ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. — Περὶ ἑνὸς προβλήματος τοῦ Λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν ὑπὸ ***Νείλου Σακελλαρίου.*** — Ἀνεκοινώθη ὑπὸ κ. Κ. Μαλτέζου.

Εἰσαγωγή. Εἰς τὸ βιβλίον του [1] ὁ O. Bolza ἐξετάζων τὸ παραμετρικὸν πρόβλημα τοῦ Λογισμοῦ τῶν μεταβολῶν περὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐλαχίστου τοῦ ὁλοκληρώματος

$$J = \int_{P_1}^{P_2} F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$$

ὅταν τὰ ἄκρα σημεῖα τῶν θεωρουμένων καμπύλων συγκρίσεως δὲν εἶνε σταθερά, ἀναγράφει τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ συνάρτησις F περιέχει τὰς συντεταγμένας τῶν ἄκρων σημείων, δίδει δὲ διὰ τὸ πρόβλημα τοῦτο τὴν καλουμένην πρώτην συνθήκην διατομῆς (Transversalitätsbedingung), ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν μεταβολὴν πρώτης τάξεως τοῦ ὡς ἄνω ὁλοκληρώματος. Τὸ πρόβλημα αὐτό, προκειμένου μόνον περὶ τῆς ἐν λόγῳ συνθήκης, ἐξητάσθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Lagrange [2], τὸ δὲ τῆς βραχυστοχρόνου, ὅταν τὸ ἀρχικὸν σημεῖον αὐτῆς κινῆται ἐπί τινος καμπύλης ἐνῷ τὸ τελικὸν εἶνε σταθερόν, εἶνε ἓν τοιοῦτον τῆς περιπτώσεως ταύτης, καθότι ἡ συνάρτησις F ἔχει τὴν μορφὴν [3]

$$F = \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{y - y_1 + C}}, \quad C = \frac{v_o^2}{2g}, \quad v_o = (\text{σταθερὰ})\ \text{ἀρχ. ταχύτης}.$$

Τὸ πρόβλημα τοῦ Lagrange εἰς τὸν Λογισμὸν τῶν μεταβολῶν, ὅταν τὰ ἄκρα σημεῖα τῶν θεωρουμένων καμπύλων εἶνε μεταβλητά, προεκάλεσε κατὰ τὰ ἐγγὺς τελευταῖα ἔτη ζωηρὸν ἐνδιαφέρον πολλῶν ἐρευνητῶν. Τοιοῦτον γενικὸν πρόβλημα διετυπώθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Bolza [4], εὑρέθησαν δ' ὑπ' αὐτοῦ ὄχι μόνον ἀναγκαῖαι συνθῆκαι διὰ τὴν ὕπαρξιν ἐλαχίστου τοῦ θεωρουμένου ὁλοκληρώματος, ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἐξισώσεις τοῦ Euler, ἀλλὰ καὶ αἱ καλούμεναι συνθῆκαι διατομῆς. Ὁ Bliss ἐξήτασε [5] πρόβλημα γενικώτερον τοῦ Bolza δι' ἀναζητήσεως μεταξὺ τῶν τόξων, τῶν παριστανομένων ὑπὸ τῶν ἐξισώσεως

$$y_i = y_i(x)\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

ἐνῷ ἐπαληθεύονται αἱ ἐξισώσεις

$$\varphi_\alpha(x, y_i, y'_i) = 0, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m < n)$$

$$\psi_\mu(x_1, y_i(x_1), x_2, y_i(x_2)) = 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, p \leq 2n + 2),$$

ἐκείνου τὸ ὁποῖον καθιστᾷ ἐλαχίστην τὴν συνάρτησιν

$$J = G\ (x_1,\ y_i\ (x_1),\ x_2,\ y_i\ (x_2)) + \int_{x_1}^{x_2} f\ (\ x,\ y_i,\ y'_i\ )\ dx.$$

