ *τοὺς διαισθητικοὺς εἶναι ἁ π λ ῆ π ρ ο κ α τ ά λ η ψ ι ς, τῆς ὁποίας δύσκολα ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ ἀποξενωθῇ.*

9. Πρέπει ν' ἀναγνωρίσωμεν, ὅτι αἱ ὑποθέσεις τῶν πλατωνικῶν ἔχουν ὑ π ε ρ β α τ ι κ ὸ ν χαρακτῆρα, ὁ ὁποῖος δὲν συναντᾶται εἰς τοὺς διαισθητικούς. Ἀκριβῶς δὲ ὁ ὑπερβατικὸς αὐτὸς χαρακτὴρ πρέπει νὰ μᾶς καθιστᾷ προσεκτικοὺς ἀναφορικὰ μὲ κάθε τοιαύτην ὑπόθεσιν. Διότι, ἀκόμη καὶ ἂν δὲν φαίνεται αὕτη αὐθαίρετος, ἐμφανίζεται δὲ ὡς φυσική, ἠμπορεῖ νὰ συμβῇ ὥστε ἡ ἀρχὴ ἀπὸ τὴν ὁποίαν προέρχεται νὰ μὴν ἐπιτρέπῃ παρὰ περιωρισμένην μόνον ἐφαρμογήν της, πέραν τῆς ὁποίας ὑπάρχει κίνδυνος νὰ περιπέσῃ κανεὶς εἰς ἀντιφάσεις. Αὐτὸ συνέβη καὶ εἰς τὴν περίπτωσίν μας : Μερικοὶ τῶν φιλοσόφων καὶ μαθηματικῶν ἡρμήνευσαν τὰς πλατωνικὰς ἀντιλήψεις ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ἑνὸς ἀπεριορίστου ρεαλισμοῦ αἰτοῦντος τὴν ὕπαρξιν κόσμου ἰδεατῶν ἀντικειμένων περιλαμβάνοντος, ὡς κλειστὸν σύνολον, ὅλα τὰ νοητὰ ἀντικείμενα καὶ τὰς μαθηματικὰς σχέσεις. Αἱ κατὰ καιροὺς παρουσιασθεῖσαι ἀντινομίαι —ὅπως ἡ ἀντινομία τοῦ σ υ ν ό λ ο υ ὅ λ ω ν τ ῶ ν σ υ ν ό λ ω ν— κατέδειξαν τὸ ἀβάσιμον τῆς ἀπολύτου αὐτῆς θέσεως.

Πρὸς ἄρσιν λοιπὸν οἱασδήποτε παρανοήσεως εἶναι ἀνάγκη, ὅπως, μὲ ἰδιαιτέραν ἔμφασιν, τονισθῇ ὅτι ἡ πλατωνικὴ θεωρία τῶν ἰδεῶν πρέπει νὰ ἐκλαμβάνεται ὄχι ὥς τι τὸ ἐνεστὼς καὶ κλειστόν, ἀλλ' ὡς δ υ ν ά μ ε ι σ ύ σ τ η μ α, ὑπὸ τὴν καθαρὰ μαθηματικὴν τοῦ ὅρου ἔννοιαν.

10. Παράδειγμα τρόπου ἱδρύσεως θεωρίας τινὸς βάσει τῆς πλατωνικῆς ἀντιλήψεως κατὰ τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ὡς ὑπάρχουσαν ἐ ξ ὑ π α ρ χ ῆ ς τὰ εἰς τὴν θεωρίαν ἐξεταζόμενα ἀντικείμενα, ἀποκοπτομένου ὡς πρὸς τὴν ὕπαρξίν των οἱουδήποτε δεσμοῦ ἀπὸ τὰ συναγόμενα ἀποτελέσματα, ἀπετέλεσεν ἔν τινι μέτρῳ ἡ ὑπὸ τοῦ D. Hilbert, κατὰ τὰς ἀρχὰς τοῦ παρόντος αἰῶνος, ἀναληφθεῖσα ἀ ξ ι ω μ α τ ι κ ο π ο ί η σ ι ς τῶν διαφόρων μαθηματικῶν κλάδων. Εἰδικώτερον διὰ τὴν θεωρίαν τῶν Συνόλων, ἡ κεντρικὴ σκέψις τῆς ἐν λόγῳ ἀξιωματικῆς μεθόδου ἔχει οὕτω : Χωρὶς νὰ ἐπιχειρῆται κατ' αὐτὴν ὁ ἄμεσος ὁρισμὸς ἢ ἡ περαιτέρω ἀνάλυσις τῆς ἐννοίας τοῦ συνόλου, ἐπιζητεῖται ὅπως μὲ ἀφετηρίαν κατάλληλον σύστημα ἀξιωμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα τόσον ἡ ἔννοια τοῦ σ υ ν ό λ ο υ, τοῦ σ τ ο ι χ ε ί ο υ σ υ ν ό λ ο υ, ὅσον καὶ ἡ σχέσις τοῦ π ε ρ ι έ χ ε σ θ α ι ἐμφανίζονται ὡς ἀ ρ χ ι κ ο ὶ ὅ ρ ο ι, συναχθοῦν διὰ τῆς ἀ π α γ ω γ ι κ ῆ ς ἢ ἄλλως τῆς π α ρ α γ ω γ ι κ ῆ ς μεθόδου (Deduction) αἱ προτάσεις τῆς θεωρίας. Ὁ οὕτω μὴ ἐκπεφρασμένως δυνατὸς ἄμεσος ὁρισμὸς τοῦ συνόλου ἀντικαθίσταται μὲ τόν, τρόπον τινά, πεπλεγμένως ἀπὸ τὰ ἀξιώματα συναγόμενον ἔ μ μ ε σ ο ν ὁρισμὸν αὐτοῦ.

