

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ. Περὶ ἑνὸς τρόπου ὑπολογισμοῦ τῶν ἀθροισμάτων $S(\alpha_n, K)$ – ὥπος **Xρ. Φουσιάνη.** Ἀνεκοινώθη ὥπο τοῦ κ. Π. Ζερβοῦ.

1. – Ἐχομεν δεῖξει εἰς προγενεστέραν ἐργασίαν μας¹, ὅτι ὁ τύπος

$$\begin{aligned} \sum \alpha^{q_1} (\alpha + \varepsilon)^{q_2} \dots (\alpha + n\varepsilon)^{q_{n+1}} & (\text{διὰ } q_1 + q_2 + \dots + q_{n+1} = K) \\ & = \binom{n+K}{K} \alpha^K + \binom{n+K}{K-1} P_{n,1} \alpha^{K-1} \varepsilon + \dots + P_{n,K} \varepsilon^K \end{aligned}$$

καὶ διὰ τιμᾶς τῶν ρ ἀκεραίας καὶ θετικὰς ἢ μηδέν, ὅπου α καὶ ε τυχόντες ἀριθμοί, ἀληθεύει διὰ κάθε περίπτωσιν, τοῦ $P_{n,K}$ ὁρίζοντος τὸ ἀθροισμα

$$\sum 1^{q_1} \cdot 2^{q_2} \dots n^{q_n} \quad \text{διὰ } q_1 + q_2 + \dots + q_n = K.$$

Ἐκ τοῦ τύπου αὐτοῦ διαφαίνεται ἄλλος γενικώτερος τύπος, ὅστις ἐπιτρέπει νὰ ἀναπτυχθῇ, κατὰ ἓνα τρόπον, οἰνοδήποτε ἀθροισμα τῆς μορφῆς

$$(1) \quad S(\alpha_n, K) = \sum \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_n^{q_n}, \quad (q_1 + q_2 + \dots + q_n = K).$$

Ἀποδεικνύομεν ὅτι :

Λιὰ κάθε τιμὴν τῶν ἀριθμῶν n καὶ K ἀκεραίαν καὶ θετικὴν ἢ μηδὲν ἀληθεύει ὁ τύπος

$$\begin{aligned} (a) \quad \sum (\alpha + \lambda_1)^{q_1} (\alpha + \lambda_2)^{q_2} \dots (\alpha + \lambda_{n+1})^{q_{n+1}} & \quad \text{διὰ } q_1 + q_2 + \dots + q_{n+1} = K \\ & = \binom{n+K}{K} \alpha^K + \binom{n+K}{K-1} S(\lambda_{n+1}, 1) \alpha^{K-1} + \binom{n+K}{K-2} S(\lambda_{n+1}, 2) \alpha^{K-2} + \dots + S(\lambda_{n+1}, K), \end{aligned}$$

ὅπου $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ τυχόντες ἀριθμοί καὶ q_1, \dots, q_{n+1} ἀκέραιοι θετικοί ἢ μηδέν, τῶν ἀθροισμάτων

$$S(\lambda_{n+1}, P), \quad P = 1, 2, \dots, K$$

ὁρίζομέν την (1).

Ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ τύπος (a) ἀληθεύει διά τινα τιμὴν τοῦ K καὶ καλέσωμεν $A_{n+1, K}$ τὸ ἀθροισμα τοῦ α' μέλους τοῦ τύπου αὐτοῦ. Θεωροῦμεν εἶτα τὸ ἀθροισμα

$$A_{n+1, K+1}.$$

Εἰς πᾶν ἀθροισμα $S(\alpha_n, K)$, τὸ ὅποιον ὁρίζεται συμφώνως τῇ (1), παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι

$$S(\alpha_n, K) = S(\alpha_{n-1}, K) + \alpha_n S(\alpha_n, K-1)$$

καὶ προχωροῦντες εἰς τὴν ἀνάλυσιν αὐτὴν μὲ τὰς τιμὰς

$$n-1, n-2, \dots, n-m$$

¹ Mathematische Annalen 116, 749, 1939.

λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$(2) \quad S(\alpha_n, K) = \alpha_n S(\alpha_n, K-1) + \alpha_{n-1} S(\alpha_{n-1}, K-1) + \dots + \alpha_{n-m} S(\alpha_{n-m}, K-1) + S(\alpha_{n-m-1}, K),$$

ὅπου τὸ m δύναται νὰ λάβῃ τὰς τιμὰς

$$0, 1, \dots, (n-1), \text{ δριζομένου } \text{ ὅτι } S(\alpha_0, K) = 0.$$

Σύμφωνα πρὸς τὸν τύπον (2), θεωρούμενον ἐν προκειμένῳ διὰ τὴν τιμὴν $m = n - 1$, ἀναπτύσσομεν τὸ ἀθροισμα $A_{n+1, K+1}$, τὸ δόποιον, ὡς δριζομένην ἀνωτέρω, εἶναι τὸ ἀθροισμα $S(\alpha_{n+1}, K+1)$ μὲν τὴν διαφορὰν ὅτι ἀντὶ α_n ἔχει τὰ $\alpha + \lambda_n$. Θὰ ἔχωμεν

$$A_{n+1, K+1} = (\alpha + \lambda_{n+1}) A_{n+1, K} + \dots + (\alpha + \lambda_1) A_{1, K}$$

$$\begin{aligned} A_{n+1, K+1} &= \sum_{j=0}^n (\alpha + \lambda_{j+1}) \binom{j+K}{K} \alpha^K + \binom{j+K}{K-1} S(\lambda_{j+1}, 1) \alpha^{K-1} + \dots + S(\lambda_{j+1}, K) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{\varrho=0}^K \lambda_{j+1} \binom{j+K}{K-\varrho} S(\lambda_{j+1}, \varrho) \alpha^{K-\varrho} + \binom{j+K}{K-\varrho} S(\lambda_{j+1}, \varrho) \alpha^{K-\varrho+1}, \end{aligned}$$

ἔνθα δριζομένη $\binom{j+K}{0} = 1$.

Εἰς τὸν πρῶτον ὅρον μόνον τῆς ἀγκύλης τοῦ τελευταίου ἀθροίσματος θέτομεν $\varrho = 1$ ἀντὶ ϱ καὶ δριζομένην, ὅτι εἰς ὅλον τὸ ἀθροισμα τὸ ϱ μεταβάλλεται ἀπὸ 1 ἕως K . Τὸ οὕτω προκύπτον ἀθροισμα

$$\varepsilon = \sum_{\varrho=1}^K \sum_{j=0}^n \binom{j+K}{K-\varrho+1} \lambda_{j+1} S(\lambda_{j+1}, \varrho-1) \alpha^{K-\varrho+1} + \binom{j+K}{K-\varrho} S(\lambda_{j+1}, \varrho) \alpha^{K-\varrho+1}$$

θὰ ὑπολείπεται τοῦ προηγουμένου κατὰ τοὺς ὅρους

$$\sum_{j=0}^n \lambda_{j+1} S(\lambda_{j+1}, K) + \binom{j+K}{K} \alpha^{K+1} = S(\lambda_{n+1}, K+1) + \binom{n+K+1}{K+1} \alpha^{K+1},$$

ὅπου τὸ μὲν $\lambda_{j+1} S(\lambda_{j+1}, K)$ εἶναι ἡ τιμὴ διὰ $\varrho = K+1$ τοῦ α' ὅρου τῆς ἀγκύλης τοῦ ε , τὸ δὲ $\binom{j+K}{K} \alpha^{K+1}$ ἡ τιμὴ τοῦ β' ὅρου διὰ $\varrho = 0$. Θὰ ἔχωμεν ὅθεν

$$(3) \quad A_{n+K, K+1} = \binom{n+K+1}{K+1} \alpha^{K+1} + S(\lambda_{n+1}, K+1) + \varepsilon.$$

Διὰ τὰς τιμὰς ὅμως τοῦ ϱ ἀπὸ 1 μέχρι K καὶ συγχρόνως διὰ τὰς τιμὰς $j = 0, 1, \dots, n$ ἴσχει ἡ γνωστὴ σχέσις

$$\binom{K-\varrho}{K-\varrho} + \binom{K-\varrho+1}{K-\varrho} + \dots + \binom{j+K-1}{K-\varrho} = \binom{j+K}{K-\varrho+1}.$$