Κυρίως ὁ M. Morse [6] καὶ ὁ S. M. Mayer [7] ἐξήτασαν τὸ πρόβλημα περὶ τοῦ ἐλαχίστου τῆς συναρτήσεως

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f\ (\ x,\ y_i\ ,\ y'_i\ )\ dx + g\ (x^{\sigma},\ y_i^{\sigma})\ ,\ (\sigma = 1,\ 2),$$

θεωροῦντες καμπύλας μὲ ἐξισώσεις

$$y_i = y_i\ (x),\quad (i = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ n),$$

ὅταν αἱ y_i (x) ἐπαληθεύουν τὰς

$$\varphi_{\beta}\ (\ x,\ y_i\ ,\ y'_i\ ) = 0\ ,\qquad (\beta = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ m < n)$$

ἐνῷ τὰ $(x^{\sigma},\ y_i^{\sigma}) = (x^{\sigma},\ y_1^{\sigma},\ y_2^{\sigma},\ .\ .\ .\ ,\ y_n^{\sigma})$ παριστάνουν τὰς συντεταγμένας τῶν μεταβλητῶν ἄκρων σημείων. Ὁ H. Mcfarlan [8] ἐξήτασε τὸ x πρόβλημα τοῦ Lagrange τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐλαχίστου τῆς συναρτήσεως

$$J = \int_{P_1}^{P_2} f\ (x,\ y_i\ ,\ y'_i\ ,\ x_2,\ y_{i2})\ dx,$$

ὅταν αἱ θεωρούμεναι συναρτήσεις y_i (x) ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις

$$\varphi_{\beta}\ (x,\ y_i\ ,\ y'_i\ ,\ x_2\ ,\ y_{i2}) = 0\ ,\quad (\beta = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ .\ ,\ m < n),$$

τὰ δὲ $(x_2\ ,\ y_{i2}) = (x_2\ ,\ y_i\ (x_2))$ παριστάνουν τὰς συντεταγμένας τοῦ μεταβλητοῦ ἄκρου σημείου P_2, τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται ὅτι κινεῖται ἐπί τινος καμπύλης ὁριζομένης ὑπὸ συναρτήσεων X_2 (t), Y_{i2} (t), ὅπου t παριστάνει παράμετρον. Νεωστὶ ὁ M. R. Hestenes [9] ἐρευνᾷ τὸ γενικὸν πρόβλημα τοῦ Lagrange ἐν συνδυασμῷ μὲ τὸ γνωστὸν πρόβλημα τοῦ Bolza περὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐλαχίστου τῆς συναρτήσεως

$$J\ (C) = g\ (\alpha) + \int_{P_1}^{P_2} f\ (\ \alpha,\ x,\ y_i\ ,\ y'_i\ )\ dx\ , \tag{0.1}$$

ἤτοι τῆς εὑρέσεως ἑνὸς τόξου καθιστῶντος ἐλάχιστον τοῦ (0.1) ἐκ μιᾶς τάξεως τόξων συγκρίσεως C τῆς ἀναλυτικῆς μορφῆς

$$a_h\ ,\ y_i\,(x)\ ,\ (x_1 \leq x \leq x_2\ ,\ h = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ r,\ i = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ n) \tag{0.2}$$

εἰς τὸν χῶρον axy, τῶν (0.2) ἐπαληθευουσῶν τὰς ἑπομένας συνθήκας

$$\varphi_\nu\ (\alpha_h,\ x,\ y_i,\ y'_i) = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m<n)$$

$$x^\sigma = x^\sigma\ (\alpha_h),\ y_i(x^\sigma) = y_i^\sigma\ (\alpha_h), \qquad (\sigma = 1, 2)$$

$$J_\varrho = g_c(\alpha_h) + \int_{P_1}^{P_2} f_\varrho(\alpha_h,\ x,\ y_i,\ y'_i)\ dx,$$

ἐνῷ τὰ $(\alpha_h) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ εἶνε ἀνεξάρτητα τοῦ x.