Ἐλάχιστος ἀριθμὸς τοιούτων ἀξιωμάτων ἐδείχθη ἱκανὸς διὰ τὴν ἵδρυσιν τῆς ἐν λόγῳ θεωρίας, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιλαμβάνονται τὰ ἀξιώματα τοῦ διαχωρισμοῦ, τῶν ὑποσυνόλων, τῆς ἐπιλογῆς καὶ τοῦ ἀπείρου, ὡς ταῦτα διετυπώθησαν εἰς τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα.

Διὰ τῆς ἀξιωματικῆς αὐτῆς θεμελιώσεως, καὶ ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν τοῦ δυνατοῦ τῆς ἀποδείξεως τοῦ σ υ μ β ι β α σ τ ο ῦ τῶν ἐν λόγῳ ἀξιωμάτων (περὶ τῆς ὁποίας κατωτέρω ὁ λόγος), αἱ εἰς τὴν θεωρίαν τῶν Συνόλων παρουσιασθεῖσαι ἀντινομίαι ἀπεκλείσθησαν πλήρως. Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνεται, ὅτι ὁ ἐφαρμοσθεὶς πλατωνισμὸς δὲν θίγεται καθόλου ἀπὸ τὰς ἀντινομίας.

Βέβαια μένει ἀκόμη ἀνοικτὸν τὸ ἐρώτημα, μήπως νέαι ἀντινομίαι, μὴ μέχρι τοῦδε γνωστῆς ὑφῆς, παρουσιασθοῦν εἰς τὸ μέλλον ἐντὸς τῆς ἀξιωματικῶς ἱδρυθείσης θεωρίας τῶν Συνόλων. Καὶ ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα αὐτὸ ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἐκεῖνο τοῦ συμβιβαστοῦ (ἢ τοῦ μὴ ἀντιφατικοῦ) τοῦ συστήματος τῶν ἀξιωμάτων, ἐρώτημα τὸ ὁποῖον καὶ θὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ, μὲ κάθε συντομίαν, εἰς τὰ κατωτέρω.

11. Ἡ ἐπινόησις τῆς ἀξιωματικῆς μεθόδου, ἂν καὶ βέβαια ὄχι τελείως ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ Hilbert, ὀφείλεται εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας, οἱ ὁποῖοι καὶ τὴν ἐφήρμοσαν εἰς τὴν Γεωμετρίαν.