‘Ως ἐκ τούτου ἡ ἐντὸς τῆς ἀγκύλης τοῦ ἀθροίσματος ε παράστασις γράφεται οὕτω, τοῦ παρόντος $\alpha^{K-\varrho+1}$ τιθομένου ἐκτός:

$$\left[\binom{K-q}{K-q} + \binom{K-q+1}{K-q} + \dots + \binom{j+K-1}{K-q} \right] \lambda_{j+1} S(\lambda_{j+1}, q-1) + \binom{j+K}{K-q} S(\lambda_{j+1}, q)$$

Ταύτην λαμβάνομεν διὰ τὰς τιμὰς τοῦ $j = 0, 1, \dots, n$, θὰ ξωμεν ὅθεν

$$\varepsilon = \sum_{q=1}^K \binom{K-q}{K-q} \left[\lambda_1 S(\lambda_1, q-1) + \dots + \lambda_{n+1} S(\lambda_{n+1}, q-1) \right]$$

$$+ \binom{K-q+1}{K-q} \left[\lambda_1 S(\lambda_1, q-1) + \dots + \lambda_{n+1} S(\lambda_{n+1}, q-1) \right]$$

$$+ \binom{K-1}{K-q} \left[\lambda_1 S(\lambda_1, q-1) + \dots + \lambda_{n+1} S(\lambda_{n+1}, q-1) \right]$$

$$+ \binom{K}{K-q} \left[\lambda_2 S(\lambda_2, q-1) + \dots + \lambda_{n+1} S(\lambda_{n+1}, q-1) + S(\lambda_1, q) \right]$$

$$+ \binom{n+K-1}{K-q} \left[\lambda_{n+1} S(\lambda_{n+1}, q-1) + S(\lambda_n, q) \right]$$

$$+ \binom{n+K}{K-q} S(\lambda_{n+1}, q) \alpha^{K-q+1}.$$

* Ή ανωτέρω σχέσις δυνάμει τοῦ τύπου (2) τρέπεται εἰς τὴν κάτωθι

$$\varepsilon = \sum_{q=1}^K \binom{K-q}{K-q} + \binom{K-q+1}{K-q} + \dots + \binom{K-1}{K-q} + \binom{K}{K-q} + \dots + \binom{n+K}{K-q}$$

$$S(\lambda_{n+1}, q) \alpha^{K-q+1} = \sum_{q=0}^K \binom{n+K+1}{K-q+1} S(\lambda_{n+1}, q) \alpha^{K-q+1}.$$

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ε ἐὰν θέσωμεν ἐν τῇ (3) προκύπτει

$$A_{n+1, K+1} = \sum_{q=0}^{K+1} \binom{n+K+1}{K-q+1} S(\lambda_{n+1}, q) \alpha^{K-q+1},$$

ἥ σχέσις αὕτη ὅμως εἶναι ἀκριβῶς ἡ (a) διὰ $K+1$ ἀντὶ K .

“Ωστε δὲ τύπος (a) ἐπὶ τῇ ὑποθέσει ὅτι ισχύει διὰ τὴν τιμὴν K , ἀπεδείχθη ὅτι ισχύει καὶ διὰ $K+1$ οἷονδήποτε ὅντος τοῦ n .

Διὰ τὴν τιμὴν $K=1$ δὲ τύπος οὗτος εἶναι προφανῶς ἀληθῆς, ἀληθεύει ὅθεν διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν καὶ θετικὴν τιμὴν τῶν K καὶ n .

Οὐ ἀποδειχθεὶς τύπος (a), ὅταν ἐν αὐτῷ τεθῇ $\lambda_{n+1} = 0$, τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$(b) \quad \sum \alpha_1^{q_1} \alpha_2^{q_2} \dots \alpha_{n+1}^{q_{n+1}} \delta_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = K}$$

$$= \binom{n+K}{K} \alpha_1^K + \binom{n+K}{K-1} S(\lambda_n, 1) \alpha_1^{K-1} + \dots + S(\lambda_n, K),$$

$$\text{ὅποιν εἴναι } \lambda_\mu = \alpha_{\mu+1} - \alpha_\nu \quad (\mu = 1, 2, \dots, n).$$