Μὲ τὴν ἀνακοίνωσιν τοῦ ἀνὰ χεῖρας σημειώματος θὰ δώσωμεν ἀποτελέσματα τῆς ἐρεύνης τοῦ παραμετρικοῦ προβλήματος εἰς τὸν Εὐκλείδειον χῶρον ἢ τὸν τοῦ Riemann τῶν n διαστάσεων περὶ τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐλαχίστου τῆς συναρτήσεως

$$J = \vartheta\ (\alpha) + \int_{P_1}^{P_2} F\ (x_i,\ \dot{x}_i,\ x_{i2})\ ds, \tag{0.3}$$

(καὶ συγκεκριμένως τὰς συνθήκας (1.7), (1.8), (1.9) καὶ τοὺς τύπους (2.1), (2.6), (2.7), (2.8), (2.12) καὶ (2.13) οἱ ὁποῖοι δίδουν τὴν δευτέραν μεταβολὴν τοῦ (0.3) διὰ $\varepsilon = 0$), ἐνῷ ὑποτίθεται ὅτι εἶνε

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho)$$

$$(x_i,\ \dot{x}_i) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n),\ \dot{x}_i = \frac{dx_i}{ds}$$

$$x_i = x_i\ (s),\ x_{i2} = x_i\ (s_2, \alpha),\ P_1 = P_1\ (s_1),\ P_2 = P_2\ (s_2)$$

$$F\ (x_i,\ k\dot{x}_i) = k F\ (x_i,\ \dot{x}_i),\ k > 0,\ (\dot{x}_i) \neq 0,$$

τὸ δὲ s παριστάνει τὸ μῆκος τοῦ θεωρουμένου τόξου, αὐξανόμενον ἀπὸ s_1 μέχρι s_2, περιλαμβανομένων καὶ τῶν τιμῶν s_1 καὶ s_2. Ἡ συνάρτησις F τοῦ ἀντιαναλλοιώτου διανύσματος x_i, $\lambda^i = \dot{x}_i$ περιέχει τὰς συντεταγμένας $(x_{i2}) = (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2})$ τοῦ πέρατος P_2 κινουμένου ἐντὸς χώρου ϱ διαστάσεων ἢ ἐπὶ δοθείσης πολλαπλότητος M τάξεως ϱ, τῆς ὁποίας αἱ ἐξισώσεις εἶνε

$$x_{i2} = x_{i2}\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho).$$

Σημείωσις. Εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους καθὼς καὶ κατωτέρω γίνεται χρῆσις τοῦ συμβολισμοῦ τῆς ἀθροίσεως, τοῦ χρησιμοποιουμένου εἰς τὸν λογισμὸν τῶν τενόντων.

§ 1. ***Αἱ ἐξισώσεις τοῦ Euler καὶ αἱ πρῶται συνθῆκαι διατομῆς.*** Ὡς εἶνε γνωστὸν [10] τὸ ὑπὸ ἐξέτασιν παραμετρικὸν πρόβλημα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς περίπτωσις προβλήματος τοῦ Lagrange ἐνῷ εἶνε

$$\varphi = \Sigma\ \dot{x}_i^2 - 1 = 0$$

ἢ διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ χώρου τοῦ Riemann

$$\varphi = g_{ij}\,(x_k)\,\dot{x}_i\,\dot{x}_j = 0\,,\ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

ἐνῷ ὁ ἀντιστοιχῶν πολλάπλασιαστὴς τοῦ Lagrange $\overline{\lambda}$ (s) ἔχει ἐκ ταὐτότητος τὴν τιμὴν μηδὲν κατὰ μῆκος τῆς ἀκροτάτης καμπύλης. Ἐὰν

$$(1.1)\qquad x_i = x_i\,(s)$$

εἶνε αἱ ἐξισώσεις τοῦ τόξου $C_{P_1}^{P_2}$ διὰ τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἐλάχιστον τοῦ (0.3), θὰ λέγωμεν ὅτι καμπύλη τις τῆς τάξεως[11] D′ εἰς τὴν περιοχὴν τῆς $C_{P_1}^{P_2}$ θὰ εἶνε καμπύλη συγκρίσεως, ἐὰν τὸ πέρας αὐτῆς δίδεται ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων

$$(1.2)\qquad x_{i2} = x_{i2}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho) = x_{i2}\,(\alpha) = x_i\,(s_2\,,\,\alpha),\ (0 \leq \varrho \leq n)$$

διὰ τιμὰς τῶν παραμέτρων (α) εἰς τὴν περιοχὴν (ο), ἐνῷ αἱ (1.1) καὶ ἡ θ(α) εἶνε τῆς τάξεως[11] C″, ἢ ἂν τὸ πέρας αὐτῆς κεῖται ἐπὶ πολλαπλότητος παριστανομένης ὑπὸ τῶν (1.2). Εἰς τὴν περίπτωσιν $\varrho = 1$ αἱ (1.2) θὰ παριστάνουν καμπύλην ἐν γένει εἰς τὸν χῶρον n διαστάσεων.

Τόξον τι E θὰ καλῆται *ἀκραῖον* τοῦ θεωρουμένου προβλήματος, ἐὰν εἶνε τόξον καμπύλης συγκρίσεως, στερῆται γωνιωδῶν σημείων, αἱ δ' ὁρίζουσαι αὐτὸ συναρτήσεις $x_i\,(s)$ ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις τοῦ Euler

$$(1.3)\qquad q_i \equiv F_{x_i} - \frac{d}{ds}\,F_{\dot{x}_i} = 0\,,$$

ὅπου τὸ q_i παριστάνει τὸ συνανάλλοίωτον διάνυσμα τοῦ Euler τῆς παραμετρικῆς καμπύλης εἰς ἕκαστον σημεῖον αὐτῆς. Ἕκαστον ἀκραῖον τόξον ἢ ἑκάστη ἀκραία καμπύλη E εἶνε στοιχεῖον (ἢ μέλος) μιᾶς οἰκογενείας καμπύλων παριστανομένων ὑπὸ συναρτήσεων

$$x_i\,(s, \overline{\alpha}_{\varrho'}, c_k\,, \overline{c}_k)\,,\qquad \begin{pmatrix} \varrho' = 1, & 2, \ldots, \varrho \\ k = 1, & 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

μὲ $2_n + \varrho$ παραμέτρους.

Ἀκραῖον τόξον ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν συναρτήσεων $x_i\,(s)$ θὰ καλῆται ὁμαλόν, ἐὰν κατὰ μῆκος αὐτοῦ εἶνε

$$(1.4)\qquad \begin{vmatrix} F_{\dot{x}_i \dot{x}_j} & \dot{x}_i \\ \dot{x}_j & 0 \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

ἤτοι ἐὰν εἶνε $F_1 \neq 0$ διὰ τὰς τιμὰς $\alpha_h = \alpha_{h0}$, $c_i = c_{i0}$, $\overline{c}_i = \overline{c}_{i0}$ [12], ὅπου F_1 παριστάνει τὴν συνάρτησιν τοῦ Legendre τοῦ προβλήματος τούτου.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς πρώτης συνθήκης διατομῆς ὑποθέτομεν ὅτι δίδονται τὰ (α) ὡς συναρτήσεις μιᾶς παραμέτρου ε τῆς τάξεως C^2 διὰ τιμὰς τούτου εἰς τὴν περιοχὴν τῆς τιμῆς αὐτοῦ μηδὲν καὶ προσέτι ὅτι δίδεται ἓν μονοπαραμετρικὸν σμῆνος καμπύλων μὲ ἐξισώσεις

$$x_i = \Phi_i(s, \alpha(\varepsilon)) = x_i(s, \varepsilon), \ (s_1 \le s \le s_2) \tag{1.5}$$

ἐνῷ αἱ $x_i(s, \varepsilon)$ εἶνε τῆς τάξεως C^2 πρὸς s καὶ πρὸς ε εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ ο καὶ ὅτι εἶνε

$$x_i(s_2, \varepsilon) = x_{i2}(\alpha(\varepsilon)) \tag{1.6}$$

$$x_i(s_1, o) = x_i(s_1, \alpha(o)) = x_i(s) \tag{1.6$_1$}$$

$$x_i(s_1, \varepsilon) = x_i(s_1) = x_{i1}, \tag{1.6$_2$}$$

(ὅπου αἱ $x_i(s)$ ὁρίζουν τὴν ἀκραίαν καμπύλην).

Ἀντικαθιστῶντες τὰ x_i, $\dot{x}_i$, x_{i2} διὰ τῶν (1.5) καὶ (1.6) εἰς τὸ (0.3) εὑρίσκομεν τὴν καλουμένην πρώτην μεταβολὴν τοῦ (0,3) ὡς πρὸς ε, λαμβάνοντες δ' ὑπ' ὄψει τὰς (1.6$_2$), διὰ ε = ο ἕνεκα τῶν (1.3), εὑρίσκομεν

$$\vartheta_{a_h} + x_{i a_h} F_{\dot{x}_i} \Big|^{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} F_{x_{i2}} \, x_{iah} \, ds = o, \ [\alpha'_h(o) =|= o], \tag{1.7}$$

ἢ

$$\sigma_{\tau_1} \quad d\vartheta + F_{\dot{x}_i} \, dx_i \Big|^{s_2} + \int_{s_1}^{s_2} F_{x_{i2}} \, dx_{i2} \, ds = o, \tag{1.8}$$

ὅπου τὰ $d\vartheta$, dx_i, dx_{i2} θὰ θεωρηθοῦν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\varrho$, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶνε συνάρτησις τοῦ ε, μετὰ δὲ τὴν παραγώγισιν ἔχει τεθῆ ε = ο. Ἡ (1.7) ἢ (1.8) εἶνε ἡ καλουμένη πρώτη συνθήκη διατομῆς τοῦ ἐξεταζομένου προβλήματος, εἶνε δ' ἡ (1.8) ταὐτότης πρὸς da_h καὶ ἑπομένως ἐξ αὐτῆς προκύπτουν ρ συνθῆκαι τῆς καλουμένης πρώτης διατομῆς

$$\vartheta_{a_h}(o) + F_{\dot{x}_i} x_{iah}(o) \Big|^{s_2} u_h + \int_{s_1}^{s_2} F_{x_{i2} a_h} \, u_h \, ds = o, \ \alpha'_h(o) = u_h \tag{1.9}$$

§ 2. ***Ἡ δευτέρα μεταβολὴ τοῦ (0.3).*** Ἐκ τῆς πρώτης μεταβολῆς τοῦ (0.3) ὡς πρὸς ε εὑρίσκομεν (παραγωγίζοντες πρὸς ε, ἀφοῦ τεθῆ ε = ο)

$$\begin{aligned} J''(o) = {} & \vartheta_{a_h a_k} u_h u_k + \int_{s_1}^{s_2} 2\,\Omega(s, \eta_i, \dot{\eta}_i)\, ds + \int_{s_1}^{s_2} (F_{x_{i2} x_{j2}} x_{i2 a_h} x_{j2 a_k} + \\ & + F_{x_{j2}} x_{i2 a_h a_k}) u_h u_k \, ds + [(F_{\dot{x}_i} x_{i a_h a_k} + 2 F_{\dot{x}_i j_2} x_{i a_h} x_{j2 a_k}) u_h u_k]^{s_2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

ἐνῷ ἐτέθη

$$(2.2)\qquad 2\,\Omega = F_{x_i x_j}\,\eta_i\,\eta_j + 2\,F_{x_i \dot{x}_j}\,\eta_i\,\dot{\eta}_j + F_{\dot{x}_i \dot{x}_j}\,\dot{\eta}_i\,\eta_j\,,$$

$$(2.3)\qquad \eta_i = x_{ia_h}\,(s,\ \alpha\,(o))\ u_h = x_{i2}\,(s,\ o),$$

$$(2.4)\qquad \eta_{i2} = x_{ia_h}\,(s_2\,,\ o)\ u_h\ \text{ἢ}\ \eta_{i2} = x_{i2a_h}\,(\alpha(o)).\ \alpha'_h\,(o),$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε

$$(2.5)\qquad \eta_{i1} = x_{ia_h}\,(s_1,\ o) = x_{i1a_h} = o$$

θὰ ἔχωμεν

$$\int_{s_1}^{s_2} (F_{x_i}\,x_{ia_h a_k} + F_{\dot{x}_i}\,\dot{x}_{ia_h a_k})\ u_h u_k\,ds = u_h u_k\,x_{ia_h a_k}\,F_{\dot{x}_i}\Big|^{2} -$$

$$-\int_{s_1}^{s_2} x_{ia_h a_k}\,\left(F_{x_i} - \frac{d}{ds}\,F_{\dot{x}_i}\right)\,u_h\,u_k\,ds = u_h\,u_k\,F_{\dot{x}_i}\,x_{ia_h a_k}\Big|^{s_2},$$

$$\int_{s_1}^{s_2} F_{x_i x_{j2}}\,x_{ia_h}\,x_{j2a_k} + F_{\dot{x}_i x_{j2}}\,\dot{x}_{ia_h}\,x_{j2a_k})\,u_h u_k = x_{ia_h}\,x_{j2a_k}\,u_h\,u_k\,F_{\dot{x}_i x_{j2}}\Big|^{s_2}$$

$$+\int_{s_1}^{s_2} x_{ia_h}\,u_h u_k\,\frac{\vartheta}{\vartheta x_{j2}}\left(F_{x_i} - \frac{d}{ds}\,F_{\dot{x}_i}\right)\,ds = x_{ia_h}\,x_{j2a_k}\,u_h\,u_k\,F_{\dot{x}_i x_{j2}}\Big|^{s_2}.$$

Τὴν ὡς ἄνω μεταβολὴν τοῦ (0.3) πρὸς ε κατὰ μῆκος τῆς ἀκραίας καμπύλης δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὑπὸ τὴν κατωτέρω μορφὴν

$$(2.6)\qquad J''\,(o) = J''\,(\eta_i,\ \dot{\eta}_i,\ u_h) = \beta_{hk}\,u_h\,u_k + \int_{s_1}^{s_2} 2\,\Omega\,(s,\ \eta_i,\ \dot{\eta}_i)\,ds,$$

ὅπου εἶνε

$$(2.7)\qquad \beta_{hk} = \Big[\vartheta_{a_h a_k} + F_{\dot{x}_i} - x_{ia_h a_k}\,(o) + 2\,F_{\dot{x}_i x_{j2}}\,x_{ia_h}\,(o)\,x_{j2a_k}\,(o)\Big]^{s_2} +$$

$$+\int_{s_1}^{s_2} (F_{x_{i2}x_{j2}}\,x_{i2a_h}\,(o)\,x_{j2a_k}\,(o) + F_{x_{i2}}\,x_{i2a_h a_k}\,(o))\ ds$$

$$(2.8)\qquad \eta_{i2} - x_{i2a_h}\,u_h = o\ ,\ (\,i = 1,\ 2,\ \ldots,\ \eta,\ h = 1,\ 2\,,\ \ldots,\ \varrho).$$

Ἐὰν τεθῇ

$$(2.9)\qquad 2\,\Lambda = F_{x_{i2}x_{j2}}\cdot x_{i2a_h}\,x_{j2a_k}\,u_h\,u_k$$

$$(2.10) \qquad M = \left(F_{\dot{x}_i}\, x_{i a_h a_k} + 2\, F_{\dot{x}_i x_{j2}}\, x_{i a_h}\, x_{j 2 a_k}\right|^{2} + \int_{s_1}^{s_2} F_{x_{i2}}\, x_{i 2 a_h a_k}\, ds$$

θὰ ἔχωμεν

$$(2.11) \qquad J''(\eta_i, \dot{\eta}_i, u_h) = \vartheta_{a_h a_k}\, u_h\, u_k + \int_{s_1}^{s_2} 2\left(\Omega + \Lambda + \frac{\dot{R}}{2}\eta_i^2 + R\eta_i\dot{\eta}_i\right) ds$$

$$= \vartheta_{a_h a_k}\, u_h\, u_k + \int_{s_1}^{s_2} 2\,\omega(\eta_i, \dot{\eta}_i, u_h)\, ds$$

ἐνῷ ὑποτίθεται ὅτι εἶνε

$$\dot{R}\eta_i^2 \,\Big|^{s_2} = M \;\; \text{ἢ} \;\; R \,\Big|^{s_2} = M : \eta_i^2\,(s_2, o)\,,$$

$$(2.12) \qquad 2\,\omega = \left(F_{x_i x_j}\,\eta_j + \dot{R}\eta_i\right)\eta_i + 2\left(F_{x_i \dot{x}_j}\,\eta_i + R\eta_i\right)\dot{\eta}_i + F_{\dot{x}_i \dot{x}_j}\,\dot{\eta}_i\,\dot{\eta}_j +$$
$$+ F_{x_{i2} x_{j2}}\, x_{i2a_h}\, x_{j2a_k}\, u_h\, u_k\,.$$

Ἕνεκα τῆς μορφῆς (2.12) τοῦ 2ω ἔχομεν τὴν δευτέραν μεταβολὴν τοῦ (0.3) πρὸς ε καὶ διὰ ε = ο ὑπὸ τὴν κατωτέρω μορφήν.

$$(2.13) \qquad J''(o) = \vartheta_{a_h a_k}\, u_h\, u_k + \int_{s_1}^{s_2} \left(\eta_i\, \omega_{\eta_i} + \dot{\eta}_i\, \omega_{\dot{\eta}_i} + x_{i2a_h}\, \omega_{x_{i2a_h}}\right) ds.$$

ΠΑΡΑΠΟΜΠΑΙ

1) O. Bolza: Vorlesungen über Variationsrechnung, 1909, p. 304 - 6.

2) Lagrange: Oeuvres, Bd. II, pp 47, 50.

3) O. Bolza: Ὅπως εἰς τὸ 1) σελ. 305.

4) O. Bolza: Ueber den anormalen Fall beim Lagrange'schen Problem mit gemischten Bedingungen und variablen Endpunkten, Math. Annalen, vol. 74 (1913) p.p. 430-446.

5) Bliss: The problem of Bolza in the Calculus of variations, Annals of Mathem. vol. 33 (1932), p. p. 261 - 274.

6) M. Morse: Sufficient conditions in the problem of Lagrange with variable end points, Amer. Journal of Math. Vol. LIII, N° 3 (1913).

7) S. M. Mayer: The problem of Lagrange and Mayer with variable end points, Proceedings of the Amer. Academy of Arts and Sciences, vol. 66 N° 6 (1931) p. p. 235 - 253.

8) H. McFarlan: The Töhoku Math. Journal, vol. 39 (1934), pp. 66 - 81.

9) M. R. Hestenes: Generalized problem of Bolza in the Calculus of Variations, Duke Math. Journal, vol. 5 (1939), p. p. 309 - 324.

10) N. Sakellariou: Ueber das Variationsrechnungproblem in parameterdarstellung im n-dimensionalen Riemannschen Raum, Société Roumaine des Sc. t. 40 (1938), 1-2.

11) M. Morse: The Calculus of variations in the Large (1934), p.p. 1, 19.

12) M. R. Hestenes: Ὅπως εἰς τὸ 9, σελ. 312.

ΒΙΟΧΗΜΕΙΑ.— Ἐργαστηριακὸς μικρο-καὶ μακροηλεκτρο-διαπιδυτήρ. — *ὑπὸ Κ. Τζώνη*. Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ κ. Ἀλ. Βουρνάζου.

Τὸ 1862 ὁ Graham συνεχίζων τὰ πειράματα αὐτοῦ ἐπὶ τῆς διαχύσεως, ἤχθη εἰς τὴν παρατήρησιν, καθ' ἣν ὡς εἰς τὴν διάχυσιν διάφοροι οὐσίαι διαχέονται μὲ διάφορον ταχύτητα (κολλοειδῆ, κρυσταλλοειδῆ) οὕτω καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν εἰς ἣν δύο ὑγρὰ διαχωρίζονται δι' εἰδικῆς μεμβράνης (ζωϊκὴ μεμβράνη, περγαμηνὸς χάρτης κ.τ.λ.) ἀπ' ἀλλήλων μὲ διαφόρους ἐν διαλύσει οὐσίας, τινὲς τούτων διέρχονται ταχύτερον καὶ τινὲς βραδύτερον ἢ οὐδόλως. Τὸ φαινόμενον τοῦτο ἐκάλεσεν ὁ Graham διαπίδυσιν (Dialysis).

Τὴν διαπίδυσιν ἔκτοτε ἐμελέτησαν πλεῖστοι ἐρευνηταί, αἱ δὲ ἐφαρμογαί της σήμερον εἰς τὴν βιομηχανίαν καὶ εἰς τὸ ἐργαστήριον εἶναι σημαντικαί.

Οὕτως εἰς περιπτώσεις καθ' ἃς ἐπιζητεῖται νὰ χωρισθῶσιν κολλοειδῆ διαλύματα ἀπὸ κρυσταλλοειδεῖς οὐσίας, συνυπαρχούσας μετ' αὐτῶν, ἡ προσφορωτέρα μέθοδος πρὸς τοῦτο εἶναι ἡ διαπίδυσις.

Πρὸς ἐπίτευξιν κατὰ τὸ δυνατὸν μεγαλυτέρας ταχύτητος διαπιδύσεως κατεσκευάσθησαν διάφοροι τύποι διαπιδυτήρων π. χ. μὲ διαρκῆ ἀνάδευσιν τοῦ καθοριζομένου κολλοειδοῦς διαλύματος, μὲ συνεχῆ ἀνανέωσιν τοῦ ἔξω τῆς μεμβράνης ὕδατος, μὲ αὔξησιν τῆς ἐπιφανείας τῆς μεμβράνης κτλ. τέλος πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἐπροτάθη ἡ χρησιμοποίησις τοῦ συνεχοῦς ἠλεκτρικοῦ ρεύματος, καθ' ἣν ἡ διαπίδυσις τελεῖται ἐντὸς ἠλεκτρικοῦ πεδίου. Τὴν ὡς ἄνω μέθοδον ἐκάλεσαν ἠλεκτροδιαπίδυσιν καὶ ἡ πρώτη ἐπ' αὐτῆς ἐπιστημονικὴ ἐργασία ἐγράφη τὸ 1903 ὑπὸ τῶν H. W. Morse καὶ G. W. Pierce.

Ἡ διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἐπιτευχθεῖσα ταχύτης εἶναι σημαντική. Ὁ E. Heyman ἀναφέρει κατὰ μέσον ὅρον εἰκοσαπλασίαν ταχύτητα διὰ τῆς ἠλεκτροδιαπιδύσεως ἐν συγκρίσει πρὸς τὴν ἁπλῆν διαπίδυσιν. Ὁ αὐτὸς ἐρευνητὴς μᾶς δίδει σημαντικωτάτην διαφορὰν τῶν δύο μεθόδων εἰς τὴν περίπτωσιν καθαρισμοῦ ὀροῦ αἵματος, 42 ὥρας διὰ τῆς ἁπλῆς διαπιδύσεως, ἔναντι 15 λεπτῶν τῆς ἠλεκτροδιαπιδύσεως.

Οἱ ἠλεκτροδιαπιδυτῆρες γενικῶς συνίστανται ἐκ τριῶν δοχείων ἐν σειρᾷ συν-