Διὰ τοὺς Ἕλληνας ἀ ξ ι ώ μ α τ α εἶναι ἀ φ᾽ ἑ α υ τ ῶ ν φ α ν ε ρ α ὶ ἢ α ὐ τ α π ό δ ε ι κ τ ο ι προτάσεις. Εἰς ἀντίθεσιν, κατὰ τὴν σημερινὴν ἐκδοχὴν ταῦτα εἶναι προτάσεις κ α θ᾽ ὅ λ α ἰ σ ο δ ύ ν α μ ο ι πρὸς τὰς λοιπὰς προτάσεις τῆς ἐξεταζομένης θεωρίας, κατάλληλοι ὅμως ὅπως χρησιμεύσουν ὡς ἀφετηρία διὰ τὴν περαιτέρω συλλογιστικὴν πορείαν πρὸς ἀπόδειξιν τῶν λοιπῶν προτάσεων. Ὑπὸ τὴν νέαν αὐτὴν ἄποψιν δὲν ἀποδίδομεν οἱονδήποτε περιεχόμενον, δηλ. σημασίαν, εἰς τὰ σύμβολα ἢ τοὺς ὅρους τοὺς ἐμφανιζομένους εἰς τὸ σύστημα, διαμορφοῦντες εἰς τ ύ π ο υ ς ὄχι μόνον τὰς προτάσεις ἀλλὰ καὶ αὐτὰς τὰς ἀποδείξεις. Οὕτω ἀπαλλασσόμεθα, ἐξ ἄλλου, ἀπὸ τὰς ἀτελείας τῆς γλώσσης, ὅπως τὴν ἀσάφειαν ἢ τὸ πολυσήμαντον ὡρισμένων λέξεων, τὴν αὐθαιρεσίαν ὡς πρὸς τὴν διάταξιν αὐτῶν καὶ τὴν ποικιλίαν ἐκφράσεως μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς προτάσεως. Ὁ ὅρος φ ο ρ μ α λ ι σ μ ὸ ς προέκυψεν ἀκριβῶς ἀπὸ τὴν ἐν λόγῳ τ υ π ο π ο ί η σ ι ν. Διὰ τοῦ τρόπου αὐτοῦ, μαθηματική τις θεωρία καθίσταται σύστημα τοιούτων τύπων, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν ἀπὸ τοὺς συνήθεις τύπους εἰς τὰ Μαθηματικά, καθ᾽ ὅσον περιλαμβάνουν καὶ σύμβολα τῆς Λογικῆς, εἰσαγόμενα ὁμοίως διὰ καταλλήλου ἀξιωματικῆς. Οἱ κανόνες μορφώσεως ἢ παραγωγῆς τῶν διαφόρων τύπων, δηλ. οἱ νόμοι οἱ καθορίζοντες ποῖαι σ υ ν θ έ σ ε ι ς τῶν χρησιμοποιουμένων συμβόλων εἶναι ἐπιτρεπταί, παρέχουσαι τοὺς καλουμένους π α ρ α δ ε κ τ ο ὺ ς τύπους, εἰσάγονται ἐπίσης βάσει καθαρῶς τυπικῶν πράξεων. Οὕτω πως ἐπιτυγχάνεται ἡ παράστασις κάθε προτάσεως ἀπὸ ἕνα τύπον, κάθε συλλογισμοῦ ἀπὸ μίαν ὡρισμένης μορφῆς ἀλληλουχίαν τύπων, τέλος κάθε ἀποδείξεως ἀπὸ τυπικὴν ἀλληλουχίαν συλλογισμῶν. Ὡρισμένοι, ὄχι ὅμως ὅλοι οἱ παραδεκτοὶ τύποι, ἀποτελοῦν τὰ θεωρήματα ἢ τὰς ἀ λ η θ ε ῖ ς π ρ ο τ ά σ ε ι ς τῆς θεωρίας, τὰς συναγομένας, βάσει τῶν λογικῶν κανόνων, ἀπὸ τὰ ἀξιώματα.

Εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ τὰ φορμαλιστικὰ Μαθηματικά, ὑπὸ τὴν ἐκτεθεῖσαν ἄποψιν ἑνὸς συστήματος ἐστερημένου σημασίας συμβόλων, ἐμφανίζουν στενὴν σχέσιν μὲ τὴν ἄποψιν ἐκείνην τῶν καλουμένων ὀ ν ο μ α τ ι κ ῶ ν, οἱ ὁποῖοι πρεσβεύουν ὅτι αἱ ἔννοιαι εἶναι ἁπλᾶ ὀνόματα μὴ ἀνταποκρινόμενα πρὸς οἱανδήποτε πραγματικότητα.

Ἡ ἀξία τῆς κατὰ τὸν ὡς ἄνω τρόπον τυποποιήσεως ἔγκειται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι αὕτη ἐπιτρέπει τὴν ἔρευναν τῶν λογικῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἑκάστοτε ἐξεταζομένου συστήματος, ὅπως π.χ. τοῦ συμβιβαστοῦ ἢ τοῦ μὴ ἀντιφατικοῦ τῶν ἀξιωμάτων. Διὰ τὴν φορμαλιστικὴν ἄποψιν τὸ τελευταῖον αὐτὸ σημαίνει τὴν ἐξέτασιν τοῦ ἂν παραδεκτὸς τύπος τῆς θεωρίας ἠμπορῇ νὰ ἐμφανίζεται εἰς αὐτὴν μαζὶ μὲ τὴν ἄρνησίν του, δηλ. τὸν διὰ προτάξεως εἰς τὸν τύπον τοῦ συμβόλου τῆς ἀρνήσεως προκύπτοντα.

Ἡ σχετικὴ ἔρευνα ἀποτελεῖ, κατὰ τὸν D. Hilbert, τὴν θ ε ω ρ ί α ν τ ῶ ν ἀ π ο δ ε ί ξ ε ω ν ἢ τὰ Μ ε τ α μ α θ η μ α τ ι κ ά, ὅρον ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει τὴν ἔννοιαν ὅτι ἐκφεύγει κανεὶς ἀπὸ τὰ Μαθηματικὰ ἢ τὴν Λογικήν, ὅπως π.χ. τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰ Μ ε τ α φ υ σ ι κ ά, ὅπου ἐκφεύγει κανεὶς τῆς Φυσικῆς, ἀλλὰ χαρακτηρίζει τὴν μεταξὺ αὐτῶν καὶ τῶν τυπικῶν Μαθηματικῶν ὑπάρχουσαν διαφοράν. Διὰ τὴν ἐπιτυχίαν τῆς μεταμαθηματικῆς ἐρεύνης, εὐνόητον εἶναι ὅτι αἱ εἰς αὐτὴν χρησιμοποιούμεναι ἀρχαὶ πρέπει νὰ εἶναι ἀπηλλαγμέναι οἱασδήποτε ἀμφιβολίας ὡς πρὸς τὸ μὴ ἐσφαλμένον αὐτῶν. Ὁ Hilbert περιώρισε τὴν μεταμαθηματικὴν σκέψιν εἰς μεθόδους αἱ ὁποῖαι εἶναι κατασκευαστικαί, ὄχι διότι ἐδέχθη τὴν φιλοσοφίαν τῶν διαισθητικῶν, ἀλλὰ διότι αἱ μέθοδοι αὐταὶ δὲν δημιουργοῦν ἀμφιβολίαν ὡς πρὸς τὸ συμβιβαστὸν αὐτῶν.

12. Πλὴν τοῦ προβλήματος τοῦ συμβιβαστοῦ, ἄλλο πρόβλημα, στενώτατα συνδεόμενον μὲ τὸ πρῶτον, ἐγείρεται ἐπίσης: Τὸ πρόβλημα τῆς π λ η ρ ό τ η τ ο ς. Τυποποιημένον σύστημα καλεῖται π λ ῆ ρ ε ς, ὅταν εἰς αὐτὸ εἶναι ἀληθὴς ἢ κάθε παραδεκτὸς τύπος ἢ ὁ μὲ τὴν πρόταξιν εἰς αὐτὸν τοῦ συμβόλου τῆς ἀρνήσεως προκύπτων. Μὲ ἄλλας λέξεις, ὅταν κάθε παραδεκτὴ πρότασις εἶναι ἀ π ο κ ρ ί σ ι μ ο ς ὑπὸ τὴν καταφατικὴν ἢ τὴν ἀρνητικὴν ἔννοιαν. Τόσον ὁ Hilbert, ὅσον καὶ οἱ πλεῖστοι τῶν μαθηματικῶν τῶν τριῶν πρώτων δεκαετιῶν τοῦ αἰῶνος μας, ἦσαν πεπεισμένοι περὶ τῆς δυνατότητος ἱδρύσεως κάθε μαθηματικοῦ κλάδου, ἂν μὴ ὁλο-

κλήρου τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, βάσει πεπερασμένου συστήματος ἀξιωμάτων συμβιβαστοῦ καὶ πλήρους. Ὅμως ἡ εὐλογοφανὴς καί, τρόπον τινά, ἑλκυστικὴ αὐτὴ προσδοκία ἀπεδείχθη ἀβάσιμος ὑπὸ τοῦ Kurt Goedel, τὸ 1931. Εἰς ἐργασίαν τοῦ τελευταίου σχετικῶς σύντομον, ἀλλὰ συγκλονιστικὴν ὡς πρὸς τὰ πορίσματα, προκαλέσασαν αἴσθημα ἀνησυχίας εἰς τοὺς μαθηματικοὺς κύκλους τῆς ἐποχῆς του, ὁ Goedel ἀπέδειξεν, ὅτι (διὰ συστήματα περιέχοντα τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς) συμβιβαστὸν καὶ πληρότης εἶναι ἔννοιαι ἀντιφάσκουσαι μεταξύ των. Μὲ ἄλλας λέξεις, ἂν δεχθῶμεν ὅτι τοιοῦτον σύστημα εἶναι συμβιβαστόν, τότε κατ' ἀνάγκην δέον νὰ δεχθῶμεν ὅτι δὲν εἶναι πλῆρες. Προτάσεις μὴ ἀποκρίσιμοι, δηλ. τῶν ὁποίων οὔτε ἡ θέσις οὔτε ἡ ἄρνησις νὰ εἶναι ἀποδείξιμοι, ὑπάρχουν πάντοτε, ἐφ' ὅσον τὸ σύστημα ἤθελεν ὑποτεθῇ συμβιβαστόν. Πρὸς τούτοις, δι' ἐκτεταμένην κατηγορίαν συστημάτων δύναται ν' ἀποδειχθῇ τὸ μὴ συμβιβαστὸν αὐτῶν, ἐκτὸς ἂν ἤθελε κανεὶς χρησιμοποιήσει ἀποδεικτικὰ μέσα, τῶν ὁποίων ὅμως τὸ συμβιβαστὸν εἶναι ἐξ ἴσου ἀμφισβητήσιμον, ὅπως ἐκεῖνο τῶν συστημάτων. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται, ὅτι διὰ πλεῖστα ἀξιόλογα μέρη τῆς μαθηματικῆς ἐρεύνης ἡ διαπίστωσις ὅτι ταῦτα εἶναι ἀπηλλαγμένα ἐσωτερικῶν ἀντιφάσεων δὲν εἶναι ἐφικτή. Οὕτω τὰ ἀποτελέσματα τοῦ Goedel ἀνέτρεψαν παλαιάς, βαθύτατα ριζωμένας πεποιθήσεις καὶ προσδοκίας.

13. Διὰ μίαν ἀτελῆ σκιαγράφησιν τῆς συλλογιστικῆς πορείας τοῦ Goedel, ἀρκούμεθα εἰς τὰ ἑξῆς: Εἰς κάθε ἀρχικὸν σύμβολον τυποποιημένου τινὸς συστήματος, περιέχοντος τοὺς φυσικούς, ὅπως εἰς κάθε τύπον (ἀλληλουχίαν συμβόλων) καὶ κάθε ἀπόδειξιν (ἀλληλουχίαν τύπων), ἀντιστοιχίζομεν κατ' ἀρχάς, μὲ κατάλληλον τρόπον, μονοσήμαντα ἕναν φυσικὸν ἀριθμόν, καλούμενον ἀριθμὸν Goedel. Ὁ ἐκλεγεὶς τρόπος ἀντιστοιχίσεως ἐπιτρέπει, διὰ κάθε φυσικόν, νὰ καθορισθῇ ἂν εἶναι οὗτος ἀριθμὸς Goedel καί, εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τυχὸν εἶναι, νὰ εὑρεθῇ ἀντιστρόφως ἡ παράστασις, δηλ. ὁ τύπος ἢ ἡ ἀλληλουχία τύπων, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἐν λόγῳ φυσικὸς ἀριθμὸς ἀντιστοιχεῖ.

Ἐν συνεχείᾳ δεικνύεται, ὅτι ὅλαι αἱ μεταμαθηματικαὶ προτάσεις, αἱ ἀφορῶσαι εἰς ἰδιότητας δομῆς τῶν παραστάσεων τοῦ τυποποιημένου συστήματος, ἠμποροῦν τελείως ἀντίστοιχα νὰ ἀπεικονισθοῦν εἰς τὸ θεωρούμενον σύστημα, σύμφωνα μὲ τὴν ἀκόλουθον σκέψιν: Ἀφοῦ εἰς κάθε παράστασιν τοῦ συστήματος ἀντιστοιχεῖ ἀριθμὸς Goedel, μεταμαθηματικὴ πρότασις ἐπὶ τῶν παραστάσεων αὐτῶν καὶ τῶν μεταξύ των σχέσεων ἠμπορεῖ νὰ ἐκληφθῇ ὡς πρότασις ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων ἀριθμῶν Goedel καὶ τῶν μεταξύ των ἀριθμητικῶν σχέσεων.

Βάσει τώρα τῆς οὕτω ἐπιτευχθείσης ἀριθμητικοποιήσεως τῶν Μεταμαθηματικῶν, εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ κατασκευάσωμεν κατάλληλον ἀριθμητικὸν τύπον ἀντιπροσωπεύοντα τὴν μεταμαθηματικὴν πρότασιν «ἂν ἡ Ἀριθμητικὴ εἶναι συμβιβαστή, τότε αὕτη δὲν εἶναι πλήρης». Ὡς φανερόν, εἰς τὴν πρότασιν αὐτὴν τόσον τὸ συμβιβαστὸν (μὴ ἀντιφατικὸν) ὅσον καὶ τὸ πλῆρες ἀναφέρονται εἰς σύστημά τι ἀξιωμάτων τῆς Ἀριθμητικῆς. Ὁ πρὸς κατασκευὴν ἀριθμητικὸς τύπος θὰ εἶναι ὁ τυπικὸς συμπερασμὸς τῶν τύπων τῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τὴν ἡγουμένην καὶ τὴν ἑπομένην πρότασιν τῆς ὡς ἄνω ὑποθέσεως. Ὁ διὰ τῆς ἑπομένης προτάσεως, δηλ. ἡ Ἀριθμητικὴ δὲν εἶναι πλήρης, δηλούμενος ἰσχυρισμὸς δύναται νὰ συναχθῇ ἁπλῶς ἀπὸ τὴν εὕρεσιν παραδεκτοῦ τινος ἀλλὰ μὴ τ υ π ι κ ῶ ς ἀ π ο κ ρ ι σ ί μ ο υ ἀριθμητικοῦ τύπου, δηλ. τύπου τοῦ ὁποίου οὔτε ἡ (τυπικὴ) θέσις οὔτε ἡ (τυπικὴ) ἄρνησις νὰ εἶναι ἀποδείξιμοι. Τοιοῦτον ὅμως τύπον, ὅπως κατέδειξεν ὁ Goedel, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ σύστημα ἀξιωμάτων τυποποιημένου συστήματος τῆς Ἀριθμητικῆς ἤθελεν ὑποτεθῇ ὡς συμβιβαστόν. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ἀριθμητικὸν τύπον ἀντιπροσωπεύοντα τὴν μεταμαθηματικὴν πρότασιν «ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος τύπος δὲν εἶναι ἀποδείξιμος». Πρόκειται περὶ τύπου ἐκφράζοντος περὶ ἑαυτοῦ τὸ μὴ ἀποδείξιμόν του. Ἀποδεικνύεται τότε, ὅτι ἡ τυπικὴ ἄρνησις τοῦ κατασκευασθέντος τύπου εἶναι τότε καὶ μόνον ἀποδείξιμος, ὅταν αὐτὸς οὗτος ὁ τύπος εἶναι ἀποδείξιμος. Ὥστε, ἢ εἶναι τὸ θεωρούμενον ἀριθμητικὸν σύστημα ἀντιφατικὸν (μὴ συμβιβαστὸν) ἢ δὲν εἶναι πλῆρες. Ἐφ' ὅσον λοιπὸν ἤθελεν ὑποτεθῇ τοῦτο συμβιβαστόν, ἕπεται ὅτι δὲν εἶναι πλῆρες.

Περαιτέρω κατεσκεύασεν ὁ Goedel ἀριθμητικὸν τύπον ἀντιπροσωπεύοντα τὴν ἡγουμένην πρότασιν τῆς ἀρχικῆς ὑποθέσεως, δηλ. τὴν πρότασιν, ὅτι ἡ Ἀριθμητικὴ εἶναι συμβιβαστή, ἀποδείξας τὸν τυπικὸν συμπερασμὸν τοῦ προηγουμένως κατασκευασθέντος τύπου ἀπὸ τὸν τελευταῖον αὐτόν. Ὁ εἰς τὴν ἡγουμένην πρότασιν ἀντιστοιχῶν τύπος δὲν εἶναι ὅμως ἀποδείξιμος, διότι ἄλλως, βάσει τοῦ συλλογιστικοῦ σχήματος modus ponens τοῦ τυποποιημένου ἀριθμητικοῦ συστήματος, θὰ ἦτο ἀποδείξιμος καὶ ὁ εἰς τὴν ἑπομένην πρότασιν ἀντιστοιχῶν τύπος ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι τὸ ἀριθμητικὸν σύνολον εἶναι συμβιβαστόν.

Τελικά, ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἂν ὁ περὶ τοῦ συμβιβαστοῦ τῆς Ἀριθμητικῆς ἰσχυρισμὸς ἦτο καθ' οἱονδήποτε τρόπον δυνατὸν νὰ ἀπεικονισθῇ εἰς ἀλληλουχίαν τύπων ἀποτελοῦσαν ἀπόδειξιν εἰς τυποποιημένον ἀριθμητικὸν σύστημα, τότε ἀποδείξιμος θὰ ἦτο καὶ ὁ εἰς τὴν ἡγουμένην πρότασιν τῆς ἀρχικῆς ὑποθέσεως ἀντιστοιχῶν τύπος, πρᾶγμα ὅμως, ὡς ἐδείξαμεν, ἀδύνατον, ἐφ' ὅσον ἡ Ἀριθμητικὴ εἶναι συμβιβαστή. Εἰς τελευταίαν ἀνάλυσιν αὐτὸ σημαίνει, ὅτι, ἐφ' ὅσον ἡ Ἀριθμητικὴ εἶναι συμβιβαστή, τὸ συμβιβαστὸν αὐτῆς δὲν δύναται νὰ δειχθῇ μὲ μεταμαθηματικὴν ἀπόδειξιν ἀπεικονιζομένην εἰς τὸν φορμαλισμὸν τῆς Ἀριθμητικῆς.

14. Τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἐργασίας τοῦ Goedel δὲν ἦσαν, ὅμως, τελείως ἀρνητικά. Ἀντιθέτως, διὰ τῶν χρησιμοποιηθεισῶν εἰς αὐτὰ μεθόδων διηνοίγησαν νέοι δρόμοι ὁδηγοῦντες εἰς προβλήματα ὑψίστης γνωσιοθεωρητικῆς σημασίας. Ἡ διὰ τῶν ἀποτελεσμάτων αὐτῶν ἀπαραίτητος καταστᾶσα ἐπανεκτίμησις παλαιοτέρων δοξασιῶν εἰς τὰ Μαθηματικά, ἔδωσε νέον αἷμα καὶ νέαν ὤθησιν εἰς τὴν περαιτέρω ἔρευναν. Οὕτω, ἂν καὶ ἡ ἐλπὶς ἀπολύτου ἀποδείξεως περὶ τοῦ μὴ ἀντιφατικοῦ διὰ κάθε παραγωγικὸν σύστημα δὲν πρέπει λογικὰ ν' ἀποκλεισθῇ, παρὰ ταῦτα τοιαύτη ἀπόδειξις εἶναι εἰς μέγαν βαθμὸν ἀπίθανος.

Διὰ τὸν Goedel δὲν ἠμπορεῖ νὰ τεθῇ φραγμὸς εἰς τὴν ἐπινοητικὴν δύναμιν τοῦ μαθηματικοῦ νοῦ ἀναφορικὰ μὲ τὴν δημιουργίαν νέων ἀποδεικτικῶν μεθόδων. Δι' αὐτὸ καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ δοθῇ τελειωτικὴ ἔκφρασις τῆς ἀκριβοῦς λογικῆς μορφῆς μαθηματικῶν ἀποδείξεων. Γεννᾶται ὅθεν τὸ ἐρώτημα : Ἠμπορεῖ νὰ ἐπιτευχθῇ πλήρης ὁρισμὸς τῆς μαθηματικῆς καὶ λογικῆς ἀληθείας ; Τὸ γεγονὸς ὅτι ἀξιωματικοποίησίς τις περιλαμβάνει περισσοτέρας ἀληθείας ἀπὸ ἄλλην, οὐδεμία δὲ ἀξιωματικοποίησις δύναται νὰ περιλάβῃ ὅλας τὰς ἀληθείας, ἠχρήστευσε τὸν ὁρισμὸν τοῦ H. Poincaré κατὰ τὸν ὁποῖον ἡ μαθηματικὴ ἀλήθεια ἐταυτίζετο μὲ τὸν ἀπὸ τὰ ἀξιώματα συμπερασμόν της.

Ἡ ἀνακάλυψις ὑπάρξεως ἀληθειῶν μὴ δυναμένων ν' ἀποδειχθοῦν τυπικῶς, δὲν σημαίνει τὴν ὕπαρξιν ἀληθειῶν αἱ ὁποῖαι κατ' ἀνάγκην θὰ παραμένουν ἄγνωστοι εἰς ἡμᾶς. Σημαίνει ἁπλῶς, ὅτι αἱ πηγαὶ τῆς νοήσεως οὔτε ἔχουν πλήρως τυποποιηθῆ, οὔτε θὰ καταστῇ ποτὲ δυνατὸν νὰ τυποποιηθοῦν εἰς τὸ μέλλον. Νέαι ἀποδεικτικαὶ μέθοδοι διαρκῶς θὰ ἐπινοοῦνται ἢ θὰ ἀνακαλύπτωνται. Ἀντὶ λοιπὸν συναισθήματος ἀποκαρδιώσεως, πρέπει νὰ μᾶς κατέχῃ θαυμασμὸς πρὸ τῆς ἀπεριορίστου ἐκτάσεως τῶν δυνατοτήτων τοῦ δημιουργικοῦ νοῦ.

Ἐκεῖνο ὅμως τὸ ὁποῖον, πέραν οἱουδήποτε ἄλλου, ἐνδιαφέρει ἡμᾶς ἐδῶ εἶναι ἡ σημασία τῶν ἰδεῶν τοῦ Πλάτωνος διὰ τήν, κατόπιν τῆς ἐρεύνης τοῦ Goedel, ἐξέλιξιν τῶν Μαθηματικῶν. Ἂν καὶ αἱ πρῶται δημοσιεύσεις τοῦ ἐρευνητοῦ αὐτοῦ εἶναι ἐπηρεασμέναι ἀπὸ τὴν Σχολὴν Hilbert, ὅμως παραμένει ἐκτὸς πάσης ἀμφιβολίας τὸ γεγονὸς τῆς πλατωνικῆς τοποθετήσεώς του. Περὶ αὐτοῦ πείθουν ἡμᾶς περικοπαὶ μεταγενεστέρων ἐργασιῶν του, εἰς τὴν πλέον εὔγλωττον τῶν ὁποίων ἀναγινώσκομεν [3] :

«Κλάσεις, δηλ. σύνολα, καὶ ἔννοιαι ἠμποροῦν νὰ νοηθοῦν ὡς πραγματικὰ ὄντα, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὰς κατασκευὰς καὶ τοὺς ὁρισμούς μας. Νομίζω ὅτι ἡ παραδοχὴ

3. K. Goedel, *Russell's Mathematical Logic*. Ἐργασία περιλαμβανομένη εἰς τὸ ἔργον *The Philosophy of Bertrand Russell* ὑπὸ P. A. Schilpp, Evanston καὶ Chicago, 1944, σ. 137.

τοιούτων ὄντων εἶναι ἐξ ἴσου νόμιμος ὅπως καὶ ἡ παραδοχὴ ὑλικῶν σωμάτων, ὅτι δὲ ἐξ ἴσου πολλοὶ λόγοι συνηγοροῦν διὰ νὰ πιστεύωμεν εἰς τὴν ὕπαρξίν των».

15. Ἂν καὶ δὲν ἀποδίδεται εἰς τὸν Πλάτωνα συγκεκριμένη τις ἐπὶ μέρους μαθηματικὴ ἀνακάλυψις, ὅμως εἰς αὐτόν, πλὴν τῆς εἰσαγωγῆς τῶν μαθηματικῶν ἰδεῶν, ὀφείλονται γενικαί τινες μαθηματικαὶ κατευθύνσεις. Εἰς αὐτὰς καταλέγονται ἡ ἀξιωματικὴ δομὴ τῶν μαθηματικῶν θεωριῶν, ὅπως π.χ. τῆς Γεωμετρίας, ἡ εἰς τὰς θεωρίας αὐτὰς χρησιμοποιουμένη ἀναλυτικὴ μέθοδος, καθὼς καὶ τὸ ἐπίταγμα τοῦ διὰ τὰς γεωμετρικὰς κατασκευὰς περιορισμοῦ εἰς τὸν κανόνα καὶ διαβήτην. Ὑπὸ τὴν ἐπιρροὴν τοῦ Πλάτωνος, οἱ μεγαλοφυεῖς αὐτοῦ μαθηταὶ Εὔδοξος καὶ Θεαίτητος ἀφῆκαν αἰώνια μνημεῖα μαθηματικῆς βαθύτητος καὶ ὀξυνοίας.

Διὰ τὸν φιλόσοφον E. Frank [4], ὁ Πλάτων ὑπῆρξε μάρτυς τῆς μεγάλης ἀναπτύξεως τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης τῆς ἐποχῆς του. Μὲ τὴν ἀνάπτυξιν αὐτὴν κατέστη δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ τὴν Φύσιν τοῦ καλύπτοντος αὐτὴν πέπλου διὰ τῆς ἀναζητήσεως τῆς ἀντικειμενικῆς πραγματικότητος μὲ τὴν καθαρὰν σκέψιν, πέραν ἀπὸ κάθε αἰσθητὴν ἐμπειρίαν.

Ἔχων κανεὶς ὑπ᾽ ὄψιν τὴν ὑπὸ τοῦ Πλάτωνος εἰς τὰ Μαθηματικὰ ἀποδιδομένην σημασίαν, εἶναι εὔλογον ν᾽ ἀναζητῇ τὴν πλήρη εἰκόνα τῆς θέσεως τὴν ὁποίαν καταλαμβάνει ἡ θεωρία του τῶν ἰδεῶν εἰς τὰ Μαθηματικά. Οὐδείς, ἄλλωστε, δύναται νὰ ἰσχυρισθῇ ὅτι κατενόησε πλήρως τὴν ἐν λόγῳ θεωρίαν, ἂν δὲν λάβῃ ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ἐδημιουργήθη αὕτη τὴν ἐποχὴν τῆς ἀνθήσεως τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, καθὼς καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ ἰδίου τοῦ Πλάτωνος μνημονευόμενον, ὅτι οὗτος ἀφωρμήθη ἀπὸ τὴν γνωσιολογικὴν σημασίαν τῆς ὑπάρξεως τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Μὲ τὴν διείσδυσιν τῶν πλατωνικῶν ἀντιλήψεων καὶ εἰς τὴν μετέπειτα μαθηματικὴν ἐπιστήμην, διείσδυσιν φθάνουσαν, ὡς ἐξεθέσαμεν, μέχρι τῶν ἡμερῶν μας, ἔχομεν ἁπτὸν δεῖγμα τῆς διαυγείας καὶ ὀξύτητος τοῦ ἑλληνικοῦ πνεύματος εἰς ὅλην αὐτοῦ τὴν δύναμιν καὶ τὸ μεγαλεῖον.

SUMMARY

Plato's theory of ideas, about classical and modern Mathematics, is the subject of this report.

It is well known, that the platonic ideas exist in themselves independently of the mind. What we do is to discover, not to invent them.

4. *E. Frank, Plato und die sog. Pythagoreer, σ. 40.*

Owing to the fact that ideas have a real being outside our mind, we may describe Plato's theory as a realistic theory.

In the realm of mathematics, this realistic aspect in viewing the objects (abstract entities) existing from the outset, is what we call platonism. Speaking of platonists, we mean therefore in Mathematics those whose tendency is to discover truths about structures existing independently of our thought.

Opposed to this ontological point of view, intuitionism holds that mathematical objects are mind-made; they are invented, not discovered. This opposition to platonism arose in modern times essentially from disagreement over actual infinity.

As a consequence of their doctrine, intuitionists were compelled to abandon well-tested and elegant methods of mathematics for more complicated; very few things of the classical theories remained valid for them.

Next to platonism (reappearing at twenty century in the logistic philosophy) and intuitionism, nominalism is one of the other important ontological points of view in the philosophy of mathematics. For the nominalist there is no abstract entities at all, even in the restrained sense of mind-made; mathematics is a game of insignificant notations. This point of view is newly represented by formalism.

Formalism is the first step which D. Hilbert proposed for investigating the problem of consistency for a system of axioms in an axiomatized mathematical theory. According to it, we pay no attention to the meanings of the symbols or terms occuring in the axioms. Statements made about these meaningless symbols and the formulas (theorems), which we obtain by appropriate 'formation rules', consist the second step in the foundations of mathematics, known as Metamathematics. In order to make metamathematical reasonig free of any doubt, Hilbert restricted himself, in this second step, to what is called finitist (constructive) methods.

But, 1931, K. Gödel was able to prove that, for important kinds of systems, consistency is incompatible with completeness. So, a unified system of axioms for the whole of mathematics, consistent and complete, has been shown not possible with finitist methods.

What is worth noting in this respect, is the fact, that Gödel is regarded to be a platonist. Thus, the platonists' thesis, even in new mathematics, is not lacking of influence.