Ο τύπος (b) είναι περισσότερον εύχρηστος, πρὸ παντὸς διὰ τὴν ἐκτίμησιν τῶν ἀνωτέρω ἀθροισμάτων. Συμφώνως αὐτῷ ἡ σπουδὴ τοῦ ἀθροισμάτος τοῦ α' μέκους ἀνάγεται εἰς τὴν μελέτην ἄλλων τοιούτων ἀθροισμάτων κατὰ τοῦτο ἀπλουστέρων, ὅτι οἱ ὅροι αὐτῶν προέρχονται ἐκ π μόνον ἀριθμῶν τῶν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, οἱ δόποιοι μάλιστα θὰ είναι καὶ μικρότεροι τῶν ἀριθμῶν $\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$, ἐὰν οἱ τελευταῖοι είναι πάντες θετικοί καὶ διαταχθοῦν κατὰ σειρὰν μεγέθους αὔξουσαν.

Οὕτω διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τύπου (b) τὸ ἐν αὐτῷ ἀθροισμα

$$S(\alpha_{n+1}, \kappa),$$

σχηματίζομεν τὰς διαφορὰς

$$\alpha_{\mu+1} - \alpha_1 = \lambda_{\mu}^{(1)} = \lambda_{\mu}, \quad \mu = 1, 2, \dots, n,$$

$$\lambda_{\mu+1}^{(1)} - \lambda_1^{(1)} = \alpha_{\mu+2} - \alpha_2 = \lambda_{\mu}^{(2)}, \quad \mu = 1, 2, \dots, (n-1),$$

$$\lambda_{\mu+1}^{(n-1)} - \lambda_1^{(n-1)} = \alpha_{\mu+n} - \alpha_n = \lambda_{\mu}^{(n)}, \quad \mu = 1.$$

Γνωρίζοντες τὸ

$$S(\lambda_1^{(n)}, p) = (\lambda_1^{(n)})^p = (\alpha_{n+1} - \alpha_n)^p$$

διὰ τὰς τιμὰς $p = 1, 2, \dots, \kappa$, ὑπολογίζομεν διὰ τοῦ τύπου (b) τὸ ἀθροισμα

$$S(\lambda_2^{(n-1)}, p) = \sum (\alpha_n - \alpha_{n-1})^{\varrho_1} (\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1})^{\varrho_2}, \quad \varrho_1 + \varrho_2 = p,$$

διὰ τὰς τιμὰς $p = 1, 2, \dots, \kappa$. Γνωρίζοντες τώρα τὸ $S(\lambda_2^{(n-1)}, p)$ ὑπολογίζομεν, πάλιν διὰ τοῦ τύπου (b), τὸ ἀθροισμα

$S(\lambda_3^{(n-2)}, p) = \sum (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2})^{\varrho_1} (\alpha_n - \alpha_{n-2})^{\varrho_2} (\alpha_{n+1} - \alpha_{n-2})^{\varrho_3}, \quad \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = p$, διὰ τὰς τιμὰς $p = 1, 2, \dots, \kappa$, καὶ προχωροῦντες οὕτω θὰ εὑρωμεν τέλος τὰ ἀθροισματα

$$S(\lambda_n^{(1)}, p) = S(\lambda_n, p), \quad \text{διὰ } p = 1, 2, \dots, \kappa,$$

ἄτινα παρουσιάζονται εἰς τὸ β' μέλος τοῦ τύπου (b) καὶ τὰ ὅποια πλέον καθιστοῦν γνωστὸν τὸ ἀθροισμα τοῦ α' μέλους, δηλαδὴ τὸ

$$S(\alpha_{n+1}, \kappa).$$

Εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἀνωτέρω ἀθροισμάτων θὰ ἔχωμεν κυρίως ὑπ' ὅψει, ὅτι δύο κατὰ σειρὰν ἀθροίσματα ἔξι αὐτῶν, τὰ

$$S(\lambda_{\mu}^{(n-\mu+1)}, p), \quad S(\lambda_{\mu+1}^{(n-\mu)}, p), \quad (\mu = 1, 2, \dots, n-1),$$

συνδέονται βάσει τοῦ τύπου (b) οὕτω :

$$(4) \quad S(\lambda_{\mu+1}^{(n-\mu)}, p) = \binom{\mu+p}{p} (\lambda_1^{(n-\mu)})^p + \binom{\mu+p}{p-1} S(\lambda_{\mu}^{(n-\mu+1)}, 1) (\lambda_1^{(n-\mu)})^{p-1} + \dots S(\lambda_{\mu}^{(n-\mu+1)}, p).$$

Ἄς ἐφαρμόσωμεν τ' ἀνωτέρω εἰς τὸ ἄθροισμα

$$\Theta = \Sigma 22^{q_1} \cdot 27^{q_2} \cdot 31^{q_3} \cdot 41^{q_4} \text{ διὰ } q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 3,$$

ἔνθα εἶναι $\eta + 1 = 4$ καὶ $\kappa = 3$.

Ἀναλύομεν τὸ ἄθροισμα Θ κατὰ τὸν τύπον (b).

$$\Theta = \binom{6}{3} 22^3 + \binom{6}{2} S(\lambda_3, 1) 22^2 + \binom{6}{1} S(\lambda_3, 2) \cdot 22 + S(\lambda_3, 3).$$

ἔνταῦθα εἶναι

$$S(\lambda_1^{(n)}, p) = S(\lambda_1^{(3)}, p) = (41 - 31)^p = 10^p,$$

$$S(\lambda_2^{(n-1)}, p) = S(\lambda_2^{(2)}, p) = \Sigma (31 - 27)^{q_1} (41 - 27)^{q_2} = \Sigma 4^{q_1} 14^{q_2} \text{ διὰ } q_1 + q_2 = p,$$

$$\begin{aligned} S(\lambda_3^{(n-2)}, p) &= S(\lambda_3^{(1)}, p) = S(\lambda_3, p) = \Sigma (27 - 22)^{q_1} (31 - 22)^{q_2} (41 - 22)^{q_3} \\ &= \Sigma 5^{q_1} 9^{q_2} 19^{q_3} \text{ διὰ } q_1 + q_2 + q_3 = p. \end{aligned}$$

Τὰ ἀθροίσματα

$$S(\lambda_1^{(3)}, p), S(\lambda_2^{(2)}, p), S(\lambda_3, p)$$

τὰ δύοτα παριστῶμεν πρὸς συντομίαν κατὰ σειρὰν διὰ τῶν

$$A_p, B_p, \Gamma_p,$$

συνδέονται κατὰ τὸν τύπον (4) διὰ τῶν δύο κάτωθι ἔξισώσεων:

$$B_p = \binom{1+p}{p} 4^p + \binom{1+p}{p-1} A_1, 4^{p-1} + \dots + A_p,$$

$$\Gamma_p = \binom{2+p}{p} 5^p + \binom{2+p}{p-1} B_1, 5^{p-1} + \dots + B_p$$

Γνωστῶν ὕντων τῶν A_1, A_2, A_3 , λαμβάνομεν ἐκ τῆς πρώτης ἔξισώσεως διὰ $p = 1, 2, 3$

$$B_1 = 18, B_2 = 268, B_3 = 3816,$$

καὶ κατόπιν ἐκ τῆς δευτέρας ἔξισώσεως διὰ $p = 1, 2, 3$,

$$\Gamma_1 = 33, \Gamma_2 = 778, \Gamma_3 = 16266.$$

Τὰς τιμὰς Γ_p , δηλαδὴ τὰ

$$S(\lambda_3, p)$$

ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ ἄθροισμα Θ λαμβάνομεν

$$\Theta = 571502.$$

R E S U M É

Nous démontrons ici, que la formule (a) est vraie pour chaque valeur des nombres η et κ , entière et positive ou nulle, les nombres $a, \lambda_1, \dots, \lambda_{\eta+1}$ étant quelconques et les sommes

$$S(\lambda_{n+1}, p)$$

étant définies d'après (1). Cette formule (a) rend plus générale la relation citée dans les *Mathematische Annalen* 116, 749, 1939.

Si nous posons $\lambda_{n+1} = 0$, la formule (a) prend la forme (b), plus usitée que la précédente, qui nous conduit graduellement au calcul des sommes S de l'équation (1).

ΨΥΧΟΛΟΓΙΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑΙ ΕΡΕΥΝΑΙ. Ἡ θρησκευτικὴ συνείδησις καὶ ἡ σχέσις αὐτῆς πρὸς τὰς ἄλλας ψυχικὰς λειτουργίας. — A') Ἡ πορεία τῆς ἀναπτύξεως τῆς θρησκευτικῆς συνειδήσεως* ὑπὸ Θεοφίλου Βορέα καὶ Μαρίας Κισσάβου¹.

"Εχω τὴν τιμὴν νὰ ὑποβάλω εἰς τὴν Ἀκαδημίαν πορίσματα ψυχολογικῶν ἔρευνῶν γενομένων ὑπὸ ἐμοῦ ἐν συνεργασίᾳ μετὰ τῆς δίδος Μαρίας Κισσάβου καὶ ἀναφερομένων εἰς τὴν θρησκευτικὴν συνείδησιν.

Λέγομεν θρησκευτικὴν συνείδησιν τὸ σύνολον τῶν ἐννοιῶν, ὅσας ἔχομεν περὶ τοῦ θεοῦ καὶ τῆς περὶ αὐτὸν εὐσεβείας, ἔτι δὲ τὰ συνακολουθοῦντα συναισθήματα. Εἶναι δὲ τὰ συνακολουθοῦντα συναισθήματα ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀντιλήψεις καὶ τὰς ἐννοίας ἐκείνας. Ἡ παράστασις τοῦ θεοῦ ὡς παντοδυνάμου δημιουργοῦ καὶ πατρὸς ἀγαπῶντος τοὺς ἀνθρώπους καὶ ἐπιμελουμένου αὐτῶν προκαλεῖ τὴν πρὸς αὐτὸν ἀγάπην καὶ τὸν σεβασμὸν καὶ τὴν εὐλάβειαν καὶ τὴν εὐγνωμοσύνην καὶ τὴν ἐλπίδα, ἄλλας δὲ ψυχικὰς διαθέσεις γεννῶσιν ἄλλαι παραστάσεις τοῦ ἀνθρώπου ἐν τῇ σχέσει αὐτοῦ πρὸς τὸν θεόν.

Συνάπτεται δὲ ἡ θρησκευτικὴ συνείδησις καὶ πρὸς τὴν ἡθικὴν συνείδησιν ἀρρήκτως, διότι αἴρει τὸν ἀνθρωπὸν ὑπεράνω τοῦ αἰσθητοῦ κόσμου, εἰς τὸν κόσμον τῶν ἰδεῶν καὶ τῶν ἀξιῶν, ὅσας ἡ ἀνθρωπίνη φρόνησις καθορίζει, τῶν ἰδεῶν καὶ ἀξιῶν, αἴτινες κατευθύνουσιν αὐτὸν ἐν τῷ βίῳ καὶ παραμυθοῦνται ἐν ταῖς παντοίαις δυσπραγίαις. Ὁ εὐσεβὴς ἀνθρωπὸς πέποιθεν ὅτι ὑπὸ τοῦ θεοῦ ὑπάρχει ὁ ἡθικὸς νόμος τεθειμένος, διὸ καὶ ὑποτάσσεται εἰς αὐτὸν ὡς εἰς θέλημα θεῖον.

"Ως δ' αἱ ἄλλαι ψυχικαὶ ἐκδηλώσεις, ἐγένετο καὶ ἡ θρησκευτικὴ συνείδησις πολλῶν ἔρευνῶν ὑποκείμενον ἀπὸ τῶν παλαιοτάτων μέχρι τῶν καθ' ἡμᾶς χρόνων. Πῶς γεννᾶται καὶ ἀναπτύσσεται ἡ θρησκευτικὴ συνείδησις; Τίς γίνεται ἀρχὴ καὶ ἀφετηρία τῆς πίστεως εἰς τὴν ὑπαρξίαν ὑπερφυῶν ὄντων καὶ τῆς συ-

* THÉOPHILE BORÉAS et MARIE KISSAVOU, *Le développement de la conscience religieuse*.

¹ Ἐκ τοῦ Ψυχολογικοῦ Ἑργαστηρίου τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